Jaffar のアルゴリズムに基づく正則項の単一化

石塚 守　青戸等人

正則項とは，有限個の部分項を持つ無限項のことであり，有限項の等式を用いて表すことができる．正則項の単一化は，その正則項を表す有限項の等式に対して，無限項上での単一化手続きを適用することで実現できる．このような正則項の単一化手続きの正当性については，有限項の無限項上での単一化手続きの正当性を利用した間接的な証明が岩見 & 青戸 (2011) で与えられている．本報告では，有限項の無限項上での効率的な単一化手続きである Jaffar のアルゴリズム (Jaffar,1984) を利用した正則項の単一化手続きを与えるとともに，その正当性の直接的な証明を与える．

1 はじめに

単一化とは，2 つの項を適切な代入によって同一の項にすることであり，関数型言語の型推論や項書き換えシステムにおける性質の証明など様々な分野において用いられている．有限項の単一化については，その手続きや正当性はすでに知られている．単一化の拡張として，無限項の中でもよい性質をもった正則項 [1] の単一化が挙げられる．正則項の単一化は，その正則項を表す有限項の等式に対し，無限項上の単一化手続きを適用することで実現できる [3].

本報告では，まず，有限項の無限項上での効率的な単一化手続きである Jaffar のアルゴリズム [2] を導出規則によって形式化する．そして，その形式化を利用した，単一化手続きの正当性を証明を与える．次に，この手続きに直接に接続する形をもつ，正則項の単一化手続きを与え，その正当性を示す．

2 準備

本報告で用いる定義および記法を紹介する．

関数記号の集合を $\mathcal{F}$，変数の集合を $\mathcal{V}$ とし，$\mathcal{F} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ とする．ここで，それぞれの関数記号 f の引数の個数は決まっているものとし，この数を $\mathrm{arity}(f)$ と表す．$\mathrm{arity}(f) = 0$ である関数記号 f を定数とよび，$\mathrm{arity}(f) = n$ である関数記号の集合を $\mathcal{F}_n$ とかく．

$\mathbb{N}_+$ を自然数の集合とし，その有限列の集合を $\mathbb{N}_+^*$ と表す．空列を ϵ で表し，有限列 $p, q \in \mathbb{N}_+^*$ の連結を $p.q$ とかく．$\mathbb{N}_+^*$ から $\mathcal{F} \cup \mathcal{V}$ への部分関数 t のうち，$t(\epsilon)$ が定義されており，かつ，$t(p.i)$ $(i \in \mathbb{N})$ が定義されているとき，その時に限り，ある n について，$t(p) \in \mathcal{F}_n$ かつ $1 \leq i \leq n$ となるものを無限項をいう．$\mathcal{F}$ と $\mathcal{V}$ からなる無限項の集合を $T_{inf}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ と記す．以下では，無限項を項とよぶ．t の定義域を項 t の位置の集合とよび，$\mathrm{Pos}(t)$ で表わす．特に，位置 ϵ を根位置とよぶ．$\mathrm{Pos}(t)$ が有限集合のとき，項 t を有限項とよぶ．$t(p)$ を項 t の位置 p にある記号とよぶ．特に，項の根位置にある記号を根記号とよび，$\mathrm{root}(t)$ で表す．項に出現する変数の集合を $\mathcal{V}(t)$ で表す．位置 p の部分項 $t|_p$ を，$t|_p(q) = t(p.q)$ により定義する．

関数 $\sigma : \mathcal{V} \to T_{inf}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ を代入とよぶ．このときの σ の定義域 $\{x \mid \sigma(x) \neq x\}$ を $\mathrm{dom}(\sigma)$ と記す．ここで，項 t に対して代入 σ を行った結果を $\sigma(t)$ とかく．$\mathrm{dom}(\sigma)$ が有限で，かつ任意の $x \in \mathrm{dom}(\sigma)$ について $\sigma(x)$ が有限となるものを有限代入とよぶ．簡単

Unification of Rational Terms based on Jaffar's Algorithm.

Mamoru Ishizuka,Takahito Aoto, 新潟大学大学院 自然科学研究科, Graduate School of Science and Technology, Niigata University.

のために，$\sigma(t)$ を $t\sigma$ と記す場合もある．

ホールとよばれる特殊な定数 $\square \notin \mathcal{F} \cup \mathcal{V}$ を考える．$T_{inf}(\mathcal{F} \cup \{\square\}, \mathcal{V})$ の要素で，項に出現する $\square$ の数が有限であるものを文脈とよぶ．文脈 $C \in T_{inf}(\mathcal{F} \cup \{\square\}, \mathcal{V})$ が $\{p_1, \ldots, p_n\} = \{p \in \mathrm{Pos}(C) \mid C(p) = \square\}$ かつ任意の $i < j$ について p_i が p_j の左に位置するとき，C を $C[]_{p_1,\ldots,p_n}$ と記す．文脈 $C[]_{p_1,\ldots,p_n}$ と項 $t_1, \ldots, t_n$ について，$p_1, \ldots, p_n$ にある $\square$ を左から順に $t_1, \ldots, t_n$ に置き換えて得られる項 t を $C[t_1, \ldots, t_n]_{p_1,\ldots,p_n}$ で表す．

等式を $s \approx t$ と記す．ここで，$s, t \in T_{inf}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ とする．等式 $s \approx t$ の左辺を s，右辺を t とし，左辺と右辺を区別する．代入 σ を等式集合 $\{x \approx \sigma(x) \mid x \in \mathrm{dom}(\sigma)\}$ とみなすこともある．項 s, t が単一化可能であるとは，$s\sigma = t\sigma$ となるような代入 σ が存在することをいう．この代入 σ を項 s, t の単一化子とよぶ．代入上の関係 $\precsim$ を次のように定義する：$\sigma \precsim \tau \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \rho.\ \rho \circ \sigma = \tau$．この $\precsim$ は擬順序である．代入 σ が項 s, t の最汎単一化子であるとは，σ が項 s, t の単一化子であり，項 s, t の任意の単一化子 ρ について，$\sigma \precsim \rho$ となるときをいう．

2 項関係 $>$ が整礎であるとは，無限下降列 $a_1 > a_2 > \cdots$ が存在しないときをいう．

3 Jaffar のアルゴリズムの形式化と正しさ

正則項の単一化手続きは，その正則項の有限表現について，無限項上での単一化を行うことで実現可能である．ここでは，有限項の無限項上での単一化に Jaffar の手法を用いる．本節では，その Jaffar のアルゴリズムをいくつかの導出規則によって形式化し，正しさを示す．本節では，項は有限項のことをさす．

定義 1 (項集合の無矛盾性) 項の有限集合 T が無矛盾であるとは，以下を満たすことをいう．

(1) 任意の $s, t \in T \setminus \mathcal{V}$ について，$s(\epsilon) = t(\epsilon)$,

(2) $i = 1, \ldots, \mathrm{arity}(s(\epsilon))$ について，$T_i = \{s|_i \mid s \in T \setminus \mathcal{V}\}$ とおくとき，T_i は無矛盾．

次に，無矛盾な項集合に対する Com 関数と Fro 関数の定義を与える．これらの定義では，空でない無矛盾な項集合 $T = \{t_1, \ldots, t_k\}$ について，以下の場合分けを用いる．

(a) $T \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ の場合．このとき，集合 $T \cap \mathcal{V}$ における最小のインデックスを i とおき，変数 t_i を x とおく．

(b) $t_1, \ldots, t_k$ が同一の定数の場合．このとき，この定数を f とおく．

(c) (a),(b) 以外の場合．このとき，$i = 1, \ldots, k$ について，$t_i = f(u_1^i, u_2^i, \ldots, u_n^i)$ とおく．

定義 2 (Com 関数と Fro 関数) $T = \{t_1, \ldots, t_k\}$ を空でない無矛盾な項集合とする．このとき，

$$\mathrm{Com(T)} = \begin{cases} x & \text{((a) の場合)} \\ f & \text{((b) の場合)} \\ f(s_1, \ldots, s_n) & \text{((c) の場合)} \\ \quad \text{ここで，} s_j = \mathrm{Com}(\{u_j^i \mid 1 \leq i \leq k\}) & \end{cases}$$

$$\mathrm{Fro}(T) = \begin{cases} \{x \approx t_j \mid 1 \leq j \leq k, i \neq j\} & \text{((a) の場合)} \\ \emptyset & \text{((b) の場合)} \\ \bigcup_{1 \leq j \leq n} E_j & \text{((c) の場合)} \\ \text{ここで，} E_j = \mathrm{Fro}(\{u_j^i \mid 1 \leq i \leq k\}) & \end{cases}$$

定義 3 (システム) 変数項の有限集合 $V_1, \ldots, V_n$，非変数項集合 $U_1, \ldots, U_n$ について，以下の条件を満たすとき，項集合の対の集合 $\{(V_i, U_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$ をシステムとよぶ．

$$\bigcup_{1 \leq j \leq n} \{\mathcal{V}(t) \mid t \in U_j\} \subseteq \bigcup_{1 \leq j \leq n} V_j$$

システム Φ において，ある $(V, U) \in \Phi$ が存在して U が無矛盾でないとき，システム Φ は矛盾であるという．

定義 4 (システムの解) 代入 θ が項集合 U の解であるとは，任意の $u, v \in U$ について，$u\theta = v\theta$ となるときをいう．代入 θ が項集合の組 (V, U) の解であるとは，代入 θ が $V \cup U$ の解であるときをいう．代入 θ がシステム Φ の解であるとは，任意の $(V, U) \in \Phi$ について，θ が (V, U) の解であるときをいう．

Jaffar の単一化手続きは，システムに関する導出として形式化することができる．以下の定義で，その導出規則において用いる記法を導入する．

定義 5 Φ をシステムとする．ある $(V, U) \in \Phi$ が存

Merge

$$\frac{[(V_1,U_1),\ldots,(V_n,U_n))](=\Phi)}{[(V_i,U_i)\mid i\notin\{k,l\}]\cup[(V_k\cup V_l,U_k\cup U_l)]}\; x\in V_k, y\in V_l, k\neq l, x\underset{\Phi}{\approx} y$$

Common-add

$$\frac{[(V_1,U_1),\ldots,(V_n,U_n)]}{[\mathrm{Vfro}(V_i,U_i,U_k)\mid i\neq k]\cup[\mathrm{Vfro}(V_k,\{\mathrm{Com}(U_k)\},U_k)]}\;|U_k|>1$$

Clash

$$\frac{\Phi}{\perp}\;\Phi\text{ が矛盾}$$

図 1　単一化の導出規則

在して，$x\approx v\in\mathrm{Fro}(U)$ となるとき，$x\underset{\Phi}{\approx}v$ と記す．

定義 6 (Vfro 関数) 変数集合 V_i，非変数集合 U_i，U_k について，非変数集合と変数集合の組 $\mathrm{Vfro}(V_i,U_i,U_k)$ を，$\mathrm{Vfro}(V_i,U_i,U_k)=$

$$(V_i\cup\{t\in\mathcal{V}\mid x\approx t\in\mathrm{Fro}(U_k),x\in V_i\},$$
$$U_i\cup\{t\notin\mathcal{V}\mid x\approx t\in\mathrm{Fro}(U_k),x\in V_i\})$$

により定義する．

定義 7 (導出規則) Jaffar の単一化手続きを形式化した導出規則は，図 1 に与えた Merge, Common-add, Clash の 3 つの規則で与えられる．

以下では，導出の前後のシステムが単一化子を保存することを示す．まず，そのために必要な補題を用意する．

補題 1 U を無矛盾な項集合とする．このとき，代入 θ が U の解となるとき，そのときに限り，任意の $u\approx v\in\mathrm{Fro}(U)$ について $u\theta=v\theta$.

(証明) U に含まれる関数記号の出現の数に関する帰納法で示す．2 つの場合に分けて証明する．

- U が変数を含む場合．このとき，任意の $u\approx v\in\mathrm{Fro}(U)$ について，$u,v\in U$．よって，代入 θ が U の解ならば，任意の $u\approx v\in\mathrm{Fro}(U)$ について $u\theta=v\theta$．逆に，任意の $u\approx v\in\mathrm{Fro}(U)$ について $u\theta=v\theta$ ならば，任意の $t\in U$ について，$x\theta=t\theta$ となるから，代入 θ が U の解．
- U が変数を含まない場合．U が定数項からなる場合は自明．それ以外の場合は，$U=\{t_1,\ldots,t_k\}$，$t_i=f(u^i_1,\ldots,u^i_n)$ とおける．このとき，任意の i,j について $t_i\theta=t_j\theta\Leftrightarrow$ 任意の i,j について $f(u^i_1,\ldots,u^i_n)\theta=f(u^j_1,\ldots,u^j_n)\theta\Leftrightarrow$ 任意の i,j について $u^i_l\theta=u^j_l\theta$ $(1\le l\le n)\Leftrightarrow\theta$ は $\{u^i_l\mid 1\le i\le k\}$ の解 $(1\le l\le n)$．これは，帰納法の仮定より，任意の $1\le l\le n$ と $u\approx v\in\mathrm{Fro}(\{u^i_l\mid 1\le i\le k\})$ について $u\theta=v\theta$ となることに等しい． □

補題 2 代入 θ がシステム Φ の解であるとする．このとき，$x\underset{\Phi}{\approx}y$ であれば $\theta(x)=\theta(y)$.

(証明) $x\underset{\Phi}{\approx}y$ とすると，定義より，ある $(V,U)\in\Phi$ が存在して $x\approx y\in\mathrm{Fro}(U)$．$\theta$ が Φ の解なので，補題 1 より，$\theta(x)=\theta(y)$． □

補題 3 U を無矛盾な項集合とし，θ を U の解とする．このとき，任意の $s\in U$ について，$s\theta=\mathrm{Com}(U)\theta$.

(証明) U に含まれる関数記号の出現の数に関する帰納法で示す．U が変数を含む場合や U が定数項からなる場合は，$\mathrm{Com}(U)\in U$ より自明．それ以外の場合，$U=\{t_1,\ldots,t_k\}$，$t_i=f(u^i_1,\ldots,u^i_n)$ $(1\le i\le k)$，$U_j=\{u^i_j\mid 1\le i\le k\})$ $(1\le j\le n)$ とおく．このとき，$\mathrm{Com}(U)=f(s_1,\ldots,s_n)$ かつ $s_j=\mathrm{Com}(U_j)$．また，θ を U の解であることから，$j=1,\ldots,n$ について，θ は U_j の解．よって，帰納法の仮定から，$j=1,\ldots,n$ について，$u^i_j\theta=\mathrm{Com}(U_j)\theta=s_j\theta$．したがって，$f(u^i_1,\ldots,u^i_n)\theta=f(u^i_1\theta,\ldots,u^i_n\theta)=f(s_1\theta,\ldots,s_n\theta)=f(s_1,\ldots,s_n)\theta=\mathrm{Com}(U)\theta$． □

定理 8 導出規則によるシステムの導出を $\Phi\Rightarrow\Psi$ とする．θ が Φ の解であるとき，かつそのときに限り，θ が Ψ の解.

(証明) θ が Φ の解であると仮定する．導出が Merge 規則によるものであるとする．このとき明らかに，θ は $[(V_i,U_i)\mid i\notin\{k,l\}]$ の解．また，(V_k,U_k) と (V_l,U_l) について，$x\in V_k$ と $y\in V_l$ について，$x\underset{\Phi}{\approx}y$．$\theta$ は Φ の解であるから，補題 2 より，$x\theta=y\theta$．

θ は $(V_k, U_k), (V_l, U_l) \in \Phi$ の解であるから，θ は $(V_k \cup V_k, U_l \cup U_l)$ の解.

一方，導出が Common-add 規則によるものであるとする．θ が U_k の解かつ，(V_i, U_i) の解より，k でない i において，補題 1 を用いて，θ は $V_i \cup U_i \cup \{t \mid x \approx t \in \mathrm{Fro}(U_k), x \in V_i\}$ の解である．$\mathrm{Vfro}(V_k, \{\mathrm{Com}(U_k)\}, U_k)$ について，θ は同様に $\mathrm{Vfro}(V_k, \{\}, U_k)$ の解である．補題 3 より，任意の項 $s \in U_k$ について，$s\theta = (\mathrm{Com}(U_k))\theta$．また，$\theta$ は Φ の解であるから，任意の項 $x \in V_k$ について，$x\theta = s\theta$ である．よって，$x\theta = (\mathrm{Com}(U_k))\theta$ が成立．よって，θ は $\mathrm{Vfro}(V_k, \{\mathrm{Com}(U_k)\}, U_k)$ の解.

逆に，θ が Ψ の解であると仮定する．導出が Merge 規則によるものであるとする．このとき，θ は $(V_k \cup V_l, U_k \cup U_l)$ の解である．また，$V_k, V_l \subseteq V_k \cup V_l$ かつ $U_k, U_l \subseteq U_k \cup U_l$ であるから，θ は $[(V_k, U_l), (V_k, U_l)]$ の解である.

一方，導出が Common-add 規則によるものであるとすると，θ は $[\mathrm{Vfro}(V_i, U_i, U_k) \mid i \neq k]$ の解なので，θ は $[(V_i, U_i) \mid i \neq k]$ の解．θ が Ψ の解であるから，$x \approx t \in \mathrm{Fro}(U_k)$ とすると，システムの定義から，ある i が存在して，$x, t \in V_i' \cup U_i'$，ただし，$(V_i', U_i') = \mathrm{Vfro}(V_i, U_i, U_k)$．$\theta$ が Ψ の解より，$x\theta = t\theta$．よって補題 1 より U_k は θ の解であるから，補題 3 より任意の項 $t \in U_k$ について，$t\theta = \mathrm{Com}(U_k)\theta$ である．ここで，θ は $\mathrm{Vfro}(V_k, \{\mathrm{Com}(U_k)\}, U_k)$ の解であるから，$V_k \cup \{\mathrm{Com}(U_k)\}$ の解である．以上から，任意の項 $x \in V_k$ と $t \in U_k$ について，$x\theta = (\mathrm{Com}(U_k))\theta = t\theta$ が成立．したがって，θ は (V_k, U_k) の解. □

定義 9 (解形式) システム Φ が 解形式 であるとは，任意の $(V, U) \in \Phi$ について，$|U| \leq 1$ であることを言う。

定義 10 (マージ優先導出) システム Φ に対するマージ優先導出を以下のように行う.

1. はじめに，Merge 規則を可能な限り繰り返し適用する.
2. 次に，Common-add 規則を 1 回適用する.
3. Clash 規則が適用できる場合は $\perp$ を返し終了．そうでなければ 1 に戻る.

次に，マージ優先導出は，停止して解形式あるいは $\perp$ になることを示す．ここで，システム Φ や等式集合 E の関数記号の出現の数を $f_{size}(\Phi)$ や $f_{size}(E)$ で表わす.

補題 4 U を項の有限集合とする.

1. このとき，$f_{size}(U) \geq f_{size}(\mathrm{Com}(U)) + f_{size}(\mathrm{Fro}(U))$.
2. $U \cap \mathcal{V} = \emptyset$ かつ $|U| > 1$ ならば，$f_{size}(U) > f_{size}(\mathrm{Com}(U)) + f_{size}(\mathrm{Fro}(U))$.

(証明) まず，1. を，U の含まれる関数記号の出現数に関する帰納法で示す．U が空集合のときは明らか.

a. U に変数が含まれる場合．このとき，定義より，$f_{size}(\mathrm{Com}(U)) = 0$ となり，$f_{size}(U) = f_{size}(\mathrm{Fro}(U))$ となるので，題意が成立する.

b. U に変数が含まれない場合．このとき，$U = \{t_1, \ldots, t_k\}$，$t_i = f(u_1^i, \ldots, u_n^i)$ とおく．また，$U_j = \{u_j^i \mid 1 \leq i \leq k\}$ とおく．すると，定義より，$f_{size}(\mathrm{Com}(U)) = 1 + \sum_j \mathrm{Com}(U_i)$，$f_{size}(\mathrm{Fro}(U)) = \sum_j \mathrm{Fro}(U_i)$．よって，$U \neq \emptyset$ より $k \geq 1$ であるから，帰納法の仮定を用いて，

$$\begin{array}{rcl} f_{size}(U) & = & k + \sum_j f_{size}(U_i) \\ & \geq & 1 + \sum_j f_{size}(U_i) \\ & = & 1 + \sum_j (\mathrm{Com}(U_i) + \mathrm{Fro}(U_i)) \\ & = & 1 + \sum_j \mathrm{Com}(U_i) + \sum_j \mathrm{Fro}(U_i) \\ & = & f_{size}(\mathrm{Com}(U)) + f_{size}(\mathrm{Fro}(U)) \end{array}$$

が得られる.

2. $U \cap \mathcal{V} = \emptyset$ かつ $|U| > 1$ のときは，1. の証明の場合 b. における $k > 1$ の場合になる．したがって，$f_{size}(U) > f_{size}(\mathrm{Com}(U)) + f_{size}(\mathrm{Fro}(U))$ が成立する. □

補題 5 $[(V_1, U_1), \ldots, (V_n, U_n)]$ をシステム，$1 \leq i \leq n$ とし，$\mathcal{V}(U_i) \subseteq \bigcup_j V_j$ かつ $V_1, \ldots, V_n$ は互いに素であるとする．このとき，$f_{size}(\mathrm{Fro}(U_i)) = \sum_{1 \leq j \leq n} f_{size}(\mathrm{Vfro}(V_j, U_j, U_i) \backslash (V_j \cup U_j))$.

(証明) Vfro の定義から明らか. □

定義 11 (辞書式拡張) $>$ を集合 A 上の関係とするとき，A^n 上の関係 $>$ の辞書式拡張 $(>)_{lex}$ を，以下のように定義する．$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle (>)_{lex} \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\exists i\ 1 \leq i \leq n.\ a_1 = b_1, \ldots, a_{i-1} = b_{i-1}, a_i > b_i$$

補題 6 マージ優先導出は停止する．すなわち，

$\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 \Rightarrow \cdots$ なる無限のマージ優先導出は存在しない．

(証明) システムの重みを $w(\Phi) = \langle f_{size}(\Phi), |\Phi| \rangle$ と定義する．このとき，Merge 規則による導出 $\Phi \Rightarrow \Psi$ では，$f_{size}(\Phi) = f_{size}(\Psi)$ かつ $|\Phi| > |\Psi|$．また，Common-add 規則による導出 $\Phi \Rightarrow \Psi$ では，補題 4, 5 より，$f_{size}(\Phi) = f_{size}(\Psi)$ が成立する．したがって，無限の導出 $\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 \Rightarrow \cdots$ が存在するとすると，$w(\Phi_1)(>)_{lex} w(\Phi_2)(>)_{lex} \cdots$ なる無限下降列が得られる．しかし，$(>)_{lex}$ は整礎であるから，これは矛盾． □

定理 12 マージ優先導出は停止し，そのとき，解形式のシステムあるいは $\perp$ が得られる．

(証明) 補題 6 より，導出は Φ あるいは $\perp$ で停止する．Φ が解形式でないと仮定すると，ある $(V_i, U_i) \in \Phi$ が存在して，$|U_i| > 1$．このとき，システム Φ には，Common-add 規則が適用できるので，Φ で停止したことに矛盾． □

4 正則項の単一化手続きと正当性

本節では，Jaffar のアルゴリズムを用いた正則項の単一化手続きを示し，その正当性を示す．まず，文献 [3] にしたがって，用いる正則項に関する記法を説明する．

無限項 t が正則であるとは，t の部分項集合が有限であるときをいう．変数集合から正則項集合への写像 σ で，$dom(\sigma)$ が有限であるものを正則代入とよぶ．正則項を有限な記法で表現する方法として，再帰式表現がある．再帰式表現とは，有限項代入 $\sigma = \{x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n\}$ のうち，

条件: $\neg\exists i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, n\}.$

$$(\forall 1 \leq j < k.\ t_{i_j} = x_{i_{j+1}}) \wedge t_{i_k} = x_{i_1}$$

を満たすものをいう．$\sigma = [x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$ が再帰式表現のとき，任意の $1 \leq i \leq n$ について，$C_i[x_{i_1}, \ldots, x_{i_1}]_{p_{i_1}, \ldots, p_{i_{k_i}}} = t_i$ とする．ただし，ここで，文脈 C_i には変数 $x_1, \ldots, x_n$ が存在しないとする．このとき，正則項 $\sigma^\star(x_1), \ldots, \sigma^\star(x_n)$ を以下のように与える：$\sigma^\star(x_i)(p) =$

$$\begin{cases} C_i(p) & (p \in \mathrm{Pos}(C_i) \wedge C_i|_p \neq \Box \text{ のとき}) \\ \sigma^\star(x_{i_j})(q) & (\exists j, q.\ p = p_{i_j}.q \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，$\sigma^\star$ は，$\mathrm{dom}(\sigma^\star) = \mathrm{dom}(\sigma)$ なる正則代入となる．項 $\sigma^\star(x_1), \ldots, \sigma^\star(x_n)$ を，この再帰式表現の解とよび，正則項 $\sigma^\star(x_i)$ を (x_i, σ) によって表現する．なお，$(x := t) \in \sigma$ ならば，$\sigma^\star(x) = \sigma^\star(t)$ が成立することに注意する．

再帰式表現に関する以下の補題を後で用いる．

補題 7 θ が再帰式表現であるとする．$\varphi \circ \theta = \varphi$ であるとき，$\varphi \circ \theta^\star = \varphi$.

(証明) $\varphi \circ \theta = \varphi$ と仮定する．このとき，$(\varphi \circ \theta^\star)(x) = \varphi(x)$ を示す．これを示すには，$t = (\varphi \circ \theta^\star)(x)$ とおくとき，$t = \varphi(x)$ を示せば良い．つまり，$\forall p \in Pos(t).t(p) = \varphi(x)(p)$ を示せば良い．p は有限列なので，$p \in Pos(t)$ とすると，$(\varphi \circ \theta^n)(x)(p) = t(p)$ なる n が存在．このとき，$\varphi \circ \theta^n = (\varphi \circ \theta) \circ \theta^{n-1} = \cdots = \varphi$. したがって，$t(p) = \varphi(x)(p)$ となる． □

定義 13 (システムへの変換) 代入 σ, ρ を $\mathrm{dom}(\sigma) \cap \mathrm{dom}(\rho) = \emptyset$ である再帰式表現とする．正則項の表現 (x, σ) および (y, ρ) から，システムへの変換 Sys を以下で定義する．$\mathrm{Sys}((x, \sigma), (y, \rho)) =$

$$[(x := y)^\circ] \cup [(z := t)^\circ \mid z := t \in \sigma \cup \rho] \cup \Psi$$

ただし，ここで，

$$(x := t)^\circ = \begin{cases} (\{x, t\}, \emptyset) & (t \in \mathcal{V} \text{ のとき}) \\ (\{x\}, \{t\}) & (t \notin \mathcal{V} \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\Psi = [(\{x\}, \emptyset) \mid x \in \mathcal{V}(\mathrm{range}(\sigma)) \cup \mathcal{V}(\mathrm{range}(\rho)) \setminus (\{x, y\} \cup \mathrm{dom}(\sigma) \cup \mathrm{dom}(\rho))$$

とする．

定義 14 θ を正則代入，σ, ρ を再帰式表現とし，$\mathrm{dom}(\sigma) \cap \mathrm{dom}(\rho) = \emptyset$ とする．このとき，

$$\theta^{\Uparrow \sigma, \rho} = \theta \circ (\sigma^\star \cup \rho^\star)$$

と定義する．

補題 8 θ を正則代入，σ, ρ を再帰式表現とし，$\mathrm{dom}(\sigma) \cap \mathrm{dom}(\rho) = \emptyset$ とする．$(x := t) \in \sigma$ ならば，$\theta^{\Uparrow \sigma, \rho}(x) = \theta^{\Uparrow \sigma, \rho}(t)$.

(証明) $(x := t) \in \sigma$ であると仮定する．$\theta(\sigma^\star(x)) = \theta(\sigma^\star(t))$．したがって，$\mathrm{dom}(\sigma) \cap \mathrm{dom}(\rho) = \emptyset$ より，$\theta^{\Uparrow \sigma, \rho}(x) = \theta^{\Uparrow \sigma, \rho}(t)$. □

補題 9 $(x,\sigma),(y,\rho)$ を正則項の再帰式表現とし，$\mathrm{dom}(\sigma)\cap\mathrm{dom}(\rho)=\emptyset$ とする．このとき，正則代入 θ が正則項 $\sigma^\star(x),\rho^\star(y)$ の単一化子であるとき，そのときに限り，$\theta^{\Uparrow\sigma,\rho}$ はシステム $\mathrm{Sys}((x,\sigma),(y,\rho))$ の解．

(証明) $(\Rightarrow)$ $(\sigma^\star(x))\theta=(\rho^\star(y))\theta$ と仮定する．このとき，$\theta^{\Uparrow\sigma,\rho}$ が $\mathrm{Sys}(\sigma^\star(x)t,\rho^\star(y))$ の解であることを示す．

- $(x:=y)^\circ=(\{x,y\},\emptyset)$ について．
  仮定より明らかに，$\theta^{\Uparrow\sigma,\rho}$ が $[(\{x,y\},\emptyset)]$ の解である．
- $[(z:=t)^\circ \mid z:=t\in\sigma\cup\rho]$ について．
  このとき，$(z:=t)\in\sigma$ とすると，補題 8 より，$\theta^{\Uparrow\sigma,\rho}(z)=\theta^{\Uparrow\sigma,\rho}(t)$．同様に，任意の $z:=t\in\sigma$ について，補題より成立．

$(\Leftarrow)$ $\theta^{\Uparrow\sigma,\rho}$ が $\mathrm{Sys}((x,\sigma),(y,\rho))$ の解と仮定すると，$\theta^{\Uparrow\sigma,\rho}(x)=\theta^{\Uparrow\sigma,\rho}(y)$．よって，$x\in\mathrm{dom}(\sigma)$，$y\in\mathrm{dom}(\rho)$，$\mathrm{dom}(\sigma)\cap\mathrm{dom}(\rho)=\emptyset$ より，$(\sigma^\star(x))\theta=(\rho^\star(y))\theta$． □

定義 15 (解形式から生成される代入) システム $\Phi=[(V_1,U_1),\ldots,(V_n,U_n))]$ が解形式であるとき，Φ から生成される有限代入 θ_Φ を以下により定義する：$\mathrm{dom}(\theta_\Phi)=\bigcup_{1\le i\le n}V_i$，$x\in V_i$ かつ $U_i=\{t\}$ のとき，$\theta_\Phi(x)=t$．

正則項の単一化手続きは，正則項の再帰式表現 $(x,\sigma),(y,\sigma)$ を入力したときに，$\sigma^\star(x)$ と $\sigma^\star(y)$ の最汎単一化子を計算する．

定義 16 (正則項の単一化手続き)

入力：正則項の再帰式表現 $(x,\sigma),(y,\sigma)$

出力：$\perp$ または有限代入 θ

Step 1. システム $\Phi_{init}=\mathrm{Sys}((x,\sigma),(y,\sigma))$ を構成する．

Step 2. マージ優先導出を行い，$\perp$ または解形式 Φ_{solved} を得る．

Step 3. Step 2 で，$\perp$ が得られたときは $\perp$ を出力する．解形式 Φ_{solved} が得られたときは，有限代入 $\theta_{\Phi_{solved}}$ を出力する．

定理 17 (正則項単一化手続きの正当性) $(x,\sigma),(y,\sigma)$ を正則項の再帰式表現とする．正則項単一化手続きにより，有限代入 θ が得られたとする．このとき，$\theta^\star$ は $\sigma^\star(x),\rho^\star(y)$ の最汎単一化子．また，手続きにより $\perp$ が得られたときには，$\sigma^\star(x),\rho^\star(y)$ は単一化不能.

(証明) $\Phi_{init}=\mathrm{Sys}((x,\sigma),(y,\rho))$ から，マージ優先導出により解形式であるシステム Φ_{solved} が得られたとする．代入 $\theta=\theta_{\Phi_{solved}}$ ととる．このとき，$\theta^\star$ が正則項 s,t の最汎単一化子となることを示す．

- まず，$\theta^\star$ が正則項 s,t の単一化子となることを示す．θ は Φ_{solved} の解であることから，$\theta^\star$ は Φ_{solved} の解．よって，定理 8 より，再帰式表現 $\theta^\star$ は Φ_{init} の解．したがって，任意の $z\in\mathrm{dom}(\sigma)$ について，$\theta^\star(\sigma(z))=\theta^\star(z)$ である．すなわち，$\theta^\star\circ\sigma=\theta^\star$ が成立する．このとき，補題 7 から，$\theta^\star\circ\sigma^\star=\theta^\star$．同様にして，$\theta^\star\circ\rho^\star=\theta^\star$．以上より，$\theta^\star(\sigma^\star(x))=\theta^\star(x)=\theta^\star(y)=\theta^\star(\rho^\star(y)))$ となる．したがって，$\theta^\star$ は $\sigma^\star(x),\rho^\star(y)$ の最汎単一化子．
- 次に，$\theta^\star$ が最汎の単一化子であることを示す．φ を，$\sigma^\star(x),\rho^\star(y)$ の単一化子とする．このとき，定義より，$\varphi^{\Uparrow\sigma,\rho}$ は Φ_{init} の単一化子．したがって，定理 8 より，$\varphi^{\Uparrow\sigma,\rho}$ は Φ_{solved} の単一化子となる．よって，$\varphi^{\Uparrow\sigma,\rho}\circ\theta=\varphi^{\Uparrow\sigma,\rho}$ なので，補題 7 より，$\varphi^{\Uparrow\sigma,\rho}\circ\theta^\star=\varphi^{\Uparrow\sigma,\rho}$ が得られる．つまり，$\theta^\star\le\varphi^{\Uparrow\sigma,\rho}$ となり，$\theta^\star$ の最汎性が示された．

φ を，$\sigma^\star(x),\rho^\star(y)$ の単一化子とする．このとき，定義より，$\varphi^{\Uparrow\sigma,\rho}$ は Φ_{init} の単一化子．したがって，定理 8 より，$\varphi^{\Uparrow\sigma,\rho}$ は Φ_{solved} の単一化子となる．よって，$\perp$ が得られることはない．したがって，$\perp$ が得られたときは，単一化不能． □

5 おわりに

Jaffar のアルゴリズムを 3 つの導出規則によって形式化し，それが正しいことを示した．また，これらの規則を用いた正則項の単一化手続きを提案し，その正当性を示した．今後の課題としては，交換律や結合律などの等式を法とした正則項の単一化についても，Jaffar の手法を用いて実現できるか検討したい．

参 考 文 献

[1] Courcelle, B.: Fundamental properties of infinite trees, *Theoretical Computer Science*, Vol. 25(1983),

pp. 95–169.
[2] Jaffar, J.: Efficient unification over infinite terms, *New Generation Computing*, Vol. 2(1984), pp. 207–219.
[3] 岩見宗弘, 青戸等人: 無限項書き換えシステムにおける強頭部正規化可能性および一般生成性の自動反証, コンピュータソフトウェア, Vol. 29, No. 1(2012), pp. 211–239.