解　説

完備化による等式証明

Equational Proofs by Completion

外山 芳人　東北大学電気通信研究所
Yoshihito Toyama　Research Institute of Electrical Communication, Tohoku University
toyama@nue.riec.tohoku.ac.jp, http://www.nue.riec.tohoku.ac.jp/members/toyama-j.html/

keywords: equational proof, term rewriting system, Knuth-Bendix completion

1. はじめに

項書き換えシステム (term rewriting system) は等式にもとづく柔軟な計算法と効率的な証明法を提供できるため，定理自動証明，関数型あるいは論理型言語，代数的仕様記述，記号処理など，計算機科学のさまざまな分野で広くもちいられている [Dershowitz and Jouannaud 1988, Baader and Nipkow 1998].

項書き換えシステムは方向付けられた等式（書き換え規則）の集合として定義される．ところで，等式そのものにはもともと計算という意味はない．たとえば，等式 $1+2=3$ は右辺と左辺が等価であるという意味をもつだけであり，$1+2$ から 3 を得るばかりではなく，逆に 3 から $1+2$ を得ることも可能である．しかし，この等式を計算という立場でながめてみると，$1+2$ の計算結果として 3 が得られるのであり，3 の計算結果として $1+2$ が得られることはない．このように，等式 $1+2=3$ を複雑な式から単純な式への非可逆な書き換え規則 $1+2 \to 3$ とみなすと，等式の世界を計算の世界に自然な形で結び付けることが可能となる．

項書き換えシステムの計算は，これらの書き換え規則を繰り返し適用することによって与えられた項がもっとも単純な形（正規形）に到達するまでリダクションすることで実現される．したがって，項書き換えシステムをもちいることにより，等式にもとづいて記述された関数型プログラムや代数的仕様記述に，自然な形でリダクションにもとづく操作的意味を与えることができる．また，自動証明における等式推論をリダクションで実行することにより，証明を効率的な計算に置き換えることも可能となる．とくに，完備な項書き換えシステムをもちいると，バックトラッキングが不要となるため，きわめて高速な等式自動証明システムを実現することができる．ここでは，項書き換えシステムをもちいた等式証明で中心的な役割をはたす完備化手続き (Completion) に焦点をしぼり，自動証明において項書き換えシステムがどのように応用されているかを解説する．

2. 項書き換えシステム

2·1 項書き換えシステムの例

自然数上の加算を例にとり項書き換えシステムの考え方を説明する．まず，自然数上の加算 $+$ を等式システムで表してみよう．話を簡単にするために，以下では自然数 0, 1, 2, $\cdots$ を 0, $s(0)$, $s(s(0))$, $\cdots$ で表現することにする．すると自然数 x の次の数は $s(x)$ となるから加算 $+$ は以下の等式システム E_+ で形式化できる．

$$E_+ \quad \begin{cases} x+0=x \\ x+s(y)=s(x+y) \end{cases}$$

ここでシステムを記述している等式 $s=t$ を左辺から右辺への非可逆な書き換え規則 $s \to t$ とみなしたものが項書き換えシステム (term rewriting system) である．等式システム E_+ からは以下の項書き換えシステム R_+ を得る．

$$R_+ \quad \begin{cases} x+0 \to x \\ x+s(y) \to s(x+y) \end{cases}$$

このとき $1+2=3$ の計算は R_+ の書き換え規則を適用して以下のリダクション (項の書き換え) を行うことによって得られる．

$$s(0)+s(s(0)) \to s(s(0)+s(0)) \to s(s(s(0)+0)) \\ \to s(s(s(0))).$$

ここで 項 $s(s(s(0)))$ はこれ以上リダクションすることができない．このような項を正規形 (normal form) という．正規形はリダクションによる計算の答えとみなすことができる．項 s から 項 t (t は正規形である必要はない) に0回以上のリダクションで到達できるとき $s \xrightarrow{*} t$ と書く．したがって上記のリダクションは $s(0)+s(s(0)) \xrightarrow{*} s(s(s(0)))$ と表せる．

加算 $+$ と乗算 $*$ をあらわす項書き換えシステム R_f は以下で示される．加算と乗算が書き換え規則のみで完全

に実現されていることに注意されたい．実際，すべての計算可能な関数は有限個の書き換え規則で完全に表せることが知られており，項書き換えシステムは計算モデルとして十分な計算能力をもっている [Baader and Nipkow 1998]．

$$R_f \quad \begin{cases} x+0 \to x \\ x+s(y) \to s(x+y) \\ x*0 \to 0 \\ x*s(y) \to (x*y)+x \end{cases}$$

3. 項書き換えシステムの完備性

ここでは，項書き換えシステムの基本的な性質である合流性 (チャーチ・ロッサ性)，停止性，完備性について簡単に紹介する．

項書き換えシステムでは，与えられた項からのリダクションの道筋は一通りとは限らない．項に適用可能な書き換え規則も，その規則を適用できる部分も一般には一意に決まらないからである．したがって，書き換え規則の適用順序の違いによって，何通りものリダクションの道筋が可能となる．たとえば，R_f における項 $(s(0)*0)+(s(0)+0)$ のリダクションは図 1 のようになる．

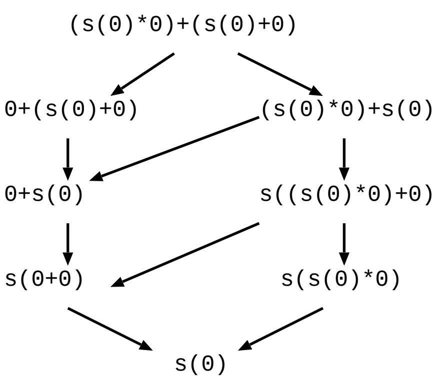

図 1 R_f のリダクション

この例では途中のリダクションの道筋とは関係なく，すべてのリダクションは唯一の正規形 $s(0)$ に合流している．一般の項書き換えシステムでは，このような合流性は必ずしも保証されていない．もし，図 1 のようにリダクションの合流性が常に保証されているならば，項書き換えシステムは合流性 (チャーチ・ロッサ性) をみたすという．正確に述べると，項書き換えシステムが合流性をみたすとは，任意の項 t をリダクションして項 s，r を得たならば，必ず s と r から合流できる項 p が存在することである (図 2)．

項書き換えシステムのリダクションが必ず停止するならば，項書き換えシステムは停止性 (強正規性) をみたすという．項書き換えシステムが合流性と停止性をみたすなら，完備 (complete) であるという．等式システム E から得られた完備な項書き換えシステム R は次の重要な性質をもつ [二木, 外山 1983, Dershowitz and Jouannaud 1988, Baader and Nipkow 1998]．

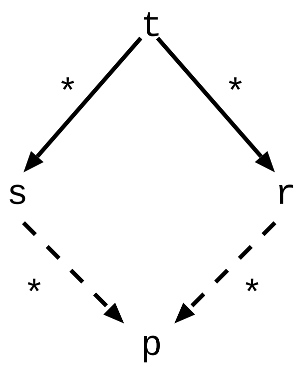

図 2 合流性

性質 1. 項 s の正規形 $s\downarrow$ は唯一に定まる．

性質 2. E のもとで等式 $s=t$ が成立する必要十分条件は，R のもとで $s\downarrow$ と $t\downarrow$ が一致することである．

性質 1 は，s の正規形 $s\downarrow$ が必ず存在し，どのようなリダクションで正規形を求めても $s\downarrow$ に一致することを保証している．つまり，非決定的な計算において，どのような計算で答えを求めても常に正しい答えが得られることを意味している．

性質 2 は，等式システムによる $s=t$ の証明がリダクションによる効率的な計算でおこなえることを意味している．すなわち，通常の証明が試行錯誤を繰り返しながら進むのに対して，合流性をみたす項書き換えシステムによる証明では s と t のリダクションのみを考えれば十分であり，試行錯誤はまったく不要になる．このことを少し詳しく説明しよう．

項書き換えシステム R が完備であるなら $s=t$ の証明は次のようにおこなえばよいことがわかる．まず， s と t にリダクションをおこない 正規形 $s\downarrow$，$t\downarrow$ を求める．ここで，R の停止性からそれぞれのリダクションは必ず止まり，性質 1 から正規形は一意に求まることに注意する．このとき，二つの項が同じ形をしていることを $\equiv$ で表すと，$s\downarrow\equiv t\downarrow$ ならば $s=t$ は成立し，$s\downarrow\not\equiv t\downarrow$ ならば $s=t$ は成立しないことがわかる．つまり，完備な項書き換えシステムが与えられると，等式 $s=t$ の証明問題は決定可能となる．

このように，与えられた等式システム E を項書き換えシステム R とみなしたときに，R が完備になっているならば等式証明問題は効率的に解くことができる．しかし，一般には等式を左から右への書き換え規則とみなすだけでは，完備な項書き換えシステムは得られない．そ

図 3 グラス列 SWB

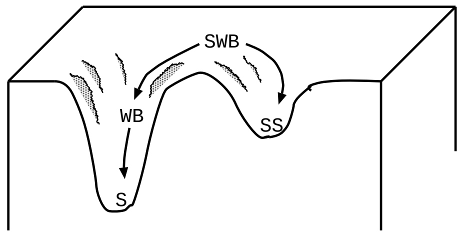

図 4 リダクションの発散

こで，等式システム E を論理的に等価なシステムに変形することにより，完備な書き換えシステムを構成する完備化手続きが広く利用されている．

4. 項書き換えシステムの完備化

まず，以下のパズルをもちいて完備化手続きの基本的なアイデアを説明する．

4·1 グラス置き換えパズル

酒のグラス S，ウィスキーのグラス W，ビールのグラス B が図３のように一列に並んでいる．このとき，次のグラスの置き換えシステム G によって，グラス列を置き換えることが許されるものとする．

$$G \quad \begin{cases} W \leftrightarrow SW \\ WB \leftrightarrow S \end{cases}$$

置き換え規則 $W \leftrightarrow SW$ は W を２個のグラスの並び SW に置き換えてもよいし，その逆に SW を１個のグラス W に置き換えてもよいことを示している．たとえば，最初に示したグラス列 SWB は以下のようにグラス列 WBWB に置き換えることができる．

$SWB \leftrightarrow SSWB \leftrightarrow WBSWB \leftrightarrow WBWB$

このときグラス列 SWB と WBWB は置き換え規則 G によってつなぐことができるという．それでは以下のグラス列はうまくつながるだろうか．

問題

(1) $SSWB \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow WBWB$?

(2) $SSSW \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow WBWB$?

この問題の難しさは，二つのグラス列をつなぐことが不可能な場合に，どうやってそれを示すかという点にある．もし，グラス列をつなぐことが可能ならば，試行錯誤を繰り返して答えを発見すればよい．しかし，不可能な場合には，すべての置き換えがグラス列をつなぐことに失敗することを示す必要がある．置き換え方法は無限にあるから，これらをすべて検査していては永久に答えは得られない．そこで，完備な書き換えシステムをもちいてこのパズルを解く方法を考えてみよう．

4·2 グラス置き換えパズルの完備化

グラス置き換え規則を方向付けてやることにより，G から停止性をもつ書き換えシステム R を以下のように構成してみよう．

$$R \quad \begin{cases} SW \rightarrow W \\ WB \rightarrow S \end{cases}$$

ここで，書き換えシステム R が完備となるならば前節で説明したように，二つのグラス列がつながるか否かという問題は，グラス列の正規形が一致するか否かという問題に還元できるので完全に解くことが可能となる．書き換えシステム R のリダクションは書き換えによってグラス列を短くして行くので，R が停止性をみたすことは明らかである．しかし，R は合流性をみたさない．グラス列 SWB が図４のように二つの正規形 S と SS をもち発散するからである．

それでは，R がグラス列 SWB に対して合流性をみたさない原因を考えてみよう．図４のリダクションでは二つの書き換え規則 $SW \rightarrow W$ と $WB \rightarrow S$ の適用が SWB で可能となっており，グラス W でそれぞれの書き換え規則の左辺は重なってる．したがって，一方の書き換え規則の適用は，そこに重なっている他方の書き換え規則の適用を不可能にしてしまい，その結果としてリダクションの合流性が破壊されてしまう．この例では，二つの規則の左辺の重なり SWB にそれぞれの規則を適用して WB と SS が得られ，さらに WB と SS が異なる正規形をもつことから合流性が壊されている．

以上のように，二つの書き換え規則に重なりがあると合流性は無条件に成立しないことがわかる．二つの規則の左辺の重なり SWB に対して，それぞれの規則を一回づつ適用して得られる値の対 $< WB, SS >$ を危険対という．危険対の要素をそれぞれリダクションして正規形を求めたとき，両者が一致するなら危険対は収束する，一致しないならば発散するという．つまり，R が合流しないのは危険対 $< WB, SS >$ が発散しているからである．二つの書き換え規則の重なりは存在したとしても有限であるから，項書き換えシステムが有限個の書き換え

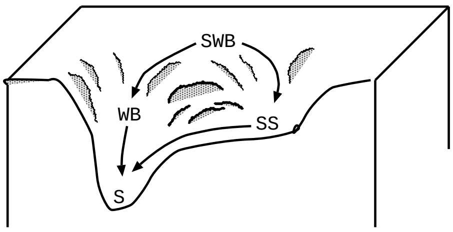

図 5 規則 $SS \to S$ の追加

規則しかもたないならば，その危険対も有限であることに注意する．ここで，以下の定理が知られている [Knuth and Bendix 1970].

定理 (Knuth-Bendix の合流条件). 停止性をみたす項書き換えシステム R が合流性 (つまり完備性) をもつための必要十分条件は，R のすべての危険対が収束することである．

したがって，書き換えシステム R を完備にするためには，論理的に等価な変形をおこなって，発散する危険対をうまく消してやればよい．発散する危険対 $< WB, SS >$ は正規形 S と SS をもつ．このとき，これを一つの正規形に収束させるために，新しい書き換え規則 $SS \to S$ を付け加えて，書き換えシステム R' をつくってみよう (図 5)．すると、書き換えシステム R' は以下のようになる．

$$R' \quad \begin{cases} SW \to W \\ WB \to S \\ SS \to S \end{cases}$$

ここで注意してほしいのは，新しく付け加えられた規則 $SS \to S$ は，もとの置き換え規則を組み合わせることによって以下のように G でシミュレーションできることことである．

$SS \leftrightarrow SWB \leftrightarrow WB \leftrightarrow S$

したがって，グラス置き換えパズルの本質は，付け加えられた規則によって変更されていない．つまり，書き換えシステム R のかわりに書き換えシステム R' のもとでパズルを解いてもよいことがわかる．ここで，新しく得られた R' の書き換え規則の重なりをチェックすると，すべての危険対が収束することを容易に示すことができる．したがって，R' は完備な書き換えシステムとなっている．

先ほどのグラス置き換え問題（1）と（2）は，完備な R' によるリダクションで簡単に解くことができる．問題 (1) は $SSWB\downarrow \equiv S \equiv WBWB\downarrow$ となるから，グラス列は置き換え規則 G でつなぐことができる．一方，問題 (2) は，$SSSW\downarrow \equiv W \not\equiv S \equiv WBWB\downarrow$ となるから，グラス列は G でつなぐことができない．

5. 完備化手続き

グラス置き換えパズルの例では，書き換えシステム R の発散する危険対から作られた書き換え規則を付け加えるだけで，完備な書き換えシステム R' を得ることができた．しかし，一般には新しい書き換え規則を付け加えることによって，発散する危険対が新たに生ずる可能性がある．したがって，このような場合には発散する危険対が完全になくなるまで，次々と新しい書き換え規則を付け加えていく必要がある．また，書き換え規則の両辺が他の規則によってリダクションできるのならば，両辺をリダクションして正規形にした方がシステムは単純になり，発散する危険対の生成も押えられる．このような点まで考慮した Kunuth-Bendix の完備化手続きを以下に示す．

完備化手続き [Knuth and Bendix 1970]

R は書き換え規則の有限集合，E は等式の有限集合，$>$ は停止性を保証する項上の順序とする．また，危険対 $\langle p, q\rangle$ を E の中では等式 $p = q$ で表す．

E が空でないならば以下を繰り返せ． E が空になれば完備化は**成功**.

(1) E から $s > t$ をみたす 等式 $s = t$ (あるいは $t = s$) をひとつ取り除く．もし，そのような等式がないなら完備化は**失敗**.

(2) 書き換え規則 $s \to t$ でリダクションできる R の書き換え規則をすべて E に移す.

(3) $s \to t$ と R によって生じたすべての危険対を E に付け加える.

(4) $s \to t$ を R に付け加える.

(5) R をもちいて R のすべての書き換え規則の右辺を正規形にする.

(6) R をもちいて E の等式の両辺をすべて正規形にする．両辺が一致した等式は E から取り除く.

ここで $>$ は停止性を保証するための適当な順序であり，R のすべての書き換え規則 $s \to t$ が $s > t$ をみたすなら R は停止性をみたすものとする．手続きは最初 R を空集合とし，適当な等式の集合 E を与えて実行を開始する．そして， E が空集合になれば完備化は成功し，完備な項書き換えシステム R が得られる．なお，この手続きはループを永久に回り続けて停止しない場合があることに注意する．

6. 群 の 完 備 化

完備化手続きをもちいて群を完備化した例を示そう [Knuth and Bendix 1970]．群の公理である左単位元の存在，左逆元の存在，結合律を等式システム E_{group} で表す．

$$E_{group} \quad \begin{cases} 1 * x = x \\ I(x) * x = 1 \\ (x * y) * z = x * (y * z) \end{cases}$$

ここで，完備化手続きを E_{group} に適用すると，最終的には以下の 10 個の規則からなる完備な項書き換えシステム R_{group} を得ることができる

$$R_{group} \quad \begin{cases} I(1) \to 1 \\ 1 * x \to x \\ x * 1 \to x \\ I(I(x)) \to x \\ I(x) * x \to 1 \\ x * I(x) \to 1 \\ I(x * y) \to I(y) * I(x) \\ (x * y) * z \to x * (y * z) \\ I(x) * (x * y) \to y \\ x * (I(x) * y) \to y \end{cases}$$

このとき，E_{group} のもとで等式 $s = t$ が成立するか否かという語の問題は， R_{group} によって完全に解くことができる．なぜなら，E_{group} のもとで等式 $s = t$ が成立することと，R_{group} のもとで $s\downarrow$ と $t\downarrow$ が一致することは等価となるからである．

7. 両方向ペトリネットの完備化

ペトリネットは１９６２年に Petori によって提案されたイベント駆動型システムのモデルで，並行プロセスの記述などに広く利用されている．ここでは，ペトリネットを変形した両方向ペトリネットの到達可能性問題が完備化によって解けることを示す．

両方向ペトリネットの発火動作を図６に示す．トランジション A の左に結合しているプレース a と b に，A とプレースを結ぶアークの個数以上のトークンが存在すれば，A は左から右へ発火可能である．ここで A が左から右へ発火すると，A の左に結合しているプレース a と b から，A とプレースを結ぶアークの個数だけトークンを取り除き，A の右に結合している各プレース c と d に，A とプレースを結ぶアークの個数だけトークンを増加させる．右から左への発火も同様に定めることができる．ここで，通常のペトリネットではアークが方向付けられているのに対し，両方向ペトリネットではアークが両方向に利用できることに注意する．

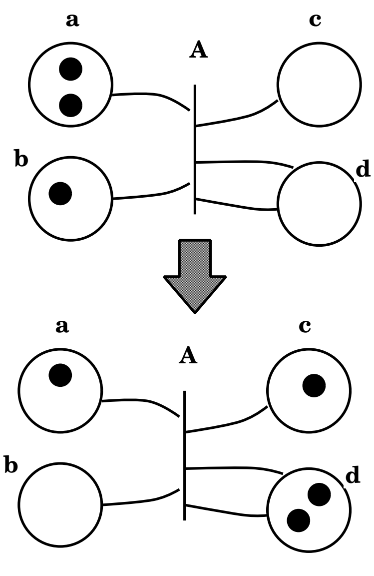

図 6 トランジッション A の左から右への発火

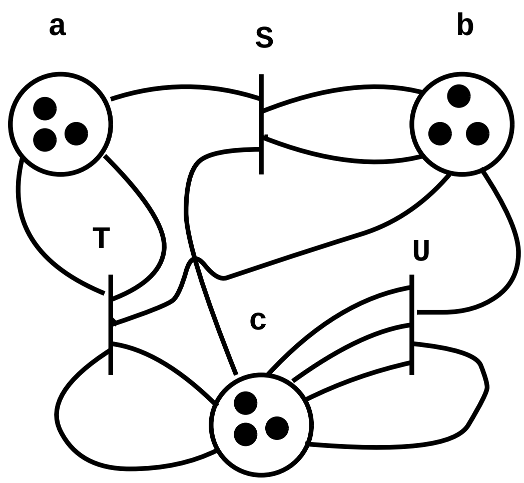

図 7 両方向ペトリネットの到達可能性問題

両方向ペトリネットのプレース a に３個のトークンが存在する状態を a^3 で表すことにする．したがって，図７の両方向ペトリネットの状態は $a^3b^3c^3$ となる．このとき，トランジション S，T，U を適当な順序で右から左あるいは左から右へ発火させることにより状態 abc へ到達可能か否かという到達可能性問題を考える．

まず，図７の両方向ペトリネットを等式システム E_{petri} で表す．ここで，等式 $ac = b^2$ はトランジション S が右から左あるいは左から右へ発火したときの各プレース上のトークンの個数の変化を表現している．

$$E_{petri} \quad \begin{cases} ac = b^2 \quad (S) \\ ac = abc \quad (T) \\ c^3 = bc \quad (U) \\ ab = ba \\ bc = cb \\ ac = ca \end{cases}$$

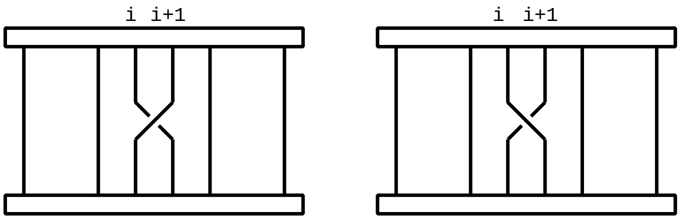

図 8　組ひもの構成要素

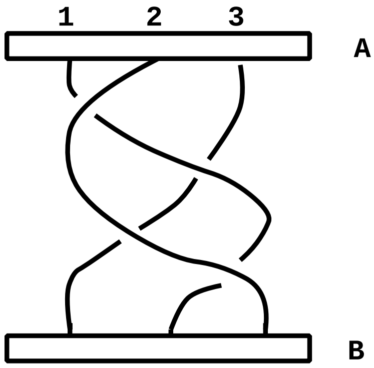

図 9　Dirac の組ひも問題

このとき，完備化手続きを E_{petri} に適用すると以下の完備な項書き換えシステム R_{petri} が得られる．

$$R_{petri}\quad\begin{cases} c^7 \to c^5 \\ b^2 \to c^6 \\ cb \to c^3 \\ bc \to c^3 \\ ab \to ba \\ ca \to c^6 \\ ac \to c^6 \end{cases}$$

したがって，両方向ペトリネットの状態 $a^3b^3c^3$ から状態 abc への到達可能は，R_{petri} のもとで $a^3b^3c^3\downarrow$ と $abc\downarrow$ が一致するか否かを判定すればよい．実際，$a^3b^3c^3 \xrightarrow{*} c^6$ かつ $abc \xrightarrow{*} c^6$ となり両者の正規形は一致するので到達可能である．

8. 組ひも問題の完備化

完備化手続きによって組ひも問題が簡単に解けることを示す．完備化にもとづく等式証明は，組ひも問題のような３次元トポロジーの問題に対して従来あまり適用されていなかった．しかし，以下で示されるように，完備化はこのようなトポロジーの問題に対しても極めて有効である．

組ひも群 (The Braid Group)[河野 1993] は、構成要素 σ_i (図８ (1)) と σ_i^{-1} (図８ (2)) $(i=1,\cdots,n)$ の積構造でつくられる群であり、組ひも関係式 $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ $(0<i<n)$ および $\sigma_j\sigma_i{=}\sigma_i\sigma_j$ $(|i-j|>1)$ をみたす．ここで、単位元 e はまっすぐなひもからなる組ひもである．

次に、図９ のように３本の組ひもの片方を A に固定し、もう一方の端に木片 B を取り付ける．ここで、木片 B を裏返さずにひもの間をくぐらせる基本操作のみで、まっすぐな組ひも (つまり単位元 e) にもどせるか否かを決定する問題を、Dirac の組ひも問題という [河野 1993].

項書き換えシステムの完備化をもちいて Dirac の組ひも問題を解くためには、まず 8 通りの基本操作と組ひも群の公理を等式システム E_D で以下のように表す.

$$\begin{cases} ((\sigma_1\sigma_2)\sigma_2)\sigma_1 = e, & ((\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1})\sigma_2^{-1})\sigma_1^{-1} = e \\ ((\sigma_2\sigma_1)\sigma_1)\sigma_2 = e, & ((\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1})\sigma_1^{-1})\sigma_2^{-1} = e \\ ((\sigma_1\sigma_1)\sigma_2)\sigma_2 = e, & ((\sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1})\sigma_2^{-1})\sigma_2^{-1} = e \\ ((\sigma_2\sigma_2)\sigma_1)\sigma_1 = e, & ((\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1})\sigma_1^{-1})\sigma_1^{-1} = e \\ \sigma_1^{-1}\sigma_1 = e, & \sigma_1\sigma_1^{-1} = e \\ \sigma_2^{-1}\sigma_2 = e, & \sigma_2\sigma_2^{-1} = e \\ (\sigma_1\sigma_2)\sigma_1 = (\sigma_2\sigma_1)\sigma_2, & ex = x \\ xe = x, & (xy)z = x(yz) \end{cases}$$

このとき、E_D に対して完備化手続きを適用すると１９個の書き換え規則からなる完備な項書き換えシステム R_D が得られ，Dirac の組ひも問題は決定可能となる [外山 1997].

9. 失敗無し完備化

完備化手続きにおいて，与えられた等式システム E の等式 $s=t$ (あるいは $t=s$) から書き換え規則 $s\to t$ を得るためには，停止性を保証するための適当な順序 $>$ のもとで $s>t$ をみたす必要がある．もし，どの等式も順序 $>$ のもとで向き付けができないなら完備化手続きは失敗する．しかし，等式そのものは向き付けが不可能であっても，実際の書き換えの適用においては向き付けができる場合がある．

例えば，関数 f に関する交換律 $f(x,y)=f(y,x)$ を考える．この等式に対して停止性を保証できる向き付けは存在しない．しかし，$2>1$ のとき，値 1 と 2 を変数 x と y へ代入することで得られた等式 $f(2,1)=f(1,2)$ は，f の引数の辞書式順序をもちいることにより $f(2,1)\to f(1,2)$ と向き付けることが可能となる．

つまり，$f(x,y)=f(y,x)$ を両方向に使える可能性のある書き換え規則とみなし，適当な代入で停止性が保証される向き付けが得られた場合のみ，この等式を向き付けられた書き換え規則として適用してリダクションを行うことにする．したがって，$4>3>2>1$ ならば $f(f(4,3),f(2,1)) \xrightarrow{*} f(f(1,2),f(3,4))$ なるリダクションが得られることになる．

このように，向き付けできない等式も両方向に使える書き換え規則とみなして完備化を行うと，等式の向き付けができなくて完備化が失敗することはなくなる．この方法で完備化を拡張したものが失敗無し完備化 (unfailing completion) あるいは無向完備化である [Bachmair, etc. 1989].

失敗無し完備化手続きでは失敗して手続きが停止することはない．しかし，手続きが停止せずに永久に走りつづける可能性は依然残っている．この場合にも，失敗無し完備化が生成し続ける書き換え規則をもちいて，s と t の合流性判定を完備化と並行して行うと，等式 $s = t$ に関して完全な証明システムが得られる．このため，自動証明システムの等式証明法として失敗無し完備化手続きも広くもちいられている．

10. 実際の証明システム

実際の自動証明システムでは，完備化以外にもさまざまな等式証明の技術が組み込まれている．例えば，結合律や交換律のような特別な等式規則の効率的処理，スコーレム化による反駁証明法，書き換えシステムの停止性自動判定，潜在帰納法や書き換え帰納法をもちいた帰納的定理の自動証明法などは広く使われている証明技術である．また，多くのシステムでは等式論理のみではなく 1 階述語論理や高階述語論理の取り扱いも可能である．書き換えに基づく自動証明システムの実例のいくつかは以下の項書き換えシステムのホームページから参照できる．

http://www.loria.fr/ vigneron/RewritingHP/

11. お わ り に

項書き換えシステムの重要な性質である完備性と，その自動証明への応用である完備化手続きについて説明した．1980 年代になって本格的に開始された項書き換えシステムの研究は，今日では定理自動証明の重要な手法のひとつとして広く定着し，多くの研究成果が蓄積されつつある．しかし，これまでの項書き換えシステムの研究は理論中心であり，その研究成果が現実の問題解決に十分に活用されているとは言いがたい．本解説が，多くの現実問題に適用される契機となることを願っている．

なお，ここで紹介した話は項書き換えシステムの理論と応用のごく一部に過ぎない．項書き換えシステムについてさらに深く勉強したい読者には，現時点では最適な教科書として [Baader and Nipkow 1998] を推薦する．要点が簡潔にまとまられた日本語の文献としては [二木, 外山 1983] と [坂井 1987]，本格的な概説論文としては [Dershowitz and Jouannaud 1988] の翻訳がある．また，[井田 1991] の 6 章も項書き換えシステムの入門である．

謝　辞

草稿に関して貴重なコメントをいただきました山梨大学の岩沼 宏治 氏と国立情報学研究所の佐藤 建 氏に感謝いたします．ここで紹介したさまざまな完備化の例は，外山研究室のセミナーや実験等の課題として数年間にわたり取り上げてきたものです．実験に協力いただいた草刈 圭一朗 助手ならびに学生のみなさんに感謝します．

◇ 参 考 文 献 ◇

[Baader and Nipkow 1998] F. Baader and T. Nipkow, Term Rewriting and All That, Cambridge University Press, 1998.
[Bachmair, etc. 1989] L. Bachmair, N. Dershowitz, and D. Plaisted, Completion without failure, in: H. Aït-Kaci and M. Nivat, ed., *Resolution of equations in algebraic structures* Vol.2, (Academic Press, 1989) 1-30.
[二木, 外山 1983] 二木厚吉, 外山芳人, 項書き換え型計算モデルとその応用, 情報処理学会誌 24 (2) (1983) 133-146.
[井田 1991] 井田哲雄, 計算モデルの基礎理論 (岩波書店, 1991).
[Dershowitz and Jouannaud 1988] N. Dershowitz and J. P. Jouannaud, Rewrite Systems, in: J. V. Leeuwen, ed., *Handbook of Theoretical Computer Science B* (North-Holland, 1990) 244-320 (稲垣康善, 直井徹 訳, 書換え系: 廣瀬, 野崎, 小林 監訳, コンピュータ基礎理論ハンドブック II (丸善 1994) 244-321).
[河野 1993] 河野俊丈, 組みひもの数理 (遊星社, 1993).
[Knuth and Bendix 1970] D. E. Knuth and P. G. Bendix, Simple word problems in universal algebras, in: J. Leech, ed., *Computational problems in abstract algebra* (Pergamon Press, 1970) 263-297.
[坂井 1987] 坂井公, Knuth-Bendix の完備化手続きとその応用, コンピュータソフトウェア 4 (1) (1987) 2-22.
[外山 1997] 外山芳人、定理自動証明による組ひもパズルの解法、第 31 回 MLG 研究集会報告集 (1997-11) 16-18.

〔担当委員：××○○〕

19YY 年 MM 月 DD 日　受理

著 者 紹 介

外山　芳人

1952 年生．1977 年 東北大学大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了．同年 日本電信電話公社 (現 NTT) 武蔵野電気通信研究所 入所．1993 年 北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 教授．2000 年より東北大学 電気通信研究所 教授．この間，プログラム理論，定理自動証明の基礎研究に従事．電子情報通信学会，情報処理学会，ソフトウェア科学会，ACM，EATCS 各会員．