危険対条件に基づく条件付き項書き換えシステムの階層可換性

芳賀 亮太　青戸 等人

項書き換えシステム (TRS) の合流性は計算結果の一意性を保証する重要な性質である．可換性は合流性の一般化であり，合流性を持つ 2 つの TRS が可換ならば，その和も合流性を持つ．条件付き項書き換えシステム (CTRS) は書き換え規則に条件の記述を許した TRS の拡張であり，関数型プログラムのモデルとして知られている．CTRS の階層合流性は書き換えの階層ごとに合流性を保証する性質であり，(鈴木ら，1995)-(加賀谷ら，2020) による十分条件が知られている．一方，TRS の可換性について，(外山，1987) によって与えられた危険対条件が知られている．本発表では，これらの研究を参考に，CTRS の階層可換性を保証する危険対条件を与える．

Confluence, which guarantees unique results of computations, is an important property of term rewriting systems (TRSs). Commutativity between two TRSs is a natural generalization of confluence in the sense that self-commutativity coincides with confluence. It also allows to infer confluence of TRSs in a modular way—the union of two confluent TRSs is confluent if they commute. Conditional term rewriting systems (CTRSs), known as a model of functional programs, are extensions of TRSs in which each rewrite rule can be equipped with conditions. CTRSs having confluent reductions in each depth of the rewrite steps are called level-confluent. Suzuki et al. (1995) and Kagaya and Aoto (2020) gave a criterion for level-confluence of CTRSs; Toyama (1987) gave a critical pair criterion for commutativity of TRSs. In this work, we give a critical pair criterion for level-commutativity of CTRSs, which generalizes these previous results.

1　はじめに

項書き換えシステム (TRS) は等式論理に基づく計算モデルである．TRS はプログラムの検証や定理自動証明に応用される．条件付き項書き換えシステム (CTRS) は条件部の記述を許した TRS の拡張であり，関数型プログラムのモデル化として応用される．

合流性は TRS や CTRS において，計算の順序によらず結果が一意であることを保証する重要な性質である．TRS，CTRS のどちらについても合流性に関する十分条件が先行研究により知られている [1]．また，CTRS において書き換え関係の定義により，階層ごとの TRS を考えることができる．このような TRS に関して，全て合流性を持つとき，階層合流性を持つといい，CTRS の合流性の十分条件として知られている [2] [3]．

一方，合流性の一般化として可換性がある．TRS の可換性とは任意の項について，2 つの TRS で計算を進めたとき，その途中で互い違いの TRS で計算を進めれば結果は一意になるという性質である．この 2 つの TRS が同一の TRS であるとき，可換性は合流性と同値になる．また合流性を持つ 2 つの TRS が可換であれば，その和の TRS も合流性を持つ．可換性は複雑な TRS の検証に役立つ性質である．TRS の可換性については先行研究において，可換性を満たすための十分条件が知られている [4]．しかし，CTRS の可換性については現在のところ知られていない．

本稿では文献 [4] の TRS の可換性を拡張し，CTRS の可換性を証明する．そのために文献 [2] [3] の階層合流性証明法を参考にし，CTRS の可換性の十分条件

Level-Commutativity of Conditional Term Rewriting Systems Based on a Critical Pair Criterion

Ryota Haga, 新潟大学大学院自然科学研究科, Graduate School of Science and Technology, Niigata University.

Takahito Aoto, 新潟大学自然科学系, Institute of Science and Technology, Niigata University.

となるような階層可換性を考える．左線形，真指向式，右安定の 3-CTRS に危険対条件を与えることにより CTRS は階層可換性を持つことを証明する．

本稿の構成について説明する．本節では研究の背景，目的について説明した．第 2 節では本稿で用いる基本概念や記法，関連の深い従来研究について説明する．第 3 節では，危険対条件に基づく CTRS の階層可換性を証明する．第 4 節では具体例に対して，第 3 節で証明した階層可換性を適用した結果を示す．第 5 節は本稿の結論であり，まとめと今後の課題を述べる．

2 準備

本稿で用いる基本概念や記法，関連の深い従来研究を説明する．

2.1 項書き換えシステム

関数記号 (*function symbol*) とは演算を表す記号である. 関数は引数が決まっていて，これをアリティ (*arity*) と呼ぶ．アリティが 0 であるものは定数 (*constant*) である．関数記号の他に変数 (*variable*) があり，変数は可算無限個存在する．関数記号の集合を $\mathcal{F}$，変数の集合を $\mathcal{V}$ とする．このとき $\mathcal{F} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ であり，これは関数記号であり変数であるものが存在しないことを示す．対象を表す記号列を項 (*term*) という. 項は以下のように帰納的に定義される．

(1) 変数は項である．

(2) f をアリティ n の関数記号，$t_1, \ldots, t_n$ を項とすると，$f(t_1, \ldots, t_n)$ は項である．

(2) で $n = 0$ のとき，すなわちアリティが 0 のときは f と表記する．また項全体の集合は $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ と表記する．項の長さを $|t|$ とする．これは重複を許した関数記号と変数の数の合計を示し，例として $|f(x, x)| = 3$ である．項 t の関数記号の集合は $\mathcal{F}(t)$ と表記し，変数の集合は $\mathcal{V}(t)$ と表記する．また項 t の根記号を $root(t)$ と表記する．項 t が変数を持たないとき，すなわち $\mathcal{V}(t) = \emptyset$ であるとき，t は基底項 (*ground term*) であるという．

項の位置 (*position*) は正数列で表し，根位置は ϵ で表す．項 t の位置の集合を $Pos(t)$ とする．例えば $Pos(+(+(s(0), x), 0)) = \{\epsilon, 1, 2, 1.1, 1.2, 1.1.1\}$ となる．特別な定数 $\square$ をホール (*hole*) と呼ぶ．文脈 (*context*) を C とすると，$C[t]$ は，文脈 C のホールを項 t に置き換えて得られる項である．$C[\ ]_{p_1,\ldots,p_n}$ は位置 $p_1, \ldots, p_n$ がホールであることを明示した文脈の表記である．文脈 C のホールである位置 $p_1, \ldots, p_n$ を項 $t_1, \ldots, t_n$ に置き換えて得られる項を $C[t_1, \ldots, t_n]_{p_1,\ldots,p_n}$ と表記する．$u = C[t]$ となる文脈 C が存在するとき，t は u の部分項という．部分項が出現する位置も含めて表現するときは特に部分項出現という．

関数 $\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ で，集合 $\{x \mid \sigma(x) \neq x\}$ が有限であるものを代入 (*substitution*) という．集合 $\{x \mid \sigma(x) \neq x\}$ を代入の定義域 (*domain*) とよび，$dom(\sigma)$ と表記する．さらに，任意の $x \in X$ について $\sigma(x) = \rho(x)$ となるとき，$\sigma = \rho[X]$ と表記する．また，代入 σ について，ある変数の集合 X に属する変数の代入についてのみ取り出したものを $\sigma|_X$ と表記する．項 t の中にある変数への代入を $\sigma(t)$ と表記するが，簡略化して $t\sigma$ と表記することもある．

l，r を項とする．$l \notin \mathcal{V}$，$\mathcal{V}(r) \subseteq \mathcal{V}(l)$ を満たすとき，$l \to r$ を書き換え規則 (*rewrite rule*) と呼ぶ．書き換え規則の有限集合を項書き換えシステム (*term rewriting system*，*TRS*) と呼ぶ．$\mathcal{R}$ を項書き換えシステムとする．項 s から項 t への $\mathcal{R}$ による書き換えステップを $s \to_{\mathcal{R}} t$ と表記し，これは書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$，代入 σ，文脈 $C[\ ]_p$ が存在して，$s = C[l\sigma]_p$ かつ $t = C[r\sigma]_p$ となるときをいう．また，部分項 $l\sigma$ をリデックス出現という．書き換え関係の p，$l \to r$，σ を明示したいときは，$s \to_{\mathcal{R}}^{p, l\to r, \sigma} t$ や $s \to_{\mathcal{R}}^{p} t$ と表記する．さらに任意の書き換え規則の左辺 l に現れる変数はどれもたかだか 1 回しか出現しないとき，左線形という．2 項関係 $\to$ の反射推移閉包を $\xrightarrow{*}$ とし，等価閉包を $\xleftrightarrow{*}$ とする．

項書き換えシステム $\mathcal{R}$ において $s \to_{\mathcal{R}} t$ となるような t が存在しないとき，項 s を正規形 (*normal form*) と呼ぶ．また，無限書き換え列 $t_0 \to_{\mathcal{R}} t_1 \to_{\mathcal{R}} \ldots$ が存在しないとき $\mathcal{R}$ は停止性をもつ (*terminating*) という．二項関係 $\to$ について $\xleftarrow{*} \cdot \xrightarrow{*} \subseteq \xrightarrow{*} \cdot \xleftarrow{*}$ が成り立つとき二項関係 $\to$ は合流性 (*confluence*) を持つと

いう．二項関係 $\to$ と $\rightsquigarrow$ について $\overset{*}{\leftarrow} \cdot \overset{*}{\rightsquigarrow} \subseteq \overset{*}{\rightsquigarrow} \cdot \overset{*}{\leftarrow}$ が成り立つとき二項関係 $\to$ と $\rightsquigarrow$ は可換性 (*commute*) を持つという．$\mathcal{R}$ が合流性を持つとは書き換え関係 $\to_{\mathcal{R}}$ が合流性を持つときをいう．同様に $\mathcal{R}^1$，$\mathcal{R}^2$ が可換性を持つとは $\to_{\mathcal{R}^1}$，$\to_{\mathcal{R}^2}$ が可換性を持つときをいう．

$l_1 \to r_1$，$l_2 \to r_2$ を同じ変数を含まないような $\mathcal{R}$ の書き換え規則とする．l_2 のある非変数部分項について $l_2|_p\sigma = l_1\sigma$ となるとき，$l_1 \to r_1$ は $l_2 \to r_2$ に重なるという．ただし，同じ書き換え規則で根位置の場合は除く．$l_1 \to r_1$ は $l_2 \to r_2$ に重なるとし，代入 σ は最汎単一化子と仮定する．このとき，$\langle l_2[r_1]_p\sigma, r_2\sigma\rangle$ を危険対 (*critical pair*) という．根位置の重なりによる危険対を外側危険対，それ以外の重なりによる危険対を内側危険対という．外側危険対の集合を $CP_{out}(\mathcal{R})$，内側危険対の集合を $CP_{in}(\mathcal{R})$，全ての危険対の集合を $CP(\mathcal{R}) = CP_{out}(\mathcal{R}) \cup CP_{in}(\mathcal{R})$ とする．$CP(\mathcal{R}) = \emptyset$ を重なりがないという．また 2 つの TRS 間や特に 2 つの書き換え規則の間の重なりによる危険対を考えるときは $CP(\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2)$ 等と表記する．

2.2 条件付き項書き換えシステム

書き換え規則に条件部となる $c = s_1 \approx t_1, \ldots, s_n \approx t_n$ のような等式の列が付加されたものを条件付き書き換え規則と呼び，$l \to r \Leftarrow c$ と表記される．条件付き項書き換えシステム (*Conditional Term Rewriting System*，*CTRS*) は，条件付き書き換え規則の有限集合である．ただし条件部は空列でも良い．

$\mathcal{R}$ を条件付き項書き換えシステムとする．このとき $\mathcal{R}$ の書き換え関係 $\to_{\mathcal{R}}$ は以下のような TRS($\mathcal{R}_n$) を帰納的に定義することで得られる．

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}_0 & = & \emptyset \\ \mathcal{R}_{n+1} & = & \{(l\sigma, r\sigma) \mid \\ & & l \to r \Leftarrow c \in \mathcal{R} \text{ with } c\sigma \subseteq \overset{*}{\to}_{\mathcal{R}_n}\} \\ \to_{\mathcal{R}} & = & \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \to_{\mathcal{R}_n} \end{array}$$

$c = s_1 \approx t_1, \ldots, s_n \approx t_n$ において，任意の i について $s_i\sigma \overset{*}{\to} t_i\sigma$ となるとき，$c\sigma \subseteq \overset{*}{\to}$ と表記する．上記の CTRS は条件部の解釈を関係 $\overset{*}{\to}_{\mathcal{R}_n}$ を使って定義している．このときの CTRS を特に指向式条件付き項書き換えシステムという．本稿で扱う CTRS は指向式 CTRS とする．任意の $s_j \approx t_j$ について $s_j\sigma \overset{*}{\to}_{\mathcal{R}_n} t_j\sigma$ となるとき，$\mathcal{R}_n \vdash c\sigma$ と表記する．書き換えステップ $l \to_{\mathcal{R}} r$ について $l \to_{\mathcal{R}_n} r$ を満たす最小の n を階層という．また n 未満の階層の書き換えステップ $\bigcup_{i<n} \to_{\mathcal{R}_i}$ を $\to_{<\mathcal{R}_n}$ のように表記する．$\mathcal{R}$ について，任意の階層 $\to_{\mathcal{R}_n}$ が合流性を持つとき，$\mathcal{R}$ は階層合流性 (*level-confluence*) を持つという．また 2 つの CTRS $\mathcal{R}^1$，$\mathcal{R}^2$ を考え，それぞれの階層を $\to_{\mathcal{R}^1_m}$，$\to_{\mathcal{R}^2_n}$ とする．任意の階層について可換性を持つとき，すなわち任意の m, n について $\overset{*}{\leftarrow}_{\mathcal{R}^1_m} \cdot \overset{*}{\to}_{\mathcal{R}^2_n} \subseteq \overset{*}{\to}_{\mathcal{R}^2_n} \cdot \overset{*}{\leftarrow}_{\mathcal{R}^1_m}$ であるとき，$\mathcal{R}^1$，$\mathcal{R}^2$ は階層可換性 (*level-commutativity*) を持つという．

$\mathcal{R}$ を条件付き項書き換えシステムとする，条件部の左辺 l の根記号 $root(l)$ を定義記号と呼び，定義記号の集合を $\mathcal{F}_D$ とする．このとき，$\mathcal{F}_C = \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_D$ とし $\mathcal{F}_C$ に属する関数記号を構成子記号と呼ぶ．定義記号を含まない項を構成子項とし，さらに出現する変数はどの変数もたかだか 1 回しか出現しない構成子項を線形構成子項という．$\mathcal{R}_u$ を $\mathcal{R}$ から条件を取り除いた拡張項書き換えシステムとする．項 t が基底項であり，$\mathcal{R}_u$ に関して t が 正規形であるとき，t を基底 $\mathcal{R}_u$ 正規形という．$\mathcal{R}$ のすべての条件付き書き換え規則 $l \to r \Leftarrow s_1 \approx t_1, \ldots, s_n \approx t_n$ について，$(\mathcal{V}(l) \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathcal{V}(s_j \approx t_j) \cup \mathcal{V}(s_i)) \cap \mathcal{V}(t_i) = \emptyset$ であり，条件部の右辺 $t_1, \ldots, t_n$ が全て基底 $\mathcal{R}_u$ 正規形か線形構成子項であるとき，右安定 (*right stable*) という．$\mathcal{R}$ のすべての条件付き書き換え規則について $\mathcal{V}(r) \subseteq \mathcal{V}(l) \cup \mathcal{V}(c)$ となるとき 3 型といい，3 型の CTRS を 3-CTRS と表記する．また，$\mathcal{V}(r) \not\subseteq \mathcal{V}(l)$ ならば $\mathcal{V}(s_i) \subseteq \mathcal{V}(l) \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathcal{V}(t_j) (1 \le i \le k)$ が成立するとき，$\mathcal{R}$ は真指向式という．ある変数 x について，$x \in (\mathcal{V}(r) \cup \mathcal{V}(l)) - \mathcal{V}(r)$ が成立するとき，変数 x は外変数という．全ての書き換え規則が左線形で，重なりがない $\mathcal{R}$ は直交 (*orthogonal*) という．

$l_1 \to r_1 \Leftarrow c_1$，$l_2 \to r_2 \Leftarrow c_2$ を同じ変数を含まないような $\mathcal{R}$ の条件付き書き換え規則とする．$l_1 \to r_1 \Leftarrow c_1$ は $l_2 \to r_2 \Leftarrow c_2$ に重なるとし，代入 σ は最汎単一化子と仮定する．このとき，$\langle l_2[r_1]_p\sigma, r_2\sigma\rangle \Leftarrow \langle c_1\sigma, c_2\sigma\rangle$ を条件付き危険対 (*con-

ditional critical pair) という．TRS の場合と同様に外側条件付き危険対の集合を $CCP_{out}(\mathcal{R})$，内側条件付き危険対の集合を $CCP_{in}(\mathcal{R})$，全ての条件付き危険対の集合を $CCP(\mathcal{R}) = CCP_{out}(\mathcal{R}) \cup CCP_{in}(\mathcal{R})$ とする．2 つの CTRS 間や特に 2 つの書き換え規則の間の重なりによる条件付き危険対を考えるときは $CCP(\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2)$ 等と表記する．

2.3　並列書き換えと従来研究

本稿で用いられる表現において極めて重要な並列書き換え，拡張並列書き換えについて説明する．本稿と特に関連のある従来研究についても説明する．

定義 2.1 (並列書き換え [4])
$C[A_1, \ldots, A_n]$ $(n \geq 0)$ について，$A_i \to B_i$, $(i = 1, \ldots, n)$ となるとき，$C[A_1, \ldots, A_n] \mathrel{-\!\!\!\Vert\!\!\!\to} C[B_1, \ldots, B_n]$ と表し，これを並列書き換え (*parallel rewriting*) と呼ぶ．

定義 2.2 (拡張並列書き換え [3] [2])
$\mathcal{R}$ を CTRS とする．$C[A_1, \ldots, A_n]$ $(n \geq 0)$ について，下記の (1) または (2) を満たすならば，$C[A_1, \ldots, A_n] \mathrel{\Vert\!\!\!\to}_{\mathcal{R}_n} C[B_1, \ldots, B_n]$ と表す．

(1)　$A_i \to^{\epsilon}_{\mathcal{R}_n} B_i$

(2)　$A_i \overset{*}{\to}_{<\mathcal{R}_n} B_i$

このときの $\{A_1, \ldots, A_n\}$ を書き換えステップのリデックス出現と呼び，これを明示するとき $C[A_1, \ldots, A_n] \overset{A_1,\ldots,A_n}{\mathrel{\Vert\!\!\!\to}}_{\mathcal{R}_n} C[B_1, \ldots, B_n]$ と表記する．階層の定義から，$\mathrel{\Vert\!\!\!\to}_{\mathcal{R}_0}$ は恒等関係である．また，$\forall n \geq 0$, $\to_{\mathcal{R}_n} \subseteq \mathrel{\Vert\!\!\!\to}_{\mathcal{R}_n} \subseteq \to^{*}_{\mathcal{R}_n} \subseteq \mathrel{\Vert\!\!\!\to}_{\mathcal{R}_{n+1}}$ が成立し，さらに $\forall n \geq 0$, $\overset{*}{\mathrel{\Vert\!\!\!\to}}_{\mathcal{R}_n} = \to^{*}_{\mathcal{R}_n}$ が成立する．これは本稿中の証明で多く利用される性質である．$\mathrel{\Vert\!\!\!\to} = \bigcup_{n \geq 0} \mathrel{\Vert\!\!\!\to}_{\mathcal{R}_n}$ を拡張並列書き換え (*extended parallel rewriting*) と呼ぶ．拡張並列書き換えステップ $s \mathrel{\Vert\!\!\!\to} t$ の階層は，$s \mathrel{\Vert\!\!\!\to}_{\mathcal{R}_n} t$ となる最小の n とする．

命題 2.1 (外山 [4] の可換性に関する危険対条件)
$\mathcal{R}^1$．$\mathcal{R}^2$ を左線形の TRS とする．下の条件を満たすとき $\mathcal{R}^1$ と $\mathcal{R}^2$ は可換である．

(1)　$\forall \langle p, q \rangle \in CP(\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2), \exists s.\ (p \mathrel{-\!\!\!\Vert\!\!\!\to}_{\mathcal{R}^2} s \wedge q \overset{*}{\to}_{\mathcal{R}^1} s)$ が成立する．

(2)　$\forall \langle q, p \rangle \in CP_{in}(\mathcal{R}^2, \mathcal{R}^1)$．$(q \mathrel{-\!\!\!\Vert\!\!\!\to}_{\mathcal{R}^1} p)$ が成立する．

命題 2.2 (鈴木ら [3] の CTRS の階層合流性条件)
$\mathcal{R}$ は直交，真指向式，右安定の 3-CTRS とする．$t \mathrel{\Vert\!\!\!\to}_{\mathcal{R}} t_1$，$t \mathrel{\Vert\!\!\!\to}_{\mathcal{R}} t_2$ ならば，$t_1 \mathrel{\Vert\!\!\!\to}_{\mathcal{R}} t_3$，$t_2 \mathrel{\Vert\!\!\!\to}_{\mathcal{R}} t_3$ となる t_3 が存在する．したがって，階層合流性を持つ．

命題 2.2 の拡張として以下の結果が知られている．

命題 2.3 (加賀谷ら [2] の CTRS の階層合流性条件)
$\mathcal{R}$ は左線形，真指向式，右安定の 3-CTRS とし，さらに以下の危険対条件を満たすとする．

(1)　任意の $\langle u, v \rangle \Leftarrow \langle c, c' \rangle \in CCP_{out}(\alpha, \beta)$ について $\forall m, n \geq 1$, $\forall \rho$．$\mathcal{R}_{m-1} \vdash c\rho$ かつ $\mathcal{R}_{n-1} \vdash c'\rho$ ならば $u\rho \mathrel{\Vert\!\!\!\to}_{\mathcal{R}_n} \cdot \overset{*}{\mathrel{\Vert\!\!\!\to}}_{<\mathcal{R}_n} \cdot \overset{*}{\mathrel{\leftarrow\!\!\!\Vert}}_{<\mathcal{R}_m} \cdot \mathrel{\leftarrow\!\!\!\Vert}_{\mathcal{R}_n} v\rho$ が成立する．

(2)　任意の $\langle u, v \rangle \Leftarrow \langle c, c' \rangle \in CCP_{in}(\alpha, \beta)$ について $\forall m, n \geq 1$, $\forall \rho$．$\mathcal{R}_{m-1} \vdash c\rho$ かつ $\mathcal{R}_{n-1} \vdash c'\rho$ ならば $u\rho \mathrel{\Vert\!\!\!\to}_{\mathcal{R}_m} v\rho$ が成立する．

ここで，α，$\beta \in \mathcal{R}$ であることに注意する．

$t \mathrel{\Vert\!\!\!\to}_{\mathcal{R}_m} t_1$，$t \mathrel{\Vert\!\!\!\to}_{\mathcal{R}_n} t_2$ ならば，$t_1 \mathrel{\Vert\!\!\!\to}_{\mathcal{R}_n} \cdot \overset{*}{\mathrel{\Vert\!\!\!\to}}_{<\mathcal{R}_n} t_3$，$t_2 \mathrel{\Vert\!\!\!\to}_{\mathcal{R}_m} \cdot \overset{*}{\mathrel{\Vert\!\!\!\to}}_{<\mathcal{R}_m} t_3$ となる t_3 が存在する．したがって，階層合流性を持つ．

命題 2.1 は TRS に関する可換性の危険対条件である．これを CTRS の可換性に関する危険対条件に拡張し，命題 2.3 の証明方法を参考にして，次節で CTRS の階層可換性を証明する．

3　条件付き項書き換えシステムの階層可換性

本節では，2 つの左線形，右安定，真指向式の 3-CTRS に危険対条件を与え，それらを満たす 2 つの CTRS は階層可換性を持つことを証明する．そのために必要な補題を始めに示す．

以下で補題 3.1 と補題 3.2 は抽象的な 2 項関係の性質を示す．

補題 3.1 $\forall n$．$\overset{*}{\to}_{<n} \subseteq \to_n$ と仮定する．
$\forall m, n$．$(\leftarrow_m \cdot \to_n \subseteq \to_n \cdot \overset{*}{\to}_{<n} \cdot \overset{*}{\leftarrow}_m)$ ならば
$\forall m, n$．$(\overset{*}{\leftarrow}_m \cdot \to_n \subseteq \to_n \cdot \overset{*}{\to}_{<n} \cdot \overset{*}{\leftarrow}_m)$ が成立する．

(証明) $z \overset{*}{\leftarrow}_m x \to_n y$，書き換えステップの長さを $k = |x \overset{*}{\to}_m z|$ とする．このとき $\langle n + m, k \rangle$ に関する帰納法で $z \to_n \cdot \overset{*}{\to}_{<n} w \overset{*}{\leftarrow}_m y$ を示す．

$k = 0$ のとき $x = z$ となるため明らかに成立する．$m = n = 0$ のときは $z = y$ となるため明らかに成立する．

$x \to_m x' \overset{*}{\to}_m z$ とする．仮定より $x' \to_n x'' \overset{*}{\to}_{<n}$

$v \overset{*}{\leftarrow}_m y$ を得る．次に $z \overset{*}{\leftarrow}_m x' \rightarrow_n x''$ について k に関する帰納法の仮定より，$z \rightarrow_n \cdot \overset{*}{\rightarrow}_{<n} u \overset{*}{\leftarrow}_m x''$ を得る．さらに $u \overset{*}{\leftarrow}_m x'' \overset{*}{\rightarrow}_{<n} v$ について $n+m$ に関する帰納法の仮定より $u \overset{*}{\rightarrow}_{<n} w \overset{*}{\leftarrow}_m v$ が成立する．以上より $z \rightarrow_n \cdot \overset{*}{\rightarrow}_{<n} w \overset{*}{\leftarrow}_m y$ が示された． □

補題 3.2 $\forall n.\ \overset{*}{\rightarrow}_{<n} \subseteq \rightarrow_n$ と仮定する．
$\forall m,n.\ (\leftarrow_m \cdot \rightarrow_n \subseteq \rightarrow_n \cdot \overset{*}{\rightarrow}_{<n} \cdot \overset{*}{\leftarrow}_m)$ ならば
$\forall m,n.\ (\overset{*}{\leftarrow}_m \cdot \overset{*}{\rightarrow}_n \subseteq \overset{*}{\rightarrow}_n \cdot \overset{*}{\leftarrow}_m)$ が成立する．

(証明) $z \overset{*}{\leftarrow}_m x \overset{*}{\rightarrow}_n y$，$k = |x \overset{*}{\rightarrow}_n y|$ として，k に関する帰納法で $z \overset{*}{\rightarrow}_n v \overset{*}{\leftarrow}_m y$ を示す．

$k=0$ のとき $x=z$ となり，明らかに成立する．

$x \rightarrow_n x' \overset{*}{\rightarrow}_n y$ とする．$z \overset{*}{\leftarrow}_m x \rightarrow_n x'$ について補題 3.1 を用いると $z \rightarrow_n \overset{*}{\rightarrow}_{<n} u \overset{*}{\leftarrow}_m x'$ を得る．さらに $u \overset{*}{\leftarrow}_m x' \overset{*}{\rightarrow}_n y$ に対して帰納法の仮定より，$u \overset{*}{\rightarrow}_n v \overset{*}{\leftarrow}_m y$ を得る．以上より $z \overset{*}{\rightarrow}_n v \overset{*}{\leftarrow}_m y$ が示された． □

補題 3.3 $\forall n.\ \overset{*}{\rightarrow}_{<n} \subseteq \rightarrow_n$ と仮定する．
$\forall m,n.\ (\mathrel{\leftarrow\!\!\!\|\!\!\!\rightarrow}_m \cdot \mathrel{\|\!\!\!\rightarrow}_n \subseteq \mathrel{\|\!\!\!\rightarrow}_n \cdot \overset{*}{\mathrel{\leftarrow\!\!\!\|\!\!\!\rightarrow}}_{<n} \cdot \overset{*}{\leftarrow}_m)$ ならば
$\forall m,n.\ (\overset{*}{\leftarrow}_m \cdot \overset{*}{\rightarrow}_n \subseteq \overset{*}{\rightarrow}_n \cdot \overset{*}{\leftarrow}_m)$ が成立する．

(証明) $z \overset{*}{\leftarrow}_m x \overset{*}{\rightarrow}_n y$ として，$z \overset{*}{\rightarrow}_n v \overset{*}{\leftarrow}_m y$ を示す．$\forall k. \rightarrow_k \subseteq \mathrel{\|\!\!\!\rightarrow}_k$ だから，$z \overset{*}{\mathrel{\leftarrow\!\!\!\|\!\!\!\rightarrow}}_n x \overset{*}{\mathrel{\|\!\!\!\rightarrow}}_m y$ が成立する．$\forall k. \overset{*}{\rightarrow}_k \subseteq \overset{*}{\mathrel{\|\!\!\!\rightarrow}}_k$ に注意して，補題 3.2 より $z \overset{*}{\mathrel{\|\!\!\!\rightarrow}}_n v \overset{*}{\mathrel{\leftarrow\!\!\!\|\!\!\!\rightarrow}}_m y$ を得る．$\forall k. \overset{*}{\mathrel{\|\!\!\!\rightarrow}}_k \subseteq \overset{*}{\rightarrow}_k$ も成立するから $z \overset{*}{\rightarrow}_n v \overset{*}{\leftarrow}_m y$ が成立する． □

階層可換性の証明の一部には階層に関する帰納法を用いて証明を行う．階層に関する帰納法の記述に合わせて補題 3.1，補題 3.2 を修正すると以下のようになる．

補題 3.4 $\forall n.\ \overset{*}{\rightarrow}_{<n} \subseteq \rightarrow_n$ と仮定する．
$\forall m', n'.\ (m'+n' < m+n$ ならば $\leftarrow_{m'} \cdot \rightarrow_{n'} \subseteq \rightarrow_{n'} \cdot \overset{*}{\rightarrow}_{<n'} \cdot \overset{*}{\leftarrow}_{m'})$ が成立するとき，$\forall m', n'.\ (m'+n' < m+n$ ならば $\overset{*}{\leftarrow}_{m'} \cdot \rightarrow_{n'} \subseteq \rightarrow_{n'} \cdot \overset{*}{\rightarrow}_{<n'} \cdot \overset{*}{\leftarrow}_{m'})$ が成立する．

(証明) 省略 (補題 3.1 と同様)

補題 3.5 $\forall n.\ \overset{*}{\rightarrow}_{<n} \subseteq \rightarrow_n$ と仮定する．
$\forall m', n'.\ (m'+n' < m+n$ ならば $\leftarrow_{m'} \cdot \rightarrow_{n'} \subseteq \rightarrow_{n'} \cdot \overset{*}{\rightarrow}_{<n'} \cdot \overset{*}{\leftarrow}_{m'})$ が成立するとき，$\forall m', n'.\ (m'+n' < m+n$ ならば $\overset{*}{\leftarrow}_{m'} \cdot \overset{*}{\rightarrow}_{n'} \subseteq \overset{*}{\rightarrow}_{n'} \cdot \overset{*}{\leftarrow}_{m'})$ が成立する．

(証明) 省略 (補題 3.2 と同様)

次にリデックス出現に関して特殊な状況のときの階層可換性の証明を先に示す．

補題 3.6 $\mathcal{R}^1$，$\mathcal{R}^2$ を左線形，右安定，真指向式の 3-CTRS とする．このとき，$M = l\sigma$，$N = r\sigma$，$\mathcal{R}^1_{m-1} \vdash c\sigma$，$l \rightarrow r \Leftarrow c \in \mathcal{R}^1$ とし，$M \overset{P_1,\ldots,P_p}{\mathrel{\|\!\!\!\rightarrow}}_{\mathcal{R}^2_n} P$ であり $P_1, \ldots, P_p$ は σ の中に出現すると仮定する．このとき $N \mathrel{\|\!\!\!\rightarrow}_{\mathcal{R}^2_n} Q$，$P \rightarrow_{\mathcal{R}^1_m} Q$ となるような Q が存在する．

(証明) $P_1, \ldots, P_p$ が代入の中にあるから，$P = l\tau$，$dom(\tau) \subseteq \mathcal{V}(l)$，$\forall x \in \mathcal{V}(l)$，$x\sigma \mathrel{\|\!\!\!\rightarrow}_{\mathcal{R}^2_n} x\tau$ となるような代入 τ が存在する．このとき，以下のような (a)〜(d) の性質を満たす代入 ρ_i の存在を $i \in \{0, \ldots, j\}$ についての帰納法で示すことにより，Q の存在を証明する．ここで $c = s_1 \approx t_1, \ldots, s_i \approx t_j$ とし，c_i は $s_1 \approx t_1, \ldots, s_i \approx t_i (1 \leq i \leq j)$ を表す．

(a) $\rho_i = \tau[\mathcal{V}(l)]$
(b) $dom(\rho_i) \subseteq \mathcal{V}(l) \cup \mathcal{V}(c_i)$
(c) $\mathcal{R}^1_{m-1} \vdash c_i \rho_i$
(d) $\forall x \in \mathcal{V}(l) \cup \mathcal{V}(c_i)$，$x\sigma \overset{*}{\mathrel{\|\!\!\!\rightarrow}}_{\mathcal{R}^2_n} x\rho_i$

$i = 0$ のとき，$\rho_0 = \tau|_{\mathcal{V}(l)}$ とすれば (a)〜(d) を満たす．

$i > 0$ のとき，条件 $s_i \approx t_i$ について考える．$\mathcal{R}^1_{m-1} \vdash c\sigma$ より $s_i\sigma \rightarrow_{\mathcal{R}^1_{m-1}} t_i\sigma$ となり，$\overset{*}{\rightarrow}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} \subseteq \overset{*}{\mathrel{\|\!\!\!\rightarrow}}_{\mathcal{R}^1_{m-1}}$ から $s_i\sigma \overset{*}{\mathrel{\|\!\!\!\rightarrow}}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} t_i\sigma$ が成立する．$V = \mathcal{V}(s_i) - (\mathcal{V}(l) \cup \mathcal{V}(c_{i-1}))$ として ρ を ρ_{i-1} と $\sigma|_V$ の互いに素な和集合とする ($\rho = \rho_{i-1} \uplus \sigma|_V$)．帰納法の仮定 (d) より $s_i\sigma \overset{*}{\mathrel{\|\!\!\!\rightarrow}}_{\mathcal{R}^2_n} s_i\rho$ が成立する．$t_i\sigma \overset{*}{\mathrel{\leftarrow\!\!\!\|\!\!\!\rightarrow}}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} s_i\sigma \overset{*}{\mathrel{\|\!\!\!\rightarrow}}_{\mathcal{R}^2_n} s_i\rho$ について補題 3.5 を適用すると $s_i\rho \overset{*}{\mathrel{\|\!\!\!\rightarrow}}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} t' \overset{*}{\mathrel{\leftarrow\!\!\!\|\!\!\!\rightarrow}}_{\mathcal{R}^2_n} t_i\sigma$ となるような t' の存在が示される．このとき，$\mathcal{R}^2$ は右安定より t_i は基底 $\mathcal{R}_u$ 正規形か線形構成子項のいずれかである．t_i が基底 $\mathcal{R}_u$ 正規形のとき $t_i\sigma = t_i = t'$ となり代入 $\rho_i = \rho$ は (a)〜(d) を満たす．t_i が線形構成子項のとき $dom(\rho') \subseteq \mathcal{V}(t_i)$ かつ $t' = t_i\rho'$ となるような代入 ρ' が存在する．また，右安定より $\mathcal{V}(t_i) \cap (\mathcal{V}(l) \cup \mathcal{V}(c_{i-1})) = \emptyset$ である．よって，$\rho_i = \rho \cup \rho'$ は代入であり，ρ_i は (a)〜(d) を満たす ((d) について，$t_i\sigma \overset{*}{\mathrel{\|\!\!\!\rightarrow}}_{\mathcal{R}^2_n} t'$ であり，$t' = t_i\rho'$ であるから，$t_i\sigma \overset{*}{\mathrel{\|\!\!\!\rightarrow}}_{\mathcal{R}^2_n} t_i\rho'$ が成立する．これより

$t_i\sigma \overset{*}{\mathrel{+\!\!\!\!+}}_{\mathcal{R}^2_n} t_i\rho_i$ が成立する)．以上より，代入 ρ_i の存在が示された．

代入 ρ_j について考える．(a) より $l\tau = l\rho_j$ が成立する．さらに (c) より $\mathcal{R}^1_{m-1}\vdash c\rho_j$ が成立する．以上から，$P = l\tau = l\rho_j \rightarrow_{\mathcal{R}^1_m} r\rho_j$ となる．$\mathcal{R}^1$ が 3-CTRS より，$\mathcal{V}(r) \subseteq \mathcal{V}(l) \cup \mathcal{V}(c_i)$ である．よって，(d) より $N = r\sigma \mathrel{+\!\!\!\!+}_{\mathcal{R}^2_n} r\rho_j$ となる．以上から，$Q = r\rho_j$ とすれば，$N \mathrel{+\!\!\!\!+}_{\mathcal{R}^2_n} Q$，$P \rightarrow_{\mathcal{R}^1_m} Q$ となるような Q が存在する． $\square$

定義 3.1 CTRS の危険対に関する可換性の条件を以下のように定義する．

(1) 任意の $\langle u, v\rangle \Leftarrow \langle c, c'\rangle \in CCP(\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2)$ について $\forall m, n \geq 1$，$\forall \rho$．$\mathcal{R}^1_{m-1}\vdash c\rho$ かつ $\mathcal{R}^2_{n-1}\vdash c'\rho$ ならば $\exists s$．($u\rho \mathrel{+\!\!\!\!+}_{\mathcal{R}^2_n} \cdot \overset{*}{\mathrel{+\!\!\!\!+}}_{<\mathcal{R}^2_n} s$ かつ $v\rho \xrightarrow{*}_{\mathcal{R}^1_m} s$) が成立する．

(2) 任意の $\langle v, u\rangle \Leftarrow \langle c', c\rangle \in CCP_{in}(\mathcal{R}^2, \mathcal{R}^1)$ について $\forall m, n \geq 1$，$\forall \rho$．$\mathcal{R}^1_{m-1}\vdash c\rho$ かつ $\mathcal{R}^2_{n-1}\vdash c'\rho$ ならば $v\rho \mathrel{+\!\!\!\!+}_{\mathcal{R}^1_m} u\rho$ が成立する．

定理 3.1 $\mathcal{R}^1$，$\mathcal{R}^2$ は真指向式，右安定，左線形の 3-CTRS とする．定義 3.1 の危険対条件を満たすとき $\mathcal{R}^1$ と $\mathcal{R}^2$ は階層可換性を持つ．

(証明) $M \overset{A_1,\dots,A_m}{\mathrel{+\!\!\!\!+}}_{\mathcal{R}^1_m} N$，$M \overset{B_1,\dots,B_n}{\mathrel{+\!\!\!\!+}}_{\mathcal{R}^2_n} P$ とする．$N \mathrel{+\!\!\!\!+}_{\mathcal{R}^2_n} \cdot \overset{*}{\mathrel{+\!\!\!\!+}}_{<\mathcal{R}^2_n} Q$，$P \xrightarrow{*}_{\mathcal{R}^1_m} Q$ となる Q の存在を示す．ここで $\Gamma = \{A_i \mid \exists B_j.\ A_i \subseteq B_j\} \cup \{B_i \mid \exists A_j.\ B_i \subseteq A_j\}$，$\Delta = \{A_i \mid \forall B_j.\ A_i \not\subseteq B_j\} \cup \{B_i \mid \forall A_j.\ B_i \not\subseteq A_j\}$ とし，$|\Gamma| = \sum_{t\in\Gamma} |t|$ とする．つまり，$|\Gamma|$ はリデックス出現の重なりの面積であり，Δ は極大位置のリデックス出現の集合を表す．

$\langle m+n, |\Gamma|\rangle$ の辞書式順序に関する帰納法で Q の存在を示す．

$m = n = 0$ のとき，$\mathcal{R}^1 = \emptyset$，$\mathcal{R}^2 = \emptyset$ であるから $M = N = P$ となるので明らかに Q が存在する．$m = 0$ のとき，$\mathcal{R}^1 = \emptyset$ であるから $N = M \overset{*}{\mathrel{+\!\!\!\!+}}_{\mathcal{R}^2_n} P$ より明らかに Q が存在する．$n = 0$ の場合も同様である．

$m > 0, n > 0$ のときを考える．$\Delta = \{M_1, \dots, M_p\}$ とする．このとき $M = C[M_1, \dots, M_p]$ となるような文脈 C が存在する．さらに $M_i \mathrel{+\!\!\!\!+}_{\mathcal{R}^1_m} N_i$ かつ $M_i \mathrel{+\!\!\!\!+}_{\mathcal{R}^2_n} P_i (i = 1, \dots, p)$ となる $N_1, \dots, N_p$，$P_1, \dots, P_p$ を用いて，$N = C[N_1, \dots, N_p]$，$P = C[P_1, \dots, P_p]$ と表すことができる．このとき，全ての M_i について $N_i \mathrel{+\!\!\!\!+}_{\mathcal{R}^2_n} \cdot \overset{*}{\mathrel{+\!\!\!\!+}}_{<\mathcal{R}^2_n} Q_i$，$P_i \xrightarrow{*}_{\mathcal{R}^1_m} Q_i$ となる Q_i の存在を示すことができれば良い．

Case 1. $M_i \notin \{B_1, \dots, B_n\}$ のとき

$\{B'_1, \dots, B'_q\} = \{B_j \mid 1 \leq j \leq n,\ B'_j \subset M_i\}$ とおく．このとき $M_i = C_i[B'_1, \dots, B'_q]$，$P_i = C_i[\tilde{B_1}', \dots, \tilde{B_q}']$ とおける．つまり $M_i \overset{M_i}{\mathrel{+\!\!\!\!+}}_{\mathcal{R}^1_m} N_i$ かつ $M_i \overset{B'_1,\dots,B'_q}{\mathrel{+\!\!\!\!+}}_{\mathcal{R}^2_n} P_i$ となる．$M_i \overset{M_i}{\mathrel{+\!\!\!\!+}}_{\mathcal{R}^1_m} N_i$ は定義 2.2 から $M_i \xrightarrow{M_i}_{\mathcal{R}^1_m} N_i$ または $M_i \xrightarrow{*}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} N_i$ のいずれかの場合に分けられる．

Case 1-(a)．$M_i \xrightarrow{*}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} N_i$ のとき

$\xrightarrow{*}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} \subseteq \overset{*}{\mathrel{+\!\!\!\!+}}_{\mathcal{R}^1_{m-1}}$ であるから，$M_i \overset{*}{\mathrel{+\!\!\!\!+}}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} N_i$ と表すことができる．よって，帰納法の仮定と補題 3.4 より $N_i \mathrel{+\!\!\!\!+}_{\mathcal{R}^2_n} \cdot \overset{*}{\mathrel{+\!\!\!\!+}}_{<\mathcal{R}^2_n} Q_i$，$P_i \xrightarrow{*}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} Q_i$ となる Q_i が存在する．

Case 1-(b)．$M_i \xrightarrow{M_i}_{\mathcal{R}^1_m} N_i$ のとき

$M_i = l\theta$，$N_i = r\theta$，$\mathcal{R}^1_{m-1}\vdash c\theta$ となる条件付き書き換え規則 $l \rightarrow r \Leftarrow c \in \mathcal{R}^1$ が存在する．このとき，M_i のすべてのリデックス出現 B'_j が θ の中にあるとき，補題 3.6 より Q_i が存在する．θ の中にない B'_j が存在するときを考える．集合 X，Y を $X = \{B'_j \mid 1 \leq j \leq q,\ B'_j は\theta の中に含まれない\ \}$，$Y = \{B'_j \mid 1 \leq j \leq q,\ B'_j は\theta の中に含まれる\ \}$ とおく．このとき，それぞれの $B'_j \in X$ について

$B'_j \xrightarrow{B'_j}_{\mathcal{R}^2_n} \tilde{B_j}'$

$B'_j \xrightarrow{*}_{<\mathcal{R}^2_n} \tilde{B_j}'$

の 2 つの場合がある．

Case 1-(b)-(i)．$\exists B'_j \in X$．$B'_j \xrightarrow{B'_j}_{\mathcal{R}^2_n} \tilde{M}_i (= \tilde{B_j}')$ のとき

一般性を失わず $B'_1 \in X$ であり，$M_i \xrightarrow{B'_1}_{\mathcal{R}^2_n} \tilde{M}_i$ とする．このとき，$B'_1 = l'\theta'$，$\mathcal{R}^2_{n-1}\vdash c'\theta'$ となるような条件付き書き換え規則 $l' \rightarrow r' \Leftarrow c' \in \mathcal{R}^2$ が存在する．さらに $l \rightarrow r \Leftarrow c \in \mathcal{R}^1$ と $l' \rightarrow r' \Leftarrow c' \in \mathcal{R}^2$ には重なりがあり，$B'_1 \subset M_i$ であるから，内側条件付き危険対 $\langle v, u\rangle \Leftarrow \langle c', c\rangle \in CCP_{in}(\mathcal{R}^2, \mathcal{R}^1)$ が存在する．また $\tilde{M}_i = v\theta''$，$N_i = u\theta''$ となる θ'' が存在する．さらに定義 3.1 の (2) の危険対条件より，$\tilde{M}_i \mathrel{+\!\!\!\!+}_{\mathcal{R}^1_m} N_i$

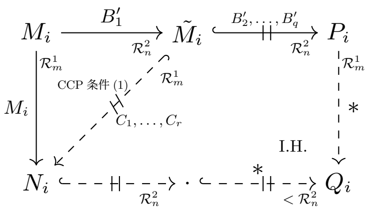

図 1　Case 1-(b)-(i) の結果

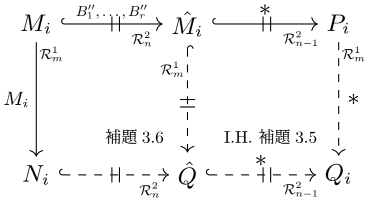

図 2　Case 1-(b)-(ii) の結果

が成立する．$\tilde{M}_i \overset{C_1,\ldots,C_r}{\mathrel{\dashv\vdash}}_{\mathcal{R}^1_m} N_i$ とする．このとき $\tilde{M}_i \overset{B'_2,\ldots,B'_q}{\mathrel{\dashv\vdash}}_{\mathcal{R}^2_n} P_i$ に注意して，$\Gamma' = \{C_i \mid \exists B'_j(2 \le j \le q).\ C_i \subseteq B'_j\} \cup \{B'_i \mid 2 \le i \le q, \exists C_j.\ B'_i \subseteq C_j\}$ とする．つまり Γ' は $C_1,\ldots,C_r$ と $B'_2,\ldots,B'_j$ の重なりを表す．$\forall \tilde{B} \in \Gamma' \exists B'_j(2 \le j \le q).\ \tilde{B} \subseteq B'_j$ だから $|\Gamma'| \le \sum_{j=2}^q |B'_j|$ が成立する．以上より，$|\Gamma'| \le \sum_{j=2}^q |B'_j| < \sum_{j=1}^q |B'_j| \le |\Gamma|$ となるので，帰納法の仮定から $N_i \mathrel{\dashv\vdash}_{\mathcal{R}^2_n} \cdot \overset{*}{\mathrel{\dashv\vdash}}_{<\mathcal{R}^2_n} Q_i$，$P_i \overset{*}{\to}_{\mathcal{R}^1_m} Q_i$ となる Q_i が存在する (図 1).

Case 1-(b)-(ii)．$\forall B'_j \in X.\ B'_j \overset{*}{\to}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} \tilde{M}_i (= \tilde{B_j}')$ のとき

今 $M_i \overset{B'_1,\ldots,B'_q}{\mathrel{\dashv\vdash}}_{\mathcal{R}^2_n} P_i$ であり，$B'_1,\ldots,B'_q$ は並列だから $B'_j \in Y (1 \le i \le q)$ を先に書き換えても良い．つまり $Y = \{B''_1,\ldots,B''_r\}$ とおくと，$M_i \overset{B''_1,\ldots,B''_r}{\mathrel{\dashv\vdash}}_{\mathcal{R}^2_n} \hat{M}_i \overset{*}{\to}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} P_i$ と表すことができる．ここでそれぞれの B''_j は代入 θ の中にあるから，補題 3.6 より，$N_i \mathrel{\dashv\vdash}_{\mathcal{R}^2_n} \hat{Q}$，$\hat{M}_i \to_{\mathcal{R}^1_m} \hat{Q}$ となるような $\hat{Q}$ が存在する．さらに $\to_{\mathcal{R}^1_m} \subseteq \mathrel{\dashv\vdash}_{\mathcal{R}^1_m}$，$\overset{*}{\to}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} \subseteq \overset{*}{\mathrel{\dashv\vdash}}_{\mathcal{R}^2_{n-1}}$ であることに注意して，$\hat{Q} \leftarrow_{\mathcal{R}^1_m} \hat{M}_i \overset{*}{\to}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} P_i$ について帰納法の仮定と補題 3.5 を適用すると $\hat{Q} \overset{*}{\mathrel{\dashv\vdash}}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} Q_i$，$P_i \overset{*}{\to}_{\mathcal{R}^1_m} Q_i$ となる Q_i が存在が示される (図 2).

Case 2．$M_i \in \{B_1,\ldots,B_n\}$ のとき

$\{A'_1,\ldots,A'_q\} = \{A_j \mid 1 \le j \le n,\ A'_j \subseteq M_i\}$ とおく．このとき $M_i = C_i[A'_1,\ldots,A'_q]$，$N_i = C_i[\tilde{A_1}',\ldots,\tilde{A_q}']$ とおける．つまり $M_i \overset{A'_1,\ldots,A'_q}{\mathrel{\dashv\vdash}}_{\mathcal{R}^1_m} N_i$ かつ $M_i \overset{M_i}{\mathrel{\dashv\vdash}}_{\mathcal{R}^2_n} P_i$ となる．$M_i \overset{M_i}{\mathrel{\dashv\vdash}}_{\mathcal{R}^2_n} P_i$ は定義 2.2 から $M_i \overset{M_i}{\to}_{\mathcal{R}^2_n} P_i$ または $M_i \overset{*}{\to}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} P_i$ のいずれかの場合に分けられる．

Case 2-(a)．$M_i \overset{*}{\to}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} P_i$ のとき

$\overset{*}{\to}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} \subseteq \overset{*}{\mathrel{\dashv\vdash}}_{\mathcal{R}^2_{n-1}}$ であるから，$M_i \overset{*}{\mathrel{\dashv\vdash}}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} P_i$ と表すことができる．よって，帰納法の仮定と補題 3.5 より $N_i \overset{*}{\mathrel{\dashv\vdash}}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} Q_i$，$P_i \overset{*}{\to}_{\mathcal{R}^1_m} Q_i$ となる Q_i が存在する．

Case 2-(b)．$M_i \overset{M_i}{\to}_{\mathcal{R}^2_n} P_i$ のとき

$M_i = l'\theta'$，$N_i = r'\theta'$，$\mathcal{R}^2_{n-1} \vdash c'\theta'$ となる条件付き書き換え規則 $l' \to r' \Leftarrow c' \in \mathcal{R}^2$ が存在する．このとき，M_i のすべてのリデックス出現 A'_j が θ' の中にあるとき，$\to_{\mathcal{R}^2_n} \subseteq \mathrel{\dashv\vdash}_{\mathcal{R}^2_n} \cdot \overset{*}{\mathrel{\dashv\vdash}}_{<\mathcal{R}^2_n}$，$\mathrel{\dashv\vdash}_{\mathcal{R}^1_m} \subseteq \overset{*}{\to}_{\mathcal{R}^1_m}$ に注意することで補題 3.6 より Q_i の存在が示される．θ' の中にない A'_j が存在するときを考える．集合 X'，Y' を $X' = \{A'_j \mid 1 \le j \le q,\ A'_j \text{は} \theta' \text{の中に含まれない}\}$，$Y' = \{A'_j \mid 1 \le j \le q,\ A'_j \text{は} \theta' \text{の中に含まれる}\}$ とおく．このとき，それぞれの $A'_j \in X'$ について

$A'_j \overset{A'_j}{\to}_{\mathcal{R}^1_m} \tilde{A_j}'$

$A'_j \overset{*}{\to}_{<\mathcal{R}^1_m} \tilde{A_j}'$

の 2 つの場合がある．

Case 2-(b)-(i)．$\exists A'_j \in X'.\ A'_j \overset{A'_j}{\to}_{\mathcal{R}^1_m} \tilde{M}_i = (\tilde{A_j}')$ のとき

一般性を失わず $A'_1 \in X'$ であり，$M_i \overset{A'_1}{\to}_{\mathcal{R}^1_m} \tilde{M}_i$ とする．このとき，$A'_1 = l\theta$，$\mathcal{R}^1_{m-1} \vdash c\theta$ となるような条件付き書き換え規則 $l \to r \Leftarrow c \in \mathcal{R}^1$ が存在する．このとき，さらに

(α) $A'_1 = M_i$ かつ $l \to r \Leftarrow c \in \mathcal{R}^1$ と $l' \to r' \Leftarrow c' \in \mathcal{R}^2$ が同じ書き換え規則

(β) $A'_1 \ne M_i$ または $l \to r \Leftarrow c \in \mathcal{R}^1$ と $l' \to r' \Leftarrow c' \in \mathcal{R}^2$ が異なる書き換え規則

の 2 つの場合に分ける．

(α) のとき，$M_i \overset{M_i = A'_1}{\to}_{\mathcal{R}^1_m} \tilde{M}_i = N_i$，$M_i \overset{M_i}{\to}_{\mathcal{R}^2_n} P_i$ である．$l\theta = M_i = l\theta'$ から $\forall x \in \mathcal{V}(l).\ x\theta = x\theta'$ なので，$\mathcal{V}(r) \subseteq \mathcal{V}(l)$ ならば $r\theta = r\theta' = Q_i$ となる．$\mathcal{V}(r) \not\subseteq \mathcal{V}(l)$ であるとき，つまり r が外変数を含む

ときを考える．このとき，以下のような (a)〜(c) の性質を満たす代入 ρ_i の存在を $i \in \{0,\dots,j\}$ についての帰納法で示すことにより，Q_i の存在を証明する．ここで $c = s_1 \approx t_1,\dots,s_i \approx t_j$ とし，c_i は $s_1 \approx t_1,\dots,s_i \approx t_i (1 \le i \le j)$ を表す．

(a) $\rho_i = \theta = \theta'[\mathcal{V}(l)]$

(b) $dom(\rho_i) \subseteq \mathcal{V}(l) \cup \mathcal{V}(c_i)$

(c) $\forall x \in \mathcal{V}(l) \cup \mathcal{V}(c_i)$.
$x\theta \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} x\rho_i$, $x\theta' \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} x\rho_i$

$i = 0$ のとき，$\rho_0 = \theta|_{\mathcal{V}(l)}$ とすれば (a)〜(c) を満たす．

$i > 0$ のとき，条件 $s_i \approx t_i$ について考える．r が外変数を含み $\mathcal{R}^1$，$\mathcal{R}^2$ は真指向式だから，$\mathcal{V}(s_i) \subseteq \mathcal{V}(l) \cup \mathcal{V}(c_{i-1})$ が成立する．よって帰納法の仮定 (c) より $s_i\theta \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} s_i\rho_{i-1}$，$s_i\theta' \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} s_i\rho_{i-1}$ が成立する．さらに $t_i\theta' \overset{*}{\hookleftarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} s_i\theta' \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} s_i\rho_{i-1}$ と $s_i\rho_{i-1} \overset{*}{\hookleftarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} s_i\theta \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} t_i\theta$ にそれぞれ帰納法の仮定と補題 3.5 を適用することにより $t_i\theta' \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} q' \overset{*}{\hookleftarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} s_i\rho_{i-1}$，$s_i\rho_{i-1} \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} r' \overset{*}{\hookleftarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} t_i\theta$ となる q'，r' の存在が示される．これより，$q' \overset{*}{\hookleftarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} s_i\rho_{i-1} \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} r'$ に帰納法の仮定と補題 3.5 を適用することで $q' \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} s' \overset{*}{\hookleftarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} r'$ となる s' の存在を示すことができる．すなわち $t_i\theta \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} s'$，$t_i\theta' \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} s'$ である．このとき，$\mathcal{R}^1$，$\mathcal{R}^2$ は右安定より t_i は基底 $\mathcal{R}_u$ 正規形か線形構成子項のいずれかである．t_i が基底 $\mathcal{R}_u$ 正規形のとき $t_i\theta = t_i\theta' = s'$ となり代入 $\rho_i = \rho_{i-1}$ は (a)〜(c) を満たす．t_i が線形構成子項のとき $dom(\rho) \subseteq \mathcal{V}(t_i)$ であり，$s' = t_i\rho$ となるような代入 ρ が存在する．また，右安定より $\mathcal{V}(t_i) \cap (\mathcal{V}(l) \cup \mathcal{V}(c_{i-1})) = \emptyset$ である．これより $dom(\rho) \cap dom(\rho_{i-1}) = \emptyset$ である．したがって，$\rho_i = \rho_{i-1} \cup \rho$ は代入であり，ρ_i は (a)〜(c) を満たす．以上より，代入 ρ_i の存在が示された．

代入 ρ_j について考える．$\mathcal{R}^1$，$\mathcal{R}^2$ は 3-CTRS だから $\mathcal{V}(r) \subseteq \mathcal{V}(l) \cup \mathcal{V}(c_j)$ である．よって，(c) より $N_i = r\theta \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} r\rho_j$，$P_i = r\theta' \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} r\rho_j$ が成立する．$r\rho_j = Q_i$ とすれば，$N_i \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} Q_i$，$P_i \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} Q_i$ となる Q_i が存在する．このとき

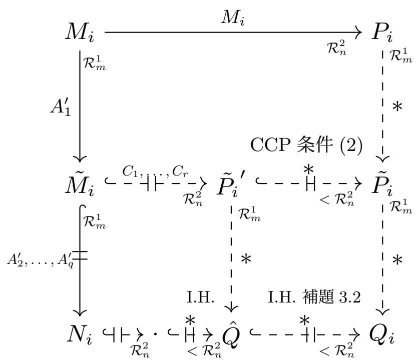

図 3 (β) の結果

$\overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^2_{n-1}} \subseteq \hookrightarrow\!\!\!\!\!\|_{\mathcal{R}^2_n} \cdot \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{<\mathcal{R}^2_n}$，$\overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} \subseteq \overset{*}{\rightarrow}_{\mathcal{R}^1_m}$ に注意することで題意が成立する．

(β) のとき，$l \to r \Leftarrow c \in \mathcal{R}^1$ と $l' \to r' \Leftarrow c' \in \mathcal{R}^2$ には重なりがあり，$A'_1 \subseteq M_i$ であるから，条件付き危険対 $\langle u, v\rangle \Leftarrow \langle c, c'\rangle \in CCP(\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2)$ が存在する．また $M_i \overset{A'_1}{\rightarrow}_{\mathcal{R}^1_m} \tilde{M}_i$ とすると，$\tilde{M}_i = u\theta''$，$P_i = v\theta''$ となる θ'' が存在する．さらに定義 3.1 の (1) の危険対条件より，ある項 s が存在し，$\tilde{P}_i = s\theta''$ とすると $\tilde{M}_i \hookrightarrow\!\!\!\!\!\|_{\mathcal{R}^2_n} \tilde{P}_i{}' \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{<\mathcal{R}^2_n} \tilde{P}_i$，$P_i \overset{*}{\rightarrow}_{\mathcal{R}^1_m} \tilde{P}_i$ が成立する．$\tilde{M}_i \overset{C_1,\dots,C_r}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^2_n} \tilde{P}_i{}'$ とする．このとき $\tilde{M}_i \overset{A'_2,\dots,A'_q}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^2_n} N_i$ に注意して，$\Gamma' = \{C_i \mid \exists A'_j (2 \le j \le q).\ C_i \subseteq A'_j\} \cup \{A'_i \mid 2 \le i \le q, \exists C_j.\ A'_i \subseteq C_j\}$ とする．つまり Γ' は $C_1,\dots,C_r$ と $A'_2,\dots,A'_j$ の重なりを表す．$\forall \tilde{A} \in \Gamma' \exists A'_j (2 \le j \le q).\ \tilde{A} \subseteq A'_j$ だから $|\Gamma'| \le \sum_{j=2}^{q} |A'_j|$ が成立する．以上より，$|\Gamma'| \le \sum_{j=2}^{q} |A'_j| < \sum_{j=1}^{q} |A'_j| \le |\Gamma|$ となるので，帰納法の仮定から $N_i \hookrightarrow\!\!\!\!\!\|_{\mathcal{R}^2_n} \cdot \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{<\mathcal{R}^2_n} \hat{Q}_i$，$\tilde{P}_i \overset{*}{\rightarrow}_{\mathcal{R}^1_m} \hat{Q}_i$ となる $\hat{Q}_i$ が存在する．さらに帰納法の仮定と補題 3.2 より $\hat{Q} \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{<\mathcal{R}^2_n} Q_i \overset{*}{\leftarrow}_{\mathcal{R}^1_m} \tilde{P}_i$ となる Q_i が存在する．以上より，$N_i \hookrightarrow\!\!\!\!\!\|_{\mathcal{R}^2_n} \cdot \overset{*}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{<\mathcal{R}^2_n} Q_i$，$\tilde{P}_i \overset{*}{\rightarrow}_{\mathcal{R}^1_m} Q_i$ となる (図 3)．

Case 2-(b)-(ii). $\forall A'_j \in X'.\ A'_j \overset{*}{\rightarrow}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} \tilde{M}_i (= \tilde{A}_j{}')$ のとき

今 $M_i \overset{A'_1,\dots,A'_q}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^2_n} N_i$ であり，$A'_1,\dots,A'_q$ は並列だから $A'_j \in Y' (1 \le i \le q)$ を先に書き換えても良い．つまり $Y' = \{A''_1,\dots,A''_r\}$ とおくと，$M_i \overset{A''_1,\dots,A''_r}{\hookrightarrow\!\!\!\!\!\|}_{\mathcal{R}^1_m}$

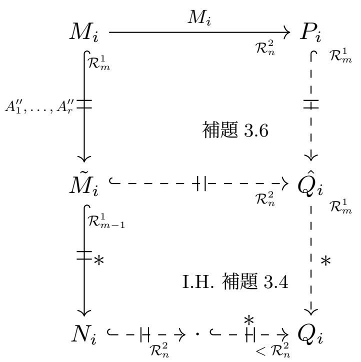

図 4　Case 2-(b)-(ii) の結果

$\hat{M}_i \xrightarrow{*}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} N_i$ と表すことができる．ここでそれぞれの A''_j は代入 θ' の中にあるから，補題 3.6 より，$\hat{M}_i \to_{\mathcal{R}^2_n} \hat{Q}$，$P_i \mathrel{\parallel\!\!\!\to}_{\mathcal{R}^1_m} \hat{Q}$ となるような $\hat{Q}$ が存在する．さらに $\to_{\mathcal{R}^2_n} \subseteq \mathrel{\parallel\!\!\!\to}_{\mathcal{R}^2_n}$，$\xrightarrow{*}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} \subseteq \overset{*}{\mathrel{\parallel\!\!\!\to}}_{\mathcal{R}^1_{m-1}}$ であることに注意して，$N_i \xleftarrow{*}_{\mathcal{R}^1_{m-1}} \hat{M}_i \to_{\mathcal{R}^2_n} \hat{Q}$ について帰納法の仮定と補題 3.4 を適用すると $N_i \mathrel{\parallel\!\!\!\to}_{\mathcal{R}^2_n} \cdot \overset{*}{\mathrel{\parallel\!\!\!\to}}_{<\mathcal{R}^2_n} Q_i$，$\hat{Q} \xrightarrow{*}_{\mathcal{R}^1_m} Q_i$ となる Q_i が存在が示される．このとき，$\mathrel{\parallel\!\!\!\to}_{\mathcal{R}^1_m} \cdot \xrightarrow{*}_{\mathcal{R}^1_m} \subseteq \xrightarrow{*}_{\mathcal{R}^1_m}$ に注意することで題意が成立する．(図 4).

以上 Case 1，Case 2 より $Q = C[Q_1, \ldots, Q_p]$ とすると，$N \mathrel{\parallel\!\!\!\to}_{\mathcal{R}^2_n} \cdot \overset{*}{\mathrel{\parallel\!\!\!\to}}_{<\mathcal{R}^2_n} Q$，$P \xrightarrow{*}_{\mathcal{R}^1_m} Q$ となる Q が存在することが示された．したがって，補題 3.3 より $\mathcal{R}^1$ と $\mathcal{R}^2$ は階層可換性を持つ． □

定理 3.1 で $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}^2$ とおくことで以下の系が得られる．

系 3.1 $\mathcal{R}$ は左線形，真指向式，右安定の 3-CTRS とし，さらに以下の危険対条件を満たすとする．

(1) 任意の $\langle u, v\rangle \Leftarrow \langle c, c'\rangle \in CCP_{out}(\mathcal{R})$ について $\forall m, n \geq 1$，$\forall \rho$．$\mathcal{R}_{m-1} \vdash c\rho$ かつ $\mathcal{R}_{n-1} \vdash c'\rho$ ならば $\exists s$．($u\rho \mathrel{\parallel\!\!\!\to}_{\mathcal{R}_n} \cdot \overset{*}{\mathrel{\parallel\!\!\!\to}}_{<\mathcal{R}_n} s$ かつ $v\rho \xrightarrow{*}_{\mathcal{R}_m} s$) が成立する．

(2) 任意の $\langle v, u\rangle \Leftarrow \langle c', c\rangle \in CCP_{in}(\mathcal{R})$ について $\forall m, n \geq 1$，$\forall \rho$．$\mathcal{R}_{m-1} \vdash c\rho$ かつ $\mathcal{R}_{n-1} \vdash c'\rho$ ならば $v\rho \mathrel{\parallel\!\!\!\to}_{\mathcal{R}_m} u\rho$ が成立する．

このとき，$\mathcal{R}$ は階層合流性を持つ．

これは命題 2.3 の拡張となっている．また，容易に確認できるように定理 3.1 で $\mathcal{R}^1$，$\mathcal{R}^2$ を TRS とすることで命題 2.1 も得られる．

4 具体例

例 4.1 以下のような CTRS $\mathcal{R}^1$，$\mathcal{R}^2$ を考える．これはは文献 [2] の例を参考に階層可換性を考えたものである．

$$\mathcal{R}^1 = \left\{ \begin{array}{lll} p(x) \to q(x) & & \\ r(x) \to s(p(x)) & & \\ s(x) \to f(y) & \Leftarrow & p(x) \approx y \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{R}^2 = \left\{ \begin{array}{lll} p(x) \to r(x) & & \\ q(x) \to s(p(x)) & & \\ s(x) \to f(y) & \Leftarrow & p(x) \approx y \end{array} \right\}$$

$CCP(\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2) = \{\langle q(x), r(x)\rangle \Leftarrow \langle\{\}, \{\}\rangle\}$，$CCP_{in}(\mathcal{R}^2, \mathcal{R}^1) = \{\}$ であり，$q(x) \to_{\mathcal{R}^2} s(p(x))$，$r(x) \to_{\mathcal{R}^1} s(p(x))$ となるので定義 3.1 の (1) を満たす．さらに定理 3.1 の左線形等の条件も満たすため，$\mathcal{R}^1$ と $\mathcal{R}^2$ は階層可換性を持つ．また $\mathcal{R}^1 \cup \mathcal{R}^2$ 同士の階層可換性を考えることは，階層合流性を考えることと同値である．2 つの $\mathcal{R}^1 \cup \mathcal{R}^2$ を上記と同様に危険対条件を考えると階層可換性を持つ．したがって $\mathcal{R}^1 \cup \mathcal{R}^2$ は階層合流性も満たす [2]．このように階層可換性は階層合流性の一般化と言える．

例 4.2 以下のような CTRS $\mathcal{R}^1$，$\mathcal{R}^2$ を考える．これはは文献 [4] の例を参考にし階層可換性を考えたものである．

$$\mathcal{R}^1 = \left\{ \begin{array}{l} f(x) \to g(f(c)) \\ h(x) \to p(h(x)) \\ b(x) \to c \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{R}^2 = \left\{ \begin{array}{lll} f(x) \to h(f(x)) & \Leftarrow & b(x) \approx y \\ g(x) \to p(p(h(x))) & & \\ b(x) \to c & & \end{array} \right\}$$

$CCP(\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2) = \{\langle g(f(c)), h(f(y))\rangle \Leftarrow \langle\{\}, \{b(x) \approx y\}, \langle c, c\rangle \Leftarrow \langle\{\}, \{\}\rangle\}$ であり，$CCP_{in}(\mathcal{R}^2, \mathcal{R}^1) = \{\}$ である．今，$\mathcal{R}^2_{n-1} \vdash b(x)\rho \approx y\rho$ とする．つまり $b(x)\rho \to_{\mathcal{R}^2_{n-1}} y\rho$ である．このとき根位置での書き換えがある場合とない場合に分ける．

根位置での書き換えがあるとき．$\mathcal{R}^2$ の規則から，$y\rho = c$ となる．よって $\mathcal{R}^2_1 \subseteq \mathcal{R}^2_n$，$\mathcal{R}^1_1 \subseteq \mathcal{R}^1_m$ に注意して $g(f(c)) \to_{\mathcal{R}^2_1} p(p(h(f(c))))$，$h(f(c)) \to_{\mathcal{R}^1_1} p(h(f(c))) \to_{\mathcal{R}^1_1} p(p(h(f(c))))$ よって，定義 3.1 の

(1) を満たす.

根位置での書き換えがないとき．ある w が存在して $y\rho = b(w)$ となる．よって $\mathcal{R}_1^2 \subseteq \mathcal{R}_n^2$, $\mathcal{R}_1^1 \subseteq \mathcal{R}_m^1$ に注意して，$g(f(c)) \to_{\mathcal{R}_1^2} p(p(h(f(c))))$, $h(f(b(w))) \to_{\mathcal{R}_1^1} f(c) \to_{\mathcal{R}_1^1} p(h(f(c))) \to_{\mathcal{R}_1^1} p(p(h(f(c))))$ よって定義 3.1 の (1) を満たす.

以上より，いずれの場合も定義 3.1 の (1) を満たす．さらに定理 3.1 の左線形等の条件も満たすため，$\mathcal{R}^1$ と $\mathcal{R}^2$ は階層可換性を持つ．また文献 [4] にあるような TRS についても本稿の定理 3.1 は適用可能であり TRS の可換性検証にも用いることができる.

5 まとめと今後の課題

本稿にて，左線形，真指向式，右安定の 3-CTRS に危険対条件を与えることにより CTRS は階層可換性を持つことを証明した．本稿の危険対条件は文献 [4] の危険対条件を包含しているため，TRS の可換性条件を，CTRS の階層可換性条件に拡張したと言える．本稿の CTRS に関する階層可換性の判定手続きを実装することで，実際に条件付き書き換え規則が多く含まれるような複雑な CTRS の検証に用いることができるか検討することは今後の課題である．さらに，階層可換性を示したことで可換性の証明と考えることもができるが，直接 CTRS の可換性を示す証明法は知られていない．文献 [5] などにある可換性の証明法を CTRS に応用できるか検討して，直接 CTRS の可換性を証明することも今後の課題である.

謝辞 多くの助言や示唆を頂きました，研究室の方々に感謝いたします．なお，本研究は一部日本学術振興会科学研究費 21K11750 の補助を受けて行われた.

参考文献

[1] Gmeiner, K., Nishida, N., and Gramlich, B.: Proving confluence of conditional term rewriting systems via unravelings, *Proc. of 2nd IWC*, 2012, pp. 35–40.

[2] 加賀谷有輝, 青戸等人: 条件付き項書き換えシステムの階層合流性証明法, 第 *22* 回プログラミングおよびプログラミング言語ワークショップ *(PPL 2020)* 論文集, (2020).

[3] Suzuki, T., Middeldorp, A., and Ida, T.: Level-confluence of conditional rewrite systems with extra variables in right-hand sides, *Proc. of 6th RTA*, LNCS, Vol. 914, Springer-Verlag, 1995, pp. 179–193.

[4] Toyama, Y.: Commutativity of term rewriting systems, *Programming of Future Generation Computer II*, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 393–407.

[5] van Oostrom, V.: Confluence by Decreasing Diagrams Converted, *Proc. of 19th RTA*, LNCS, Vol. 5117, Springer-Verlag, 2008, pp. 306–320.