日本ソフトウェア科学会第 39 回大会 (2022 年度) 講演論文集

正則項書き換えにおける書き換えステップの決定可能性について

望月 美希　青戸 等人

通常の論理や代数において用いられる項はラベル付きの有限木によって表現される．一方，無限木によって表現される無限項のうち有限個の部分項しかもたないものを正則項とよぶ．正則項を対象とした計算モデルとして正則項書き換えが提案されている．正則項上の項書き換えは対応する有限表現の書き換えによって実現され，それは正則集合として与えられる複数の位置において並列に書き換えることに対応する．正則項と書き換え規則と書き換え位置の正則集合が与えられたときに，書き換えを行う手続きが与えられている (Aoto&Ketema，2012)．一方，正則項 s, t と書き換え規則 R が与えられたときに，s から t へ書き換えられるかという問題は決定可能かどうか知られていない．本発表では，書き換え規則 R として木の形を変形しないような単純な規則について s から t へ書き換えられるかを判定する手続きを与え，その正しさを証明する．

1　はじめに

通常の論理や代数において用いられる項はラベル付きの有限木によって表現される．一方，無限木によって表現される無限項のうち有限個の部分項しか持たない項を正則項という．無限項をコンピュータで扱うのは困難だが，正則項は等式集合等を用いて有限データで表すことが可能なため，コンピュータで扱うことも容易である．このため，正則項についてはさまざまな性質が調べられてきた．([4], [5] など)

項書き換えシステムは，等式論理に基づく計算モデルであり，通常は有限項を対象としている ([7], [2])．しかし，無限項を対象とした無限書き換えも重要な研究分野となっている ([6])．正則項を対象とした正則項書き換えについては，基本的な性質が調べられている ([1], [3] など)．正則項上の項書き換えは対応する有限表現の書き換えによって実現され，それは正則集合として与えられる複数の位置において並列に書き換えることに対応する．正則項と書き換え規則と書き換え位置の正則集合が与えられたときに，書き換えを行う手続きが与えられている [1]．

本稿では，書き換え規則 R は木の形を変形しないような単純な規則とし，二つの正則項 s, t と R が与えられたとき，s から t へ書き換えられるかを判定する手続きを与え，その正しさを証明する．

以降の構成を説明する．第 2 節では正則項と正則項書き換えシステムについて説明する．第 3 節ではカノニカルシステムから有限オートマトンの構成について説明し，その性質を示す．第 4 節で，正則項書き換えシステムの決定手続きを与え，その正しさを証明する．第 5 節は結論および今後の課題を挙げる．

2　準備

本稿で用いられる記法を紹介する．ここで用いる定義や記法は，主に文献 [1] に従う．

2.1　有限オートマトン

空列を ϵ で表し，有限列 $p, q \in \Sigma^*$ の連結を $p.q$ と表す．決定性有限オートマトン (DFA) を $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ と記す．ここで Q は状態集合，

On the Decidability of Rewriting Steps in Rational Term Rewriting

Miki Mochizuki, 新潟大学大学院自然科学研究科, Graduate School of Science and Technology, Niigata University.

Takahito Aoto, 新潟大学自然科学系, Institute of Science and Technology, Niigata University.

Σ は入力アルファベット，$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ は遷移関数，q_0 は開始状態，$F \subseteq Q$ は受理状態の集合を表す．このとき $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$ は下のように定義される．

$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} q & (w = \epsilon) \\ \hat{\delta}(\delta(q, x), w') & (w = xw', x \in \Sigma) \end{cases}$$

$L(M, q_i)$ を以下を満たす最小の集合とする．

1. $\epsilon \in L(M, q_0)$.
2. $p \in L(M, q), \delta(q, a) = q_i$ ならば，$p.a \in L(M, q_i)$.

最後に，$L(M) = \bigcup_{q_i \in F} L(M, q_i)$ とおく．容易に示されるように，$p \in L(M)$ と $\hat{\delta}(q_0, p) \in F$ は同値である．また，$\hat{\delta}(q, uv) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, u), v)$ が成立する．

2.2 正則項

関数記号の有限集合を F，変数の集合を V とし，$F \cap V = \emptyset$ とする．ここで，各関数記号 $f \in F$ の引数の個数は決まっているものとし，この数を $arity(f)$ とする．$arity(f) = n$ の関数記号の集合を F_n とする．$\mathbb{N}_+$ を正の自然数の集合とし，その有限列の集合 $\mathbb{N}_+^*$ と表す．$arity(f) = 0$ である関数記号 f を定数とよび，$arity(f) = n$ である関数記号の集合を F_n とかく．F は有限集合であるから，任意の $f \in F$ に対して $arity(f) \leq n$ を満たすと仮定する．

$\mathbb{N}_+$ を正の自然数の集合とし，その有限列の集合を ${\mathbb{N}_+}^*$ と表す．${\mathbb{N}_+}^*$ から $F \cup V$ への部分関数 t のうち，$t(\epsilon)$ が定義されており，かつ，$t(p.i)(i \in \mathbb{N})$ が定義されているとき，かつそのときに限り，ある n について，$t(p) \in F_n$ かつ $1 \leq i \leq n$ となるものを無限項という．

F と V からなる無限項の集合を $T_{inf}(F, V)$ と記す．以下では，無限項を項とよぶ．t の定義域を項 t の位置の集合とよび，$Pos(t)$ で表す．特に，位置 ϵ を根位置とよぶ．$Pos(t)$ が有限集合のとき，項 t を有限項とよぶ．有限項全体の集合を $T_{fin}(F, V)$ と記す．$t(p)$ を項 t の位置 p にある記号とよぶ．項 t に出現する変数の集合を $V(t)$ で表す．位置 p の部分項 $t|_p$ を $t|_p(q) = t(p.q)$ により定義する．

関数 $\sigma : V \to T_{inf}(F, V)$ を代入とよぶ．このときの σ の定義域 $\{x \mid \sigma(x) \neq x\}$ を $dom(\sigma)$ と記す．ここで，項 t に対して，代入 σ を行った結果を $\sigma(t)$ と表す．簡単のために，$\sigma(t)$ を $t\sigma$ と記す場合もある．項 $t \in T_{inf}(F, V)$ が有限の異なる部分項しか持たないとき，すなわち，項 t の部分項集合 $\{t|_p \mid p \in Pos(t)\}$ が有限集合であるとき，項 t を正則項とよぶ．

等式の有限集合 $E = \{x_1 = t_1, \ldots, x_n = t_n\}$ が正則システムであるとは，$x_1, \ldots, x_n \in V$ が互いに異なる変数であり，かつ，任意の $1 \leq i \leq n$ について，$t_i \in T_{fin}(F, V)$ であるときをいう．変数集合 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ を $Dom(E)$ と表し，項集合 $t_1, \ldots, t_n$ を $Ran(E)$ と表す．また，$y = t \in E$ のとき，$E(y) = t$ と表す．変数 $x_i \in Dom(E)$ がループであるとは，列 $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$ が存在し，$x_i = t_{i_1}$ かつ任意の $1 \leq j \leq k$ について，$t_{i_j} = x_{i_{(j \bmod k)+1}}$ であるときをいう．変数 x_i が非ループであるとは，このような列が存在しないときをいう．新しい定数 $\perp$ を加えた関数記号集合を $F_\perp$ で表す．このとき，変数 $x_i \in Dom(E)$ における $E^*(x_i)$ を以下のように定義する．

$$E^*(x_i)(p) = \begin{cases} t_i(p) & (p \in Pos(t_i) \text{ かつ } t_i(p) \notin Dom(E) \text{ のとき}) \\ \perp & (t_i(p) = x_j \in Dom(E) \text{ かつ } x_j \text{がループ変数のとき}) \\ E^*(x_j)(q) & (p = p'.q \text{ について } t_i(p') = x_j \in Dom(E) \text{ かつ } x_j \text{が非ループ変数のとき}) \\ \text{未定義} & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

正則項 $E^*(x) = t$ について，単に $\langle E, x \rangle$ や E_x と表し，これらを項 t の表現とよぶ．以降，F は定数 $\perp$ を含むものとし，E はループ変数を含まないものとする．

正則システム $E = \{x_1 = t_1, \ldots, x_n = t_n\}$ がカノニカルであるとは，E が以下を満たすときをいう．
任意の $1 \leq i \leq n$ について，

1. $t_i \in V \setminus Dom(E)$ あるいは
2. $f \in F$ と $y_1, \ldots, y_m \in Dom(E)$ が存在して，$t_i = f(y_1, \ldots, y_m)$

任意の正則システム E について，等価な (つまり，任

意の $x \in Dom(E)$ に対して $E^*(x) = F^*(x)$) カノニカルな正則システム F が構成できる．$F^*(x) = s$ であるとき，カノニカルな正則システム F を項 s のカノニカル表現という．任意のカノニカル正則システムには $x_\perp = \perp(x_\perp, \ldots, x_\perp)$ が含まれているとする．このとき，任意の $f \in F$ について $arity(f) = n$ とし，$t = f(t_1, \ldots, t_l) \quad (l \leq n)$ を $t' = f(t_1, \ldots, t_l, x_\perp, \ldots, x_\perp)$ と変更し，$z \in V \setminus Dom(E)$ の各等式 $x = z \in E$ を等式 $x = z(x_\perp, \ldots, x_\perp)$ と変更する．このような変更を加えてもカノニカルであることは変わらない．以降では任意の $x = t \in E$ について，$t = \alpha(x_1, \ldots, x_n) \quad (\alpha \in F \cup (V \setminus Dom(E)), x_1, \ldots, x_n \in Dom(E)$ と仮定する．以降，カノニカルな正則システムを単にカノニカルシステムとよぶ．

2.3 正則項書き換え

書き換え規則は $l \to r$ と記し，これは有限項の対 (l, r) であり，$l \notin V, V(l) \supseteq V(r)$ を満たす．s と t を正則項とし，$l \to r$ を書き換え規則とする．以下の条件を満たすとき項 s は項 t に書き換えられるという．

1. 正則項 s, t の表現 E_x，F_x がそれぞれ存在し，$Dom(E) = Dom(F)$.
2. ある $W \subseteq Dom(E)$ が存在し，
   (a) 任意の $y \in Dom(E) \setminus W$ について，$E(y) = F(y)$.
   (b) 任意の $y \in W$ について，代入 μ が存在し，$E(y) = l\mu$ かつ $F(y) = r\mu$.

このとき，$s \to t$ と記し，$s \to t$ を正則項書き換えとよぶ．書き換え規則の有限集合を項書き換えシステムとよび，$l \to r \in R$ による書き換えを $s \underset{R}{\to} t$ と記す．

補題 2.1. s, t を正則項とし，書き換え規則 $R = \{f(x_1, \ldots, x_n) \to g(x_1, \ldots, x_n)\}$ によって $s \underset{R}{\to} t$ と書き換えられるとする．任意の $p \in \{1, \ldots, n\}^*, r \in F$ について以下が成立する．

(1) $s(p) = r, r \neq f$ ならば $t(p) = r$.

(2) $t(p) = r, r \neq g$ ならば $s(p) = r$.

(証明) $s \underset{R}{\to} t$ より，あるカノニカルシステム E, F が存在し，$s = E^*(x), t = F^*(x), Dom(E) = Dom(F)$ を満たす．また，ある $W \subseteq Dom(E)$ が存在し，任意の $y = r(y_1, \ldots, y_n) \in E, y = r'(y'_1, \ldots, y'_n) \in F$ が以下を満たす．

- $y \in W$ ならば，$r = f$ かつ $r' = g$ $\qquad \cdots (*)$
- $y \notin W$ ならば，$r = r'$ $\qquad \cdots (**)$
- $y_1 = y'_1, \ldots, y_n = y'_n$ $\qquad \cdots (***)$

p に関する帰納法で，任意の $y \in Dom(E)$ について

(1) $E^*(y)(p) = r, r \neq f$ ならば $F^*(y)(p) = r$

(2) $F^*(y)(p) = r', r' \neq g$ ならば $E^*(y)(p) = r'$

が成立することを示す．

$p = \epsilon$ の場合．(1) 定義より，$r = E^*(y)(\epsilon) = E(y)(\epsilon)$. $r \neq f$ なので，$(*)$ より，$y \notin W$．したがって，$(**)$ より $r = E(y)(\epsilon) = F(y)(\epsilon) = F^*(y)(\epsilon)$.

(2) 定義より，$r' = F^*(y)(\epsilon) = F(y)(\epsilon)$．$r' \neq g$ なので，$(*)$ より，$y \notin W$．したがって，$(**)$ より $r' = F(y)(\epsilon) = E(y)(\epsilon) = E^*(y)(\epsilon)$.

$p = jp'$ の場合．(1) 定義より，$r = E^*(y)(p) = E^*(E(y)|_j)(p')$．$r \neq f$ であるから，E がカノニカルであることと帰納法の仮定により $F^*(E(y)|_i)(p') = r$. 一方，$(***)$ より，$E(y)|_i = F(y)|_i$．したがって，$F^*(y)(p) = F^*(F(y)|_j) = F^*(E(y)|_j) = r$.

(2) 定義より，$r' = F^*(y)(p) = F^*(E(y)|_j)(p')$. $r' \neq g$ であるから，F がカノニカルであることと帰納法の仮定により $E^*(F(y)|_i)(p') = r'$．一方，$(***)$ より，$F(y)|_i = E(y)|_i$．したがって，$E^*(y)(p) = E^*(E(y)|_j)(p') = E^*(F(y)|_j)(p') = r'$.
□

2.4 正則システムの直積

E, F をそれぞれカノニカルシステムとする．このとき，E と F の直積を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
E \times F = \{ & \langle x, y \rangle = \langle r, r' \rangle (\langle x_1, y_1 \rangle, \ldots, \langle x_n, y_n \rangle) \\
& \mid x = r(x_1, \ldots, x_n) \in E \\
& \quad \text{かつ } y = r'(y_1, \ldots, y_n) \in F \}
\end{aligned}
$$

変数の対 $\langle x, y \rangle$ を変数とみなすことで $E \times F$ をカノニカルシステムとして扱う．

$i \in \{1, 2\}$ とする．このとき，π_i を以下のように定

義する．

$\pi_i(\langle x, y\rangle = \langle r, r'\rangle(\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle)) =$

$$\begin{cases} (\langle x, y\rangle = r(\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle)) & (i = 1) \\ (\langle x, y\rangle = r'(\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle)) & (i = 2) \end{cases}$$

$\pi_i(E) = \{\pi_i(x = t) \mid x = t \in E\}$

このとき，$\tilde{E} = \pi_1(E \times F), \tilde{F} = \pi_2(E \times F)$ とすると，

$$\tilde{E}^*(\langle x, y\rangle) = E^*(x),$$
$$\tilde{F}^*(\langle x, y\rangle) = F^*(y),$$
$$Dom(\tilde{E}) = Dom(\tilde{F})$$

が成立する．

補題 2.2. E, F をカノニカルシステムとする．任意の $x \in Dom(E)$ と $y \in Dom(F)$ について，$(E \times F)^*(\langle x, y\rangle)(p) = \langle r_1, r_2\rangle$ ならば，$(\pi_i(E \times F))^*(\langle x, y\rangle)(p) = r_i$ である．

(証明)p に関する帰納法で示す．

$p = \epsilon$ のとき．$(E \times F)^*(\langle x, y\rangle)(\epsilon) = (E \times F)(\langle x, y\rangle)(\epsilon) = \langle r_1, r_2\rangle$．このときある $x_1, \ldots, x_n \in Dom(E), y_1, \ldots, y_n \in Dom(F)$ に対して，$\langle x, y\rangle = \langle r_1, r_2\rangle(\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle) \in E \times F$．定義より，$(\langle x, y\rangle = r_1(\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle)) \in \pi_1(E \times F)$，$(\langle x, y\rangle = r_2(\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle)) \in \pi_2(E \times F)$．よって，$(\pi_i(E \times F))^*(\langle x, y\rangle)(\epsilon) = (\pi_i(E \times F))(\langle x, y\rangle)(\epsilon) = r_i$．

$p = jp'$ のとき．$(E \times F)^*(\langle x, y\rangle)(jp') = (E \times F)^*((E \times F)(\langle x, y\rangle)|_j)(p') = \langle r_1, r_2\rangle$．ここで，$\langle x, y\rangle = \langle r, r'\rangle(\langle x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle x_n, y_n\rangle) \in E \times F$ とすると $((E \times F)\langle x, y\rangle)|_j = \langle x_j, y_j\rangle$．よって，$(E \times F)^*(\langle x_j, y_j\rangle)(p') = \langle r_1, r_2\rangle$．帰納法の仮定より，任意の $x \in Dom(E), y \in Dom(F)$ について，$(E \times F)^*(\langle x, y\rangle)(p') = \langle r_1, r_2\rangle$ ならば，$(\pi_i(E \times F))^*(\langle x, y\rangle)(p') = r_i$．したがって，$\langle x, y\rangle := \langle x_j, y_j\rangle$ ととることで，$(E \times F)^*(\langle x_j, y_j\rangle)(p') = \langle r_1, r_2\rangle$ より，$(\pi_i(E \times F))^*(\langle x_j, y_j\rangle)(p') = r_i$ が成り立つ．よって，$(\pi_i(E \times F))^*(\langle x, y\rangle)(p) = (\pi_i(E \times F))^*(\langle x_j, y_j\rangle)(p') = r_i$． □

3 有限オートマトンを用いた正則システムの実現

本節ではカノニカルシステムから構成した有限オートマトンとその性質を示す．

定義 3.1. E をカノニカルシステムとする．E を使って有限オートマトンを以下のように定義する．

1. $\delta_E : Dom(E) \times \{1, \ldots, n\} \to Dom(E)$ を以下のように定義する．
$$\delta_E(z, i) = E(z) \mid_i$$
2. $f \in F$ について，集合 $F_{E,f} \subseteq Dom(E)$ を以下のように定義する．
$$F_{E,f} = \{y \in Dom(E) \mid E(y)(\epsilon) = f\}.$$
3. $f \in F, x \in Dom(E)$ とする．このとき $M(E_x, f)$ を以下のように定義する．
$M(E_x, f) = \langle Dom(E), \{1, \ldots, n\}, \delta_E, x, F_{E,f}\rangle$
容易に確認できるように，このとき，$M(E_x, f)$ は DFA となる．
4. $M(E_x, f)$ の言語を $L(E_x, f)$ と書く．

補題 3.2. E をカノニカルシステム，$f \in F$ とする．任意の $p \in \{1, \ldots, n\}^*$，任意の $x \in Dom(E)$ について，$\hat{\delta}_E(x, p) \in F_{E,f}$ と $E^*(x)(p) = f$ は同値である．

(証明)(⇒) p に関する帰納法で示す．

$p = \epsilon$ のとき．定義より，$\hat{\delta}_E(x, p) = x$．このとき，$x \in F_{E,f}$ ならば $E(x)(\epsilon) = f$．よって，$E^*(x)(p) = f$

$p = jp'$ のとき．$\hat{\delta}_E(x, p) \in F_{E,f}$ と仮定する．定義より，$\hat{\delta}_E(x, p) = \hat{\delta}_E(x, jp') = \hat{\delta}_E(\delta_E(x, j), p')$．よって，$\hat{\delta}_E(\delta_E(x, j), p') \in F_{E,f}$．このとき，$|p'| < |p|$ なので，帰納法の仮定より，$z \in Dom(E)$ について $\hat{\delta}_E(z, p') \in F_{E,f}$ ならば $E^*(z)(p') = f$ が成り立つ．定義より，$\delta_E(x, j) = E(x)|_j \in Dom(E)$．$z := E(x)|_j$ ととることで，$E^*(E(x)|_j)(p') = f$ が成立する．定義より，$E^*(x)(jp') = E^*(E(x)|_j)(p')$．よって $E^*(x)(p) = f$．これらより，$\hat{\delta}_E(x, p) \in F_{E,f}$ ならば，$E^*(x)(p) = f$ が成立する．

(⇐) p に関する帰納法で示す．

$p = \epsilon$ のとき．$E(x)(\epsilon) = f$ となる．つまり，正則システムの定義より，$x \in F_{E,f}$．ここで，$\hat{\delta}_E(x, \epsilon) = x$ より，$\hat{\delta}_E(x, p) \in F_{E,f}$．

$p = jp'$ のとき．$E^*(x)(p) = f$ と仮定する．このとき，$y = E(x)|_j$ とおくと，$E^*(y)(p') = E^*(x)(j \cdot p') = f$．$|p'| < |p|$ なので，帰納法の仮定より，任意の $z \in Dom(E)$ について $E^*(z)(p') = f$ ならば，$\hat{\delta}_E(z, p') \in F_{E,f}$．したがって，$E^*(y)(p') = f$ より，

$\hat{\delta}_E(y,p') \in F_{E,f}$ が成り立つ．また，$E(x)|_j = y$ より，$\hat{\delta}_E(x,jp') = \hat{\delta}_E(E(x)|_j,p') = \hat{\delta}_E(y,p') \in F_{E,f}$．よって $\hat{\delta}_E(x,p) \in F_{E,f}$． □

補題 3.3. E をカノニカルシステムとし，s を $s = E^*(x)$ で表すことができる正則項とする．このとき，任意の位置 p と，$r \in F$ について，$s(p) = r$ と $p \in L(E_x, r)$ は同値である．

(証明) ($\Rightarrow$) $s(p) = r$ より，$E^*(x)(p) = r$．よって，補題 3.2 より，$\hat{\sigma}_E(x,p) = F_{E,r}$．したがって，オートマトンの定義より，$p \in L(E_x, r)$．

($\Leftarrow$) $p \in L(E_x, r)$ より，$\hat{\delta}_E(x,p) \in F_{E,r}$．よって，補題 3.2 より，$E^*(x)(p) = r$．したがって，正則項の定義より，$s(p) = r$． □

補題 3.4. E をカノニカルシステムとし，s を $s = E^*(x)$ で表すことができる正則項とする．このとき任意の $r, r' \in F(s) \cup V(s)$ について，$r \neq r'$ と $(E_x, r) \cap (E_x, r') = \emptyset$ は同値である．

(証明) ($\Rightarrow$) 対偶を示す．$p \in L(E_x, r)$ かつ $p \in L(E_x, r')$ を満たすある $p \in \{1, \ldots, n\}^*$ が存在するとする．このとき，補題 3.3 より，$E^*(x)(p) = r$ かつ $E^*(x)(p) = r'$．つまり，$r = r'$ である．

($\Leftarrow$) $r = r'$ とする．このとき，$L(E_x, r) = L(E_x, r')$．よって，$L(E_x, r) \cap L(E_x, r') = \emptyset$ とすると，$L(E_x, r) = L(E_x, r') = \emptyset$．$E^*(x) = s$ と補題 3.3 より $s(p) = r$ となる任意の p が存在しないことになるが，これは，$r, r' \in F(s)$ に矛盾する． □

定義 3.5. E, F をカノニカルシステム，$x \in Dom(E), y \in Dom(F)$ とする．このとき，以下のように定義する．

$$\tilde{D}[x,y] := \{\hat{\delta}_{(E\times F)}(\langle x,y\rangle, p) \mid p \in \{1,\ldots,n\}^*\}$$
$$\widetilde{E \times F}[x,y] := \{(\langle x',y'\rangle = t) \in E \times F \mid \langle x',y'\rangle \in \tilde{D}[x,y]\}$$

補題 3.6. E, F をカノニカルシステム，$x \in Dom(E), y \in Dom(F)$ とするとき，$\widetilde{E \times F}[x,y]$ はカノニカルシステムである．

(証明) $\langle x',y'\rangle = \langle r,r'\rangle(\langle x_1,y_1\rangle, \ldots, \langle x_n,y_n\rangle) \in E \times F$ かつ，$\langle x',y'\rangle \in \tilde{D}[x,y]$ とするとき，任意の $1 \leq i \leq n$ について，$\langle x_i,y_i\rangle \in \tilde{D}[x,y]$ を示せばよい．$\langle x',y'\rangle \in \tilde{D}[x,y]$ より，ある $p \in \{1,\ldots,n\}^*$ に対して，$\hat{\delta}_{(E\times F)}(\langle x,y\rangle, p) = \langle x',y'\rangle$．このとき，$p' := p.i$ をとると，

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}_{(E\times F)}(\langle x,y\rangle, p') &= \hat{\delta}_{(E\times F)}(\langle x,y\rangle, p'.i) \\
&= \delta_{(E\times F)}(\hat{\delta}_{(E\times F)}(\langle x,y\rangle, p'), i) \\
&= \delta_{(E\times F)}(\langle x',y'\rangle, i) \\
&= (E \times F)(\langle x',y'\rangle)|_i \\
&= \langle x_i,y_i\rangle
\end{aligned}$$

よって，ある $p' \in \{1,\ldots,n\}^*$ について，$\hat{\delta}_{(E\times F)}(\langle x,y\rangle, p') = \langle x_i,y_i\rangle$ が成立する．したがって，$\langle x_i,y_i\rangle \in \tilde{D}[x,y]$ がいえた． □

補題 3.7. E, F をカノニカルシステム，$x \in Dom(E), y \in Dom(F)$ とする．任意の $\langle x',y'\rangle \in \tilde{D}[x,y]$ について，ある $p \in Pos((E \times F)^*\langle x,y\rangle)$ が存在して，$\hat{\delta}_{(E\times F)}(\langle x,y\rangle, p) = \langle x',y'\rangle$．

(証明) $\langle x',y'\rangle \in \tilde{D}[x,y]$ とすると，$\tilde{D}[x,y]$ の定義より，ある $p \in \{1,\ldots,n\}^*$ について，$\hat{\delta}_{(E\times F)}(\langle x,y\rangle, p) = \langle x',y'\rangle$．ここで，任意の $f \in F$ について，$arity(f) = n$ としていることより，$p \in Pos((E \times F)^*\langle x,y\rangle)$ となるため，題意が成立する． □

補題 3.8. E, F をカノニカルシステム，$x \in Dom(E), y \in Dom(F)$ とする．任意の $\langle x',y'\rangle \in \tilde{D}[x,y]$ について，$(\widetilde{E \times F}[x,y])^*\langle x',y'\rangle = (E \times F)^*\langle x',y'\rangle$．

(証明) 任意の $\langle x',y'\rangle \in \tilde{D}[x,y]$ について，$(\langle x',y'\rangle = t) \in \widetilde{E \times F}[x,y]$ と $(\langle x',y'\rangle = t) \in E \times F$ が同値であることより明らかである． □

4 正則項書き換えステップの決定可能性

本節では正則項書き換えステップの決定手続きを与え，その正しさを示す．

定義 4.1. E, F をカノニカルシステムとし，$x \in Dom(E), y \in Dom(F)$ とする．また，書き換え規則 R を $R = \{f(x_1,\ldots,x_n) \to g(x_1,\ldots,x_n)\}$ とする．このとき，手続き $onestep((E,x),(F,y),R)$ を図 1 のように定める．

補題 4.2. 手続き $onestep$ は任意の入力について停止する．

(証明) 関数記号集合 F を有限集合と仮定していることと正則集合の等価性は決定可能であることから明らかである． □

入力: 正則項のカノニカル表現 $(E,x),(F,y)$,TRS$R=\{f(x_1,\ldots,x_n)\to g(x_1,\ldots,x_n)\}$
出力: 真か偽

ステップ 1. $r\in F\backslash\{f,g\}$ それぞれについて,

(1) $M_1=DFA(E_x,r),M_2=DFA(F_y,r)$ を構成する.

(2) $L(M_1)\neq L(M_2)$ なら偽を返す.

ステップ 2. $M_1=DFA(E_x,f),M_2=DFA(F_y,f)$ を構成する.

ステップ 3. $L(M_1)\supseteq L(M_2)$ ならば真. そうでないなら偽を返す.

図 1　手続き *onestep*

補題 4.3. $E^*(x)=s,F^*(y)=t,R=\{f(x_1,\ldots,x_n)\to g(x_1,\ldots,x_n)\}$ とすると, onestep$((E,x),(F,y),R)$ が真であることは, $s\underset{R}{\to}t$ と等しい.

(証明)(⇒) $s=E^*(x),t=F^*(y)$ とする. $\tilde{E}=\pi_1(\widetilde{E\times F}[x,y]),\tilde{F}=\pi_2(\widetilde{E\times F}[x,y])$ を考える. このとき, π_1,π_2 の定義から $Dom(\tilde{E})=Dom(\tilde{F})=\tilde{D}[x,y]$. ある $W\subseteq\tilde{D}[x,y]$ について以下が満たされるなら, $s\underset{R}{\to}t$.

(1) $\tilde{E}(\langle x',y'\rangle)=\tilde{F}(\langle x',y'\rangle)$
($\langle x',y'\rangle\in\tilde{D}[x,y]\setminus W$ のとき)

(2) $\tilde{E}(\langle x',y'\rangle)=l\rho$かつ$\tilde{F}\langle x',y'\rangle)=r\rho$
($\langle x',y'\rangle\in\tilde{D}[x,y]$ のとき)

$W=\{\langle x',y'\rangle\in\tilde{D}[x,y]\mid\langle x',y'\rangle=\langle f,g\rangle(\langle x_1,y_1\rangle,\ldots,\langle x_n,y_n\rangle)\in E\times F\}$ ととる. このとき, $R=\{f(x_1,\ldots,x_n)\to g(x_1,\ldots,x_n)\}$ より, (2) は明らかである. したがって, 任意の $\langle x',y'\rangle\in\tilde{D}[x,y]\setminus W$ について, $\langle x',y'\rangle=\langle r,r'\rangle(\langle x_1,y_1\rangle\ldots\langle x_n,y_n\rangle)\in E\times F$ のとき, $r=r'$ が成立することを証明できればよい.

$\langle x',y'\rangle=\langle r,r'\rangle(\langle x_1,y_1\rangle,\ldots,\langle x_n,y_n\rangle)\in E\times F,\langle x',y'\rangle\in\tilde{D}[x,y]\setminus W$ とする. 補題 3.7 より, ある $p\in Pos((E\times F)^*\langle x,y\rangle)$ が存在して, $\hat{\delta}_{(E\times F)}(\langle x,y\rangle,p)=\langle x',y'\rangle$. 今, $(E\times F)\langle x',y'\rangle(\epsilon)=\langle r,r'\rangle$ だから, $\langle x',y'\rangle\in F_{E\times F,\langle r,r'\rangle}$ である. つまり, $\hat{\delta}_{(E\times F)}(\langle x,y\rangle,p)\in F_{E\times F,\langle r,r'\rangle}$. よって, 補題 3.2 より, $(E\times F)^*(\langle x,y\rangle)(p)=\langle r,r'\rangle$ となる. よって, 補題 2.2 と補題 3.8 より, $\tilde{E}^*(\langle x,y\rangle)(p)=r,\tilde{F}^*(\langle x,y\rangle)(p)=r'$. したがって, $s(p)=r,t(p)=r'$. したがって, 補題 3.3 より $p\in L(E_x,r),p\in L(F_y,r')$. 3 通りに場合分けする.

$r\in F\setminus\{f,g\}$ の場合. 手続きより $L(E_x,r')=L(F_x.r')$. $r\neq r'$ とすると補題 3.4 より $L(E_x,r)\cap L(F_x,r')=\emptyset$. これは $p\in L(E_x,r)\cap L(F_x,r')$ に矛盾する.

$r=f$ の場合. 仮定より $r'\neq g$. $p\in L(E_x,f)$ とする. 今, $r'\neq f$ とすると, $r'\in F\setminus\{f,g\}$ より手続きから $L(E_x,r')=L(F_x,r')$. つまり, $p\in L(E_x,r')$. よって $r'=f$. これは矛盾であり, 以上より $r=f=r'$.

$r=g$ の場合. $r'\in F\setminus\{f,g\}$ とすると, $L(E_x,r')=L(F_x,r')$ より $p\in L(E_x,r')$ となり, $r'=g$. これは, $r'\in F\ \{f,g\}$ に矛盾する.

$r'=f$ とすると, 手続きより $L(E_x,f)\supseteq L(F_x,f)$ となり, $p\in L(E_x,f)$. よって, $p\in L(E_x,r)$ より補題 3.4 から $r=f$. これは, $r=g$ と矛盾. つまり, $r'=g$.

(⇐)$s\underset{R}{\to}t$ より, $Dom(E)=Dom(F)$. さらに, ある W が存在して, 任意の $x\in W$ について, $x=f(x_1,\ldots,x_n)\in E,x=g(x_1,\ldots,x_n)\in F$. また, 任意の $x\in Dom(E)\setminus W$ について, ある $r\in F\setminus\{f,g\}$ について, $x=r(x_1,\ldots,x_n)\in E\cap F$ となる. それぞれの $r\in F\setminus\{f,g\}$ について, $M_1^r=DFA(E_x,r),M_2^r=DFA(F_x,r)$ を構成する. また, $M_1^f=DFA(E_x,f),M_2^f=DFA(F_x,f)$ を構成する. 手続きが真となるには以下の 2 つを満たせばよい.

(1) $L(M_1^r)=L(M_2^r)$.

(2) $L(M_1^f)\supseteq L(M_2^f)$.

(1)$p\in L(M_1^r)$ と仮定する. 補題 3.3 から $E^*(x)(p)=r$. s の定義より, $s(p)=r$. $r\notin\{f,g\}$ と補題 2.1 より $t(p)=r$. したがって, $F^*(x)(p)=r$. よって補題 3.3 より $p\in L(M_2^r)$. 以上より, $L(M_1^r)\subseteq L(M_2^r)$. 同様

に $p \in L(M_2^r)$ と仮定することで，$L(M_2^r) \subseteq L(M_1^r)$ がいえる．よって，$L(M_1^r) = L(M_2^r)$.

(2)$p \in L(M_2^f)$ と仮定する．補題 3.3 から $F^*(x)(p) = f$. t の定義より，$t(p) = f$. 補題 2.1 より，$s(p) = f$. ここから，補題 3.3 より，$p \in L(M_2^r)$. したがって，$L(M_1^f) \supseteq L(M_2^f)$. よって，(1),(2) が満たされたので，示された． □

定理 4.4. 書き換え規則 $R = \{f(x_1, \ldots, x_n) \to g(x_1, \ldots, x_n)\}$，$s, t$ を正則項とするとき，$s \underset{R}{\to} t$ は決定可能である．

(証明) 補題 4.3 と補題 4.2 より，手続き *onestep* によって，$s \underset{R}{\to} t$ は決定可能である． □

5 まとめと今後の課題

本稿では正則項書き換えシステム $R = \{f(x_1, \ldots, x_n) \to g(x_1, \ldots, x_n)\}$ について，正則項 s, t が与えられたときに規則 R で s から t へ書き換えられるか決定する手続きを与え，正しさを証明した．

今後の課題としては，正則項の書き換えについて考察を進めることが挙げられる．例えば，交換律を使った有限項の単一化手続きはよく知られているが，正則項については構文的同一性に関する単一化手続きしか知られておらず，交換律を使った正則項の単一化手続きは知られていない．交換律による正則項の単一化手続きの実現には，項の可換性問題の決定可能性が必要であり，本稿の内容はこれらの手続きを考案する助けになると考えている．

参考文献

[1] Aoto, T. and Ketema, J.: Rational term rewriting revisited: Decidability and confluence, *Proc. of 6th ICGT*, Vol. 7562 of LNCS, 2012, pp. 172–186.

[2] Baader, F. and Nipkow, T.: Term Rewriting and All That., Cambridge University Press, 1998.

[3] Corradini, A. and Gadducci., F.: Rational term rewriting., *Proc. of 1st FoSSaCS*, Vol. 1378 of LNCS, 1998, pp. 156–171.

[4] Courcelle, B.: Fundamental properties of infinite trees, *Theoretical Computer Science*, Vol. 76, No. 25(2)(1983), pp. 95–169.

[5] Jaffar, J.: Efficient unification over infinite terms, *New Generation Computing*, Vol. 32, No. 2(1985), pp. 207–219.

[6] Kennaway, R. and de Vries., F.-J.: Infinitary rewriting., *In Terese[10]*, Vol. 43, No. Chapter 12, pp. 668–711.

[7] Terese: Term Rewriting Systems, *Vol. 55 of Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science.*, Cambridge University Press, 2003.