# 書き換え規則の重なりに基づく到達可能性判定法

島貫 健太郎, 青戸 等人, 外山 芳人

東北大学 電気通信研究所

{simanuki,aoto,toyama}@nue.riec.tohoku.ac.jp

**概 要**　到達可能性は項書き換えシステムの基本的な性質の一つであり，合流性の判定や書き換えの正規化戦略などで重要な役割を果たす．到達可能性の判定手続きとして，木オートマトンの遷移規則と項書き換えシステムの書き換え規則との間の完備化に基づいて構成された木オートマトンを用いた手法が提案されている．また，成長項書き換えシステムや有限経路重なり項書き換えシステムなどのクラスについては，この手法により到達可能性が決定可能となることが知られている．本論文では，書き換え規則間の左辺と右辺の重なりに着目することで，安定な項書き換えシステムと項書き換えシステムの接続グラフの概念を導入し，これらを用いることによって，木オートマトンの完備化手続きが停止する新しいクラスを提案する．

## 1　はじめに

到達可能性は項書き換えシステムの基本的な性質の一つである．到達可能性判定問題とは，与えられた項書き換えシステム $\mathcal{R}$ および項 $s,t$ に対して，$\mathcal{R}$ による書き換えによって項 $s$ から項 $t$ へ到達できるかを判定することをいう．到達可能性判定は，危険対の交差性に基づく合流性判定や書き換えの正規化戦略における必須リデックスの決定などで重要な役割を果たす．項書き換えシステムの到達可能性判定法の 1 つとして，木オートマトンを用いる手法が知られている [3, 4, 5, 6]．この手法では，入力となる項の正規集合を木オートマトンにより与え，木オートマトンの遷移規則と項書き換えシステムの書き換え規則の間の完備化手続きを用いて，入力項集合から到達可能な項全体を受理する木オートマトンを構成する．完備化手続きは必ずしも停止するとは限らないが，停止性が保証されている場合には，完備化手続きで得られる木オートマトンを用いることで到達可能性が判定できる．

完備化手続きが必ず停止し，到達可能性が判定できる項書き換えシステムのクラスとして，成長項書き換えシステム [4, 5] や有限経路重なり項書き換えシステム [6] が知られている[1]．特に，有限経路重なり項書き換えシステムでは，書き換え規則間の左辺と右辺の経路重なりに基づいて経路グラフを構成し，この経路グラフに対する条件により，幅広いクラスに対する完備化手続きの停止性を保証している．ここで，経路重なりとは項の経路上の関数記号の重なりのことをさす．

本論文の基本的なアイデアは，有限経路重なり条件に用いられる経路重なりを通常の項重なりに置き換えることで，より広いクラスに対する完備化手続きの停止性を示すことである．このため，書き換え規則間の左辺と右辺の項重なりに基づく接続グラフを導入する．また，完備化手続きの解析を容易にするため，線形性を仮定し，重なりを制限する安定性という制限もつける．これらによって，完備化手続きが停止する項書き換えシステムのクラスを新たに与える．さらに，得られた項書き換えシステムのクラスが，成長項書き換えシステムのクラスや有限経路重なり項書き換えシステムのクラスと独立なクラスとなっていることを明らかにする．

[1] 文献 [6] で示された有限経路重なり項書き換えシステムに対する完備化手続きの停止性 (Theorem 5.9) は誤っており反例が存在する (Y. Toyama and T. Takai, private communication, Jan 29, 2013).

以下，本論文は次のように構成される．2 節では，本論文で用いる基本的な定義と記法を説明する．3 節では，木オートマトンの完備化手続きおよびその正当性の証明を与える．4 節では，完備化手続きが停止するための十分条件を示す．5 節は本論文のまとめである．

## 2 準備

本節では項書き換えシステム (TRS) や，木オートマトンに関する基本的な用語や概念を文献 [1, 2] に従って定義する．

関数記号の集合を $\mathcal{F}$, 変数記号の集合を $\mathcal{V}$ とし，$\mathcal{F}, \mathcal{V}$ から定められる項の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ とする．項 $t$ に現れる変数全体の集合を $\mathcal{V}(t)$ で表す．$t$ の中に同じ変数が高々一回しか出現しないとき，$t$ は**線形**であるといい，変数が出現しない項を**基底項**とよぶ．基底項の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ とかく．項 $t$ の位置を正整数列で表し，$t$ の**位置集合** $Pos(t)$ は，$t = x \in \mathcal{V}$ のとき $Pos(t) = \{\epsilon\}$，$t = f(t_1, ..., t_n)$ のとき $Pos(t) = \{\epsilon\} \cup \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{i \cdot p \mid p \in Pos(t_i)\}$ と定義される．ここで $\epsilon$ は空列を表す．位置 $p$ の**深さ**を列 $p$ の長さとし，$|p|$ で表す．位置 $p_1, p_2$ に対して列 $p$ が存在して $p_1 \cdot p = p_2$ となるとき，$p_1 \preceq p_2$ と表す．$p_1 \preceq p_2$ かつ $p_1 \neq p_2$ のとき $p_1 \prec p_2$ と記す．項 $t$ の位置 $p \in Pos(t)$ における**部分項**を $t|_p$，位置 $p$ に出現している関数記号を $t(p)$ と表す．項 $s$ が項 $t$ の真部分項であるとき，$s \lhd t$ と表す．$t(p) \notin \mathcal{V}$ をみたす $p \in Pos(t)$ の集合を $PosF(t)$ と表す．また，$PosV(t) = Pos(t) \setminus PosF(t)$ と定める．**代入**とは変数集合から項集合への写像である．代入 $\mu$ を項 $t$ へ適用して得られる項を $t\mu$ と記す．変数集合から基底項集合への代入を**基底項代入**とよび，$\sigma$ などで表す．また，代入が変数の置換ならば**名前替え**という．ホールとよばれる特別な定数記号 $\Box$ をただひとつ含む項を**文脈**とよび，その集合を $\mathcal{C}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ とする．文脈 $C[\ ] \in \mathcal{C}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ に対して，ホールを項 $t$ で置き換えて得られる項を $C[t]$ と表す．逆に，$t$ の位置 $p \in Pos(t)$ での部分項をホールに置き換えて得られる文脈を $t[\ ]_p$ と表す．2 つの項 $t_1, t_2 (\mathcal{V}(t_1) \cap \mathcal{V}(t_2) = \emptyset)$ に対して，$t_1\mu = t_2\mu$ なる代入 $\mu$ が存在するとき，$t_1, t_2$ は**単一化可能**であるという．このときの最汎単一化子を $mgu(t_1, t_2)$ で表す．項 $t_1, t_2$ において，ある $p \in PosF(t_2)$ で $t_1$ と $t_2|_p$ が単一化可能なとき，$t_1$ は $t_2$ と**重なる**という．

項の組 $(l, r)$ の有限集合 $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V}) \times \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ を**項書き換えシステム**という．本論文では，通常の定義とは異なり変数条件 $l \notin \mathcal{V}, \mathcal{V}(r) \subseteq \mathcal{V}(l)$ を仮定しない．$(l, r) \in \mathcal{R}$ を**書き換え規則** ($l$ を書き換え規則の**左辺**，$r$ を**右辺**) とよび，$l \to r$ と表す．項書き換えシステム $\mathcal{R}$ のすべての書き換え規則の左辺が線形ならば，$\mathcal{R}$ は左線形であるという．同様に，すべての書き換え規則の右辺が線形ならば，$\mathcal{R}$ は右線形であるという．左線形かつ右線形な項書き換えシステムを**線形**であるという．項書き換えシステム $\mathcal{R}$ で定まる項の書き換え $s \to_{\mathcal{R}} t$ を，$\exists l \to r \in \mathcal{R}. \exists p \in Pos(s). \exists \mu : \mathcal{V} \to \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V}). s|_p = l\mu$ かつ $t = s[r\mu]_p$ として定める．関係 $\to_{\mathcal{R}}$ の推移閉包，反射推移閉包をそれぞれ $\to_{\mathcal{R}}^+$，$\to_{\mathcal{R}}^*$，$n$ ステップ書き換えを $\to_{\mathcal{R}}^n$ で表す．$s \to_{\mathcal{R}}^* t$ のとき，$t$ は $s$ から**到達可能**であるという．項の集合 $L$ に対し，ある $s \in L$ から到達可能な項全体の集合を $(\to_{\mathcal{R}}^*)(L)$ と表す．

**木オートマトン** $\mathcal{A} = (Q, \mathcal{F}, \Delta, Q_f)$ は以下のように定められる．$Q$ は状態とよばれる定数記号の有限集合，$\mathcal{F}$ は関数記号の有限集合である．$\Delta$ は $\mathcal{T}(\mathcal{F} \cup Q)$ 上の書き換え規則 (遷移規則) の有限集合であり，$f(q_1, ..., q_n) \to q$ $(f \in \mathcal{F}, q_i, q \in Q)$ または $q \to q'$ $(q, q' \in Q)$ という形をしている．$q \to q'$ の形をした規則を $\epsilon$ 規則とよぶ．$Q_f$ は受理状態の集合で，$Q_f \subseteq Q$ をみたす．$\Delta$ で定まる $\mathcal{T}(\mathcal{F} \cup Q)$ 上の書き換え関係 (遷移関係) を $\to_\Delta$ あるいは $\to_{\mathcal{A}}$ で表す．木オートマトン $\mathcal{A}$ で状態 $q$ に遷移する基底項の集合を $\mathcal{L}_q(\mathcal{A}) = \{t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}) \mid t \to_{\mathcal{A}}^* q\}$ と定める．このとき，$\mathcal{A}$ で**受理される**基底項の集合を $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \bigcup_{q \in Q_f} \mathcal{L}_q(\mathcal{A})$ と定める．基底項の集合 $L$ に対してある木オートマトン $\mathcal{A}$ が存在し $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$ となるとき，$L$ は**認識可能**であるという．$\mathcal{L}_q(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ ならば $q$ は**到達可能**であるといい，すべての状態が到達可能なとき，$\mathcal{A}$ は**既約である** (reduced) という．変数集合から状態集合への代入を**状態代入**といい，$\theta$ などで表す．以下の命題は，既約性の定義から自明である．

**命題 2.1.** $\mathcal{A} = (Q, \mathcal{F}, \Delta, Q_f)$ を既約な木オートマトンとする．任意の状態代入 $\theta : \mathcal{V} \to Q$ に対して基底代入 $\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{T}(\mathcal{F})$ が存在して，すべての変数 $x$ で $x\sigma \to^*_{\mathcal{A}} x\theta$ が成立する．

# 3 木オートマトンの完備化手続きとその正当性

本節では，文献 [3, 4, 6] に基づき，与えられた項書き換えシステム $\mathcal{R}$ と木オートマトン $\mathcal{A}_{IN}$ から，$(\to^*_{\mathcal{R}})(\mathcal{L}(\mathcal{A}_{IN})) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_{OUT})$ となる木オートマトン $\mathcal{A}_{OUT}$ を構成する手続き (完備化手続き) を与え，その性質を論じる．一般には，与えられた $\mathcal{R}$ によっては，完備化手続きが停止せず，木オートマトン $\mathcal{A}_{OUT}$ が得られるとは限らない．しかし，完備化手続きが停止し，木オートマトン $\mathcal{A}_{OUT}$ が構成可能となる $\mathcal{R}$ の十分条件がいくつか知られている．**本論文では，与えられる項書き換えシステム $\mathcal{R}$ は線形として，一般性を失うことなく $\mathcal{A}_{IN}$ は既約と仮定する．**

## 3.1 木オートマトンの完備化手続き

完備化手続きでは，入力の木オートマトン $\mathcal{A}_{IN} = (Q_{IN}, \mathcal{F}, \Delta_{IN}, Q_f)$ から $\mathcal{A}_0 = (Q_0, \mathcal{F}, \Delta_0, Q_f)$ を構成した後，$\mathcal{A}_1 = (Q_1, \mathcal{F}, \Delta_1, Q_f)$, $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \mathcal{F}, \Delta_2, Q_f)$, ... と，$\mathcal{A}_i$ から $\mathcal{A}_{i+1}$ を構成する．まず，$\mathcal{A}_{IN}$ から $\mathcal{A}_0$ の構成を説明し，その後，$\mathcal{A}_i \Rightarrow \mathcal{A}_{i+1}$ の構成を説明する．

**定義 3.1 ($\mathcal{A}_0$ の構成).** $\mathcal{A}_0 = (Q_0, \mathcal{F}, \Delta_0, Q_f)$ と定める．ここで，$Q_0 = Q_{IN} \cup \{q_{any}\}$ $(q_{any} \notin Q_{IN})$, $\Delta_0 = \Delta_{IN} \cup \{f(q_{any}, ..., q_{any}) \to q_{any} \mid f \in \mathcal{F}\}$．任意の $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ について，$t \to^*_{\mathcal{A}_0} q_{any}$ に注意する．

$\mathcal{A}_i \Rightarrow \mathcal{A}_{i+1}$ の構成においても，必要に応じて $Q_i$ に含まれない新しい状態を追加する．そこで以下では，状態の無限集合を $\mathcal{Q}$ とおき，$Q_{IN} \cup \{q_{any}\} \subseteq \mathcal{Q}$ と約束する．完備化手続きの途中で追加される新しい状態は，以下の近似関数を用いて定める．

**定義 3.2 (近似関数).** $PosF(\mathcal{R}) = \{(l \to r, p) \mid l \to r \in \mathcal{R}, p \in PosF(r) \setminus \{\epsilon\}\}$ とし，$\alpha : PosF(\mathcal{R}) \times (\mathcal{V} \to \mathcal{Q}) \times \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ を近似関数とよぶ．なお，$p \in Pos(r)$ が変数位置の場合は，$\alpha((l \to r, p), \theta, q) = r|_p\theta$ と約束する．

**定義 3.3 ($\mathcal{A}_i \Rightarrow \mathcal{A}_{i+1}$ の構成).** $\alpha$ を近似関数，$\mathcal{A}_i = (Q_i, \mathcal{F}, \Delta_i, Q_f)$ とする．以下の条件 (1)–(3) をすべてみたす書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$，状態代入 $\theta : \mathcal{V} \to Q_i$ および状態 $q \in Q_i$ が存在したとする．

(1) $l\theta \to^*_{\mathcal{A}_i} q$．ただし，この遷移は $l\theta \to^+_{\mathcal{A}_i} l\theta' \to^*_{\mathcal{A}_i} q$ の形をしていないものとする．

(2) $r\theta \not\to^*_{\mathcal{A}_i} q$.

(3) $\forall x \in \mathcal{V}(r) \setminus \mathcal{V}(l).\ x\theta = q_{any}$.

このとき，$\tilde{Q}_{i+1}, \tilde{\Delta}_{i+1} = \tilde{\Delta}^{\top}_{i+1} \cup \tilde{\Delta}^{\perp}_{i+1}$ を以下のように構成する．

- $r = x$ のとき，$\tilde{Q}_{i+1} = \emptyset, \tilde{\Delta}^{\top}_{i+1} = \{x\theta \to q\}, \tilde{\Delta}^{\perp}_{i+1} = \emptyset$
- $r = f(r_1, ..., r_n)$ のとき:

$$
\begin{aligned}
\tilde{Q}_{i+1} =& \{\alpha((l \to r, p), \theta, q) \mid p \in PosF(r) \setminus \{\epsilon\}\} \\
\tilde{\Delta}^{\top}_{i+1} =& \{f(\alpha((l \to r, 1), \theta, q), ..., \alpha((l \to r, n), \theta, q)) \to q\} \\
\tilde{\Delta}^{\perp}_{i+1} =& \{g(\alpha((l \to r, p1), \theta, q), ..., \alpha((l \to r, pm), \theta, q)) \to \\
& \qquad \alpha((l \to r, p), \theta, q) \mid p \in PosF(r) \setminus \{\epsilon\}, r(p) = g\}
\end{aligned}
$$

最後に $\mathcal{A}_{i+1} = (Q_i \cup \tilde{Q}_{i+1}, \mathcal{F}, \Delta_i \cup \tilde{\Delta}_{i+1}, Q_f)$ と定める．$\mathcal{A}_i$ から $\mathcal{A}_{i+1}$ の構成を 1 ステップ完備化といい，$\mathcal{A}_i \xRightarrow{l \to r, \theta, q} \mathcal{A}_{i+1}$ と記す．

**定義 3.4 (完備化手続き)**. $\alpha$ を近似関数，$\mathcal{R}$ を項書き換えシステム，$\mathcal{A}_{IN} = (Q_{IN}, \mathcal{F}, \Delta_{IN}, Q_f)$ を木オートマトンとするとき，定義 3.1,3.3 に従って，$\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ を構成する．これを $\mathcal{A}_{IN}$ の $k$ ステップの完備化手続きとよび，$\mathcal{A}_{i-1} \xRightarrow{l_i \to r_i, \theta_i, q_i} \mathcal{A}_i$ $(0 < i \leq k)$ と記す．また，$k$ ステップの完備化手続きで得られた木オートマトン $\mathcal{A}_k$ に対して，定義 3.3 の構成手続きが適用できないときに，完備化手続きは成功し，$\mathcal{A}_{OUT} = \mathcal{A}_k$ を出力する．

$k$ ステップ完備化で構成された $\mathcal{A}_k$ は，定義3.3から $\mathcal{A}_k = (\bigcup_{0<i\leq k} \tilde{Q}_i \cup Q_0, \mathcal{F}, \bigcup_{0<i\leq k} \tilde{\Delta}_i \cup \Delta_0, Q_f)$ と表すことができる．また，$\Delta_k^\top = \bigcup_{0<i\leq k} \tilde{\Delta}_i^\top$ , $\Delta_k^\perp = \bigcup_{0<i\leq k} \tilde{\Delta}_i^\perp$ と記す．このとき，$\Delta_k = \Delta_0 \uplus \Delta_k^\perp \uplus \Delta_k^\top$ に注意する．ここで，$\uplus$ は集合の直和である．

**定義 3.5 (厳密近似関数)**. 近似関数 $\alpha$ が厳密であるとは，任意の $((l \to r, p), \theta, q), ((l' \to r', p'), \theta', q') \in PosF(\mathcal{R}) \times (\mathcal{V} \to \mathcal{Q}) \times \mathcal{Q}$ について，$\alpha((l \to r, p), \theta, q) = \alpha((l' \to r', p'), \theta', q')$ の必要十分条件が $r\theta|_p = r'\theta'|_{p'}$ であることをいう．近似関数 $\alpha$ が厳密であるとき，$\alpha((l \to r, p), \theta, q)$ は $r\theta|_p \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q})$ によって定まる．したがって，

条件 (*)： 任意の $v, v' \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}) \setminus \mathcal{Q}$ について，$\hat{\alpha}(v) = \hat{\alpha}(v') \Leftrightarrow v = v'$

をみたす関数 $\hat{\alpha} : \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}) \to \mathcal{Q}$ を用いて，$\alpha((l \to r, p), \theta, q) = \hat{\alpha}(r\theta|_p)$ とすることで厳密近似関数 $\alpha$ を与えることが出来る．そこで，厳密近似関数として，$\alpha$ を用いる代わりに条件 (*) をみたす $\hat{\alpha} : \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}) \to \mathcal{Q}$ を用いる．以下では，$\hat{\alpha}$ を $\alpha$ と略記し，一般性を失うことなく，任意の $q \in \mathcal{Q}$ について $\alpha(q) = q$ と定める．また，$v \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q})$ を，線形項 $u \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ および状態代入 $\theta : \mathcal{V} \to \mathcal{Q}$ を用いて $v = u\theta$ と表すこととする．$u\theta \notin \mathcal{Q}$ のとき，$\alpha(u\theta) = q$ なる状態 $q$ を $q_{u\theta}$ と記す．

**以下，本論文では近似関数として厳密なものを用いる．**

**例 3.6.** 以下の $\mathcal{R}$，$\mathcal{A}_{IN}$ に対する完備化手続きを考える．

$$\mathcal{R} = \{Add(S(x), y) \to S(Add(x, y))\}$$

$$\mathcal{A}_{IN} = (\{q_Z, q_{Nat}, q_f\}, \{0, S(\cdot), Add(\cdot, \cdot)\}, \Delta_{IN}, \{q_f\})$$

$$\Delta_{IN} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 \to q_Z, & 0 \to q_{Nat}, \\ S(q_{Nat}) \to q_{Nat}, & Add(q_{Nat}, q_Z) \to q_f \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}_{IN}) = \{Add(S^n(0), 0) \mid n \geq 0\}$$

Step 1: $\mathcal{A}_0$ において状態代入 $\theta_1 = [x \mapsto q_{Nat}, y \mapsto q_Z]$ を考えると，$Add(S(x), y)\theta_1 \to^*_{\mathcal{A}_0} q_f$ かつ $S(Add(x, y))\theta_1 \not\to^*_{\mathcal{A}_0} q_f$ であり，定義 3.3 の条件 (1)–(3) をすべてみたしているので，$\tilde{Q}_1 = \{q_{Add(q_{Nat}, q_Z)}\}$，$\tilde{\Delta}_1 = \{Add(q_{Nat}, q_Z) \to q_{Add(q_{Nat}, q_Z)}, S(q_{Add(q_{Nat}, q_Z)}) \to q_f\}$ が $\mathcal{A}_0$ に追加され $\mathcal{A}_1$ が構成される．

Step 2: $\mathcal{A}_1$ において状態代入 $\theta_2 = [x \mapsto q_{Nat}, y \mapsto q_Z]$ を考えると，$Add(S(x), y)\theta_2 \to^*_{\mathcal{A}_1} q_{Add(q_{Nat}, q_Z)}$ かつ $S(Add(x, y))\theta_2 \not\to^*_{\mathcal{A}_1} q_{Add(q_{Nat}, q_Z)}$ であり，定義3.3の条件 (1)–(3) をすべてみたしているので，$\tilde{Q}_2 = \{q_{Add(q_{Nat}, q_Z)}\}$，$\tilde{\Delta}_1 = \{Add(q_{Nat}, q_Z) \to q_{Add(q_{Nat}, q_Z)}, S(q_{Add(q_{Nat}, q_Z)}) \to q_{Add(q_{Nat}, q_Z)}\}$ が $\mathcal{A}_1$ に追加され $\mathcal{A}_2$ が構成される．

Step 3: 定義3.3の条件 (1)–(3) をみたす状態代入はこれ以上存在しないので，$\mathcal{A}_{OUT} = \mathcal{A}_2$ を出力して終了する．このとき $\mathcal{L}(\mathcal{A}_{OUT}) = \{S^m(Add(S^n(0)), 0) \mid m, n \geq 0\} = (\to^*_{\mathcal{R}})(\mathcal{L}(\mathcal{A}_{IN}))$ である．

**例 3.7.** 例3.6と同じ $\mathcal{A}_{IN}$ を用い，今度は $\mathcal{R}' = \{Add(S(x), y) \to Add(x, S(y))\}$，$\mathcal{A}_{IN}$ に対する完備化手続きを考える．

Step 1: $\mathcal{A}_0$ において状態代入 $\theta_1 = [x \mapsto q_{Nat}, y \mapsto q_Z]$ を考えると，$Add(S(x), y)\theta_1 \to^*_{\mathcal{A}_0} q_f$ かつ $Add(x, S(y))\theta_1 \not\to^*_{\mathcal{A}_0} q_f$ であり，定義 3.3 の条件 (1)–(3) をすべてみたしているので，$\tilde{Q}_1 = \{q_{S(q_Z)}\}$，$\tilde{\Delta}_1 = \{S(q_Z) \to q_{S(q_Z)}, Add(q_{Nat}, q_{S(q_Z)}) \to q_f\}$ が $\mathcal{A}_0$ に追加され $\mathcal{A}_1$ が構成される．

Step 2: $\mathcal{A}_1$ において $\theta_2 = [x \mapsto q_{Nat}, y \mapsto q_{S(q_Z)}]$ を考えると，$Add(S(x), y)\theta_2 \to^*_{\mathcal{A}_1} q_f$ かつ $Add(S(x), y)\theta_2 \not\to^*_{\mathcal{A}_1} q_f$ であるから，同様に $\tilde{Q}_2 = \{q_{S(q_{S(q_Z)})}\}$，$\tilde{\Delta}_1 = \{S(q_{S(q_Z)}) \to q_{S(q_{S(q_Z)})}$, $Add(q_{Nat}, q_{S(q_{S(q_Z)})}) \to q_f\}$ が $\mathcal{A}_1$ に追加され $\mathcal{A}_2$ が構成される．

$\vdots$

Step $n$: 以降任意の $n$ で，$\theta_n = [x \mapsto q_{Nat}, y \mapsto q_{S(q_{S(\dots(q_Z)\dots)})}]$ とすると，$Add(S(x), y)\theta_n \to^*_{\mathcal{A}_{n-1}} q_f$ かつ $Add(S(x), y)\theta_n \not\to^*_{\mathcal{A}_{n-1}} q_f$ であるから，この完備化手続きは停止しない．

## 3.2 完備化手続きの性質

ここでは，4 節で安定項書き換えシステムの完備化手続きを解析するために，文献 [6] では明示的に示されていない木オートマトンの完備化手続きの基本的な性質を示す．以下では，完備化手続き $\mathcal{A}_{i-1} \xRightarrow{l_i \to r_i, \theta_i, q_i} \mathcal{A}_i$ $(0 < i \leq l)$ を考える．また，$0 \leq k \leq l$ とする．

**補題 3.8.** $q \in Q_k \setminus Q_0$ ならば，書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$，位置 $p \in PosF(r) \setminus \{\epsilon\}$ および状態代入 $\theta : \mathcal{V} \to Q_{k-1}$ が存在して，$q = q_{r\theta|_p}$ である．

**証明.** $Q_k \setminus Q_0 = \bigcup_{0<i\leq k} \tilde{Q}_i = \bigcup_{0<i\leq k} \{q_{r_i\theta_i|_p} \mid p \in PosF(r_i) \setminus \{\epsilon\}\}$ および，任意の $i \leq k$ について，$\theta_i : \mathcal{V} \to Q_{i-1}, Q_{i-1} \subseteq Q_{k-1}$ より明らか． □

**補題 3.9.** $g(q_1, ..., q_m) \to q \in \Delta_k^{\perp}$ であるならば，$u_1, ..., u_m \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ および状態代入 $\theta : \mathcal{V} \to Q_{k-1}$ が存在して，$q = q_{g(u_1,...,u_m)\theta}$ である．さらに，$u_i \in \mathcal{V}$ ならば $q_i = u_i\theta$，$u_i \notin \mathcal{V}$ ならば $q_i = q_{u_i\theta}$ である．

**証明.** $\Delta_k^{\perp} = \bigcup_{0<j\leq k} \{g(\alpha(r_j\theta_j|_{p1}), ..., \alpha(r_j\theta_j|_{pm})) \to \alpha(r_j\theta_j|_p) \mid p \in PosF(r_j) \setminus \{\epsilon\}, r_j(p) = g\}$ なので，$r_j|_p = g(r_j|_{p1}, ..., r_j|_{pm}), \theta_j$ が存在して，$q = \alpha(r_j\theta_j|_p) = q_{r_j\theta_j|_p} = q_{g(r_j|_{p1},...,r_j|_{pm})\theta_j}$ である．また，$q_i = \alpha(r_j\theta_j|_{pi})$ より $\alpha$ の定義から，$r_j|_{pi} \in \mathcal{V}$ ならば $q_i = r_j|_{pi}\theta_j$，$r_j|_{pi} \notin \mathcal{V}$ ならば $q_i = q_{r_j|_{pi}\theta_j}$ である． □

**補題 3.10.** $q_{u\theta} \in \tilde{Q}_k$ ならば，$u\theta \to^*_{\tilde{\Delta}_k} q_{u\theta}$ である．

**証明.** 項 $u$ の構造に関する帰納法で示す．まず $q_{u\theta}$ の記法より $u$ は変数ではない．よって $u = g(u_1, ..., u_m)$ のときを考える．$k$ ステップ時の完備化を $\mathcal{A}_{k-1} \xRightarrow{(l \to r, \theta', q)} \mathcal{A}_k$ とする．$q_{u\theta} \in \tilde{Q}_k$ から $\alpha(r\theta'|_p) = q_{r\theta'|_p} = q_{u\theta}$ なる $p \in PosF(r) \setminus \{\epsilon\}$ が存在する．$u, r$ は共に線形であるから，$l \to r$ を名前変えすることで，一般性を失うことなく $u = r|_p, \theta = \theta'$ と考えてよい．したがって，$\tilde{\Delta}_k$ の定義から，$g(\alpha(u_1\theta), ..., \alpha(u_m\theta)) \to \alpha(u\theta) \in \tilde{\Delta}_k$ である．ここで，$u_i \in \mathcal{V}$ ならば $\alpha(u_i\theta) = u_i\theta$，$u_i \notin \mathcal{V}$ ならば $\alpha(u_i\theta) = q_{u_i\theta} \in \tilde{Q}_k$ である．$u_i \notin \mathcal{V}$ のとき帰納法の仮定から $u_i\theta \to^*_{\tilde{\Delta}_k} q_{u_i\theta}$ が成立するので，$u\theta = g(u_1\theta, ..., u_m\theta) \to^*_{\tilde{\Delta}_k} g(\alpha(u_1\theta), ..., \alpha(u_m\theta)) \to_{\tilde{\Delta}_k} \alpha(u\theta) = q_{u\theta}$ が得られる． □

**補題 3.11.** 任意の自然数 $k$ に対して，$\mathcal{A}_k$ は既約である．

**証明.** 自然数 $k$ に関する帰納法で示す．$k = 0$ の時は入力オートマトンは既約なので，それに $q_{any}$ を追加しても既約であることは明らか．$k > 0$ のとき，追加される任意の $q_{r\theta|_p} \in \tilde{Q}_k$ に対して，補題 3.10 から $r\theta|_p \to^*_{\tilde{\Delta}_k} q_{r\theta|_p}$ である．また，$\theta : \mathcal{V} \to Q_{k-1}$ に対して帰納法の仮定から，各 $x$ に対して $t_x \to^*_{\Delta_{k-1}} x\theta$ なる基底項 $t_x \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ が存在する．したがって，$\sigma = [x \mapsto t_x]_{x \in \mathcal{V}(r)}$ と取ると，$r\sigma|_p \to^*_{\Delta_{k-1}} r\theta|_p \to^*_{\tilde{\Delta}_k} q_{r\theta|_p}$ となり，$q_{r\theta|_p}$ は到達可能である．よって $\mathcal{A}_k$ は既約となる． □

**補題 3.12.** $C[q]_p \to^*_{\Delta_k \setminus \Delta_k^{\top}} q_{u\theta}$ とする．このとき，$p \in Pos(u)$ ならば，$q \to^*_{\Delta_0} \alpha(u\theta|_p)$．とくに，$q \notin Q_0$ ならば $q = \alpha(u\theta|_p)$ である．

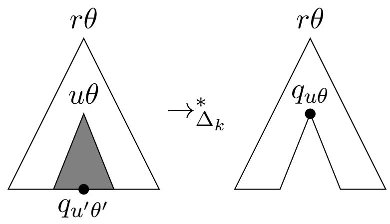


図 1: 状態の階層

**証明.** 文脈 $C[\ ]_p$ の構造に関する帰納法で示す．記法の約束から $u \notin \mathcal{V}$ に注意する．$C[\ ] = \square$ のとき．このとき，$p = \epsilon$ である．$q \to^*_{\Delta_k \setminus \Delta_k^\top} q_{u\theta} \notin Q_0$ および $\Delta_k^\perp$ は $\epsilon$ 規則を含まないことから，$q = q_{u\theta}$ が成立する．$C[\ ]_{ip} = f(v_1, ..., C'[\ ]_p, ..., v_n)$ のとき．$C[q]_{ip} = f(v_1, ..., C'[q]_p, ..., v_n) \to^*_{\Delta_k \setminus \Delta_k^\top} f(q_i, ..., q_n) \to_{\Delta_k \setminus \Delta_k^\top} q_{u\theta}$ であり，$q_{u\theta} \notin Q_0$ から $f(q_i, ..., q_n) \to q_{u\theta} \in \Delta_k^\perp$ である．よって，補題 3.9 から $u = f(u_1, ..., u_n)$ かつ $q_i = \alpha(u_i\theta)$ が成立する．このとき，$u_i$ によって場合分けを行う．

(1) $u_i \notin \mathcal{V}$ のとき．このとき，$q_i = \alpha(u_i\theta) = q_{u_i\theta}$ である．ここで，$C'[q]_p \to^*_{\Delta_k \setminus \Delta_k^\top} q_{u_i\theta}$ に帰納法の仮定を用いて，$q = \alpha(u_i\theta|_p) = \alpha(u\theta|_{ip})$ が成立する．

(2) $u_i \in \mathcal{V}$ のとき．$ip \in Pos(u)$ から $p \in Pos(u_i)$ より $p = \epsilon$ である．よって，$C'[q]_\epsilon = q \to^*_{\Delta_k \setminus \Delta_k^\top} q_{u_i\theta}$ が成立する．ここで，$\Delta_k^\perp$ が $\epsilon$ 規則を含まないことから，$q \to^*_{\Delta_0} \alpha(u\theta|_p)$ である．とくに，$q \notin Q_0$ ならば $q = \alpha(u\theta|_p)$ が成立する．

$\square$

次に，文献 [6] で提案された，状態の階層とよばれる概念を紹介する．完備化手続きでは，右辺の部分項 $u$ に状態が代入されたパターン $u\theta$ を認識するための状態 $q_{u\theta}$ が追加される必要がある．ここで，$x\theta = q_{u'\theta'}$ $(x \in \mathcal{V}(u))$ であった場合には，$u\theta$ の中に状態 $q_{u'\theta'}$ が出現するので，状態 $q_{u\theta}$ には状態が入れ子状に現れる (図 1 参照)．このときの入れ子の深さを階層といい，形式的には以下のように定義される．

**定義 3.13 (状態の階層).** 状態 $q \in Q_k$ の階層 $layer(q)$ を以下のように定める．$q \in Q_0$ のとき $layer(q) = 0$，$q = q_{u\theta}$ のとき $layer(q_{u\theta}) = \max\{layer(x\theta) + 1 \mid x \in \mathcal{V}(u)\}$．ここで，$u$ が基底項の場合は $layer(q_u) = 0$ とする．また，任意の自然数 $k, N$ について，$Q_k^N = \{q \in Q_k \mid layer(q) \leq N\}$ とおく．

**例 3.14.** 例 3.7 において，$k$ ステップ完備化で構成される $\mathcal{A}_k$ の状態の階層は以下のようになる．$layer(q_Z) = layer(q_{Nat}) = layer(q_f) = layer(q_{any}) = 0$，$layer(q_{S(q_Z)}) = 1$，$layer(q_{S(q_{S(q_Z)})}) = 2$，$layer(q_{S(q_{S(q_{S(q_Z)})})}) = 3$.

以下では，木オートマトンの完備化手続きによって追加される状態の階層に上限が存在するならば，追加される状態は有限個であることを示す．まず，状態集合 $Q_k$ を拡張した集合 $P_k$ $(k \geq 0)$ を，$P_0 = Q_0$，$P_{k+1} = P_k \cup \{q_{u\theta} \mid u \lhd r, l \to r \in \mathcal{R}, \theta : \mathcal{V} \to P_k, u \notin \mathcal{V}\}$ と定める．このとき，各 $P_i$ $(i \geq 0)$ が有限集合であることは定義より明らかである．以下では，階層 $i$ 以下の状態 $q$ は $P_i$ の要素となることを示す．

**補題 3.15.** 任意の自然数 $k$，任意の状態 $q \in Q_k$ について，$layer(q) \leq i$ ならば $q \in P_i$ が成立する．

**証明.** 自然数 $k$ に関する帰納法で示す．$k = 0$ の場合は明らかである．$k + 1$ のとき，$q \in Q_{k+1} \setminus Q_k$ かつ $layer(q) \leq i$ とする．このとき，$q = q_{u\theta}$ となる $u \lhd r$ と $\theta : \mathcal{V} \to Q_k$ が存在する．ここで，

$layer(q_{u\theta}) \leq i$ より，任意の変数 $x$ に対して $x\theta \in Q_k$ かつ $layer(x\theta) \leq i-1$．よって，帰納法の仮定より $x\theta \in P_{i-1}$ が得られ，$P_i$ の定義から $q_{u\theta} \in P_i$ が成立する． □

上記の補題より，完備化手続きによって追加される状態の階層に上限 $M$ が存在するなら，追加される状態は有限集合 $P_M$ の要素となることが容易に示される．

**補題 3.16.** 自然数 $M$ が存在して，任意の自然数の $k$ および状態 $q \in Q_k$ に対して $layer(q) \leq M$ とする．このとき，任意の自然数 $k$ に対して $Q_k \subseteq P_M$ が成立する．

**証明.** 補題 3.15 より明らかである． □

次の補題は，追加される状態の階層に上限が存在することと完備化手続きの停止性が等価であることを示している．

**補題 3.17 ([6]).** 完備化手続きが停止するための必要十分条件は，自然数 $M$ が存在して，任意の自然数 $k$ および状態 $q \in Q_k$ に対して $layer(q) \leq M$ となることである．

**証明.** ($\Rightarrow$): もし完備化手続きが停止するならば，$Q_{OUT}$ が有限集合であることから，$q \in Q_{OUT}$ の階層 $layer(q)$ の最大値 $M$ が定まる．したがって，任意の $k$ および $q' \in Q_k$ で $layer(q') \leq M$ である．

($\Leftarrow$): 補題 3.16 より，任意の $k$ について $Q_k \subseteq P_M$ となる．ここで，$P_M$ が有限集合であることに注意すると，遷移規則の取り得る個数は有限なので，$\Delta_0 \subsetneq \Delta_1 \subsetneq \cdots$ なる無限列が得られることはない． よって，完備化手続きは停止する． □

以下，状態の階層と遷移規則との間の関係について考察する．文献 [6] と記法は異なるものの，証明の大まかな流れは文献 [6] によって与えられたものである．

**補題 3.18.** $f(q_1, ..., q_n) \to q \in \Delta_k^{\perp}$ ならば，すべての $i$ $(1 \leq i \leq n)$ で $layer(q_i) \leq layer(q)$ である．

**証明.** 補題 3.9 から $q = q_{f(u_1,...,u_n)\theta}$，$q_i = \alpha(u_i\theta)$ である．$u_i \in \mathcal{V}$ ならば $q_i = u_i\theta$ であり，$u_i \in \mathcal{V}(f(u_1, ..., u_n))$ より $layer(q_i) + 1 = layer(u_i\theta) + 1 \leq layer(q)$ となる．$u_i \notin \mathcal{V}$ ならば $q_i = q_{u_i\theta}$ であり，$\mathcal{V}(u_i) \subseteq \mathcal{V}(f(u_1, ..., u_n))$ より $layer(q_i) = layer(q_{u_i\theta}) \leq layer(q)$ となる．したがって，どちらの場合も $layer(q_i) \leq layer(q)$ が成立する． □

**補題 3.19.** $t\theta \to^*_{\Delta_k \setminus \Delta_k^{\top}} q$ であるならば，任意の $x \in \mathcal{V}(t)$ に対して $layer(x\theta) \leq layer(q)$ である．

**証明.** $\Delta_k \setminus \Delta_k^{\top} = \Delta_k^{\perp} \cup \Delta_0$ に注意する．$t\theta \to^n_{\Delta_k \setminus \Delta_k^{\top}} q$ の遷移の長さ $n$ に関する帰納法で示す．$n = 0$ のときは $q = x\theta$ より自明である．$n > 0$ のとき，最後の遷移の形によって場合分けを行う．

(1) $t\theta \to^{n-1}_{\Delta_k \setminus \Delta_k^{\top}} q' \to_{\Delta_k \setminus \Delta_k^{\top}} q$ のとき．帰納法の仮定から，すべての $x \in \mathcal{V}(t)$ で $layer(x\theta) \leq layer(q')$ が成立する．また，$\Delta_k^{\perp}$ に $\epsilon$ 規則は存在しない．$q' \to q \in \Delta_0$ であることから $q', q \in Q_0$ である．したがって，すべての $x \in \mathcal{V}(t)$ で，$layer(x\theta) \leq layer(q') = layer(q) = 0$ が成立する．

(2) $t\theta \to^{n-1}_{\Delta_k \setminus \Delta_k^{\top}} f(q_1, ..., q_n) \to_{\Delta_k \setminus \Delta_k^{\top}} q$ のとき．このとき，$t = f(t_1, ..., t_n)$ であり，帰納法の仮定からすべての $x \in \mathcal{V}(t_i)$ で $layer(x\theta) \leq layer(q_i)$ が成立する．したがって，すべての $x \in \mathcal{V}(t)$ で $layer(x\theta) \leq \max\{layer(q_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ だから，$\max\{layer(q_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \leq layer(q)$ を示せばよい．$f(q_1, ..., q_n) \to q \in \Delta_0$ のときは，(1) と同様すべての $q_i$ および $q$ が $Q_0$ に含まれているから，$\max\{layer(q_i) \mid 1 \leq i \leq n\} = layer(q) = 0$ となる．$f(q_1, ..., q_n) \to q \in \Delta_k^{\perp}$ のときも，補題 3.18 からすべての $i$ で $layer(q_i) \leq layer(q)$ なので，$\max\{layer(q_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \leq layer(q)$ であることは明らかである．

□

### 3.3 完備化手続きの正当性

ここでは，文献 [3] に基づいて，完備化手続きが停止したとき $(\to_{\mathcal{R}}^*)(\mathcal{L}(\mathcal{A}_{IN})) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_{OUT})$ となることを示す．

**補題 3.20.** $(\to_{\mathcal{R}}^*)(\mathcal{L}(\mathcal{A}_{IN})) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}_{OUT})$.

**証明.** $t \in (\to_{\mathcal{R}}^*)(\mathcal{L}(\mathcal{A}_{IN}))$ とする．このとき，$s \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$，$q_f \in Q_f$ が存在して，$s \to_{\mathcal{A}_{IN}}^* q_f$ かつ $s \to_{\mathcal{R}}^* t$ である．$s \to_{\mathcal{R}}^n t$ ならば $t \to_{\mathcal{A}_{OUT}}^* q_f$ となることを $n$ に関する帰納法で示す．$n = 0$ のときは $s = t$ なので，$\Delta_{IN} \subseteq \Delta_{OUT}$ から成立．$n > 0$ とする．このとき，$l \to r \in \mathcal{R}$，文脈 $C[\,]$，代入 $\sigma$ が存在して $s \to_{\mathcal{R}}^{n-1} C[l\sigma] \to_{\mathcal{R}} C[r\sigma] = t$ となる．帰納法の仮定から，$C[l\sigma] \to_{\mathcal{A}_{OUT}}^* q_f$ である．よって，状態代入 $\theta : \mathcal{V} \to Q_{OUT}$ および状態 $q \in Q_{OUT}$ が存在して，$C[l\sigma] \to_{\mathcal{A}_{OUT}}^* C[l\theta] \to_{\mathcal{A}_{OUT}}^* C[q] \to_{\mathcal{A}_{OUT}}^* q_f$ および $l\theta \to_{\mathcal{A}_{OUT}}^* q$ が成立する．さらに，$\theta$ として $l\theta \to_{\mathcal{A}_{OUT}}^* q$ が最小の長さとなるものを考えることができる (すなわち，$l\theta \to_{\mathcal{A}_{OUT}}^+ l\theta' \to_{\mathcal{A}_{OUT}}^* q$ の形ではない)．また，一般性を失うことなく，任意の $x \in \mathcal{V}(r) \setminus \mathcal{V}(l)$ について $x\theta = q_{any}$ とする．一方，$\mathcal{A}_{OUT}$ が完備化手続きの出力であることから，$l \to r, \theta, q$ が，定義 3.3 の条件 (1)–(3) を同時にみたすことはない．よって，$l \to r, \theta, q$ が条件 (1),(3) はみたしていることから，$r\theta \to_{\mathcal{A}_{OUT}}^* q$ が成立する．したがって，$t = C[r\sigma] \to_{\mathcal{A}_{OUT}}^* C[r\theta] \to_{\mathcal{A}_{OUT}}^* C[q] \to_{\mathcal{A}_{OUT}}^* q_f$ が成立し，$t \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_{OUT})$ が得られる． □

次に，逆方向の包含関係について示す．

**補題 3.21.** $\mathcal{A}_{k-1} \xRightarrow{l_k \to r_k, \theta_k, q_k} \mathcal{A}_k$，$t \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$，$t \to_{\mathcal{A}_k}^* q$ とする．このとき，以下が成立する．

(1) $q = q_{u\theta} \in \tilde{Q}_k$ ならば，代入 $\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{T}(\mathcal{F})$ が存在して，$u\sigma \to_{\mathcal{A}_{k-1}}^* u\theta$ かつ $u\sigma \to_{\mathcal{R}}^* t$ である．

(2) $q \in Q_{k-1}$ ならば，基底項 $s \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ が存在して，$s \to_{\mathcal{A}_{k-1}}^* q$ かつ $s \to_{\mathcal{R}}^* t$ が成り立つ．

**証明.** $t \to_{\mathcal{A}_k}^n q$ の遷移の長さ $n$ に関する帰納法で (1),(2) を同時に示す．$n = 0$ のときは明らか．$n > 0$ のとき，最後の遷移の形によって場合分けを行う．

(I) $t \to_{\mathcal{A}_k}^{n-1} q' \to_{\mathcal{A}_k} q$ のとき．$\Delta_k^{\perp}$ に $\epsilon$ 規則が含まれないことから，$q' \to q \in \Delta_{k-1} \cup \tilde{\Delta}_k^{\top}$ である．

(I-i) $q' \to q \in \Delta_{k-1}$ のとき．$q', q \in Q_{k-1}$ である．(2) に関する帰納法の仮定から，$s'$ が存在して $s' \to_{\mathcal{A}_{k-1}}^* q'$ かつ $s' \to_{\mathcal{R}}^* t$ となる．$s' \to_{\mathcal{A}_{k-1}}^* q' \to_{\mathcal{A}_{k-1}} q$ が成立するので，$s = s'$ とすればよい．

(I-ii) $q' \to q \in \tilde{\Delta}_k^{\top}$ のとき．$q', q \in Q_{k-1}$ であることから，(I-i) と同様に $s'$ が存在して $s' \to_{\mathcal{A}_{k-1}}^* q'$ かつ $s' \to_{\mathcal{R}}^* t$ となる．ここで，$q' \to q \in \tilde{\Delta}_k^{\top}$ より，$q = q_k$ かつ $l_k\theta_k \to_{\mathcal{A}_{k-1}}^* q_k$，$r_k \in \mathcal{V}$ かつ $r_k\theta_k = q'$ が成立する．補題 3.11 から $\mathcal{A}_{k-1}$ は既約なので，各 $x \in \mathcal{V}(l_k)$ で $t_x \to_{\mathcal{A}_{k-1}}^* x\theta_k$ なる基底項 $t_x$ が存在する．よって $\sigma = [r_k \mapsto s'] \cup [x \mapsto t_x]_{x \in \mathcal{V}(l_k) \setminus \{r_k\}}$ ととると，$l_k\sigma \to_{\mathcal{A}_{k-1}}^* l_k\theta_k \to_{\mathcal{A}_{k-1}}^* q$ かつ $l_k\sigma \to_{\mathcal{R}} r_k\sigma = s' \to_{\mathcal{R}}^* t$ が成立する．よって，$s = l_k\sigma$ とすればよい．

(II) $t \to_{\mathcal{A}_k}^{n-1} f(q_1, ..., q_n) \to_{\mathcal{A}_k} q$ のとき．このとき，$t = f(t_1, ..., t_n)$ である．$f(q_1, ..., q_n) \to q \in \Delta_{k-1} \cup \tilde{\Delta}_k^{\perp} \cup \tilde{\Delta}_k^{\top}$ なので，それぞれ場合分けを行う．

(II-i) $f(q_1, ..., q_n) \to q \in \Delta_{k-1}$ のとき．$q_1, ..., q_n, q \in Q_{k-1}$ である．このとき，$t_i \to_{\mathcal{A}_k}^* q_i$ より (2) に関する帰納法の仮定から，$s_i$ が存在して $s_i \to_{\mathcal{A}_k}^* q_i$ かつ $s_i \to_{\mathcal{R}}^* t_i$ となる．$f(s_1, ..., s_n) \to_{\mathcal{A}_{k-1}}^* f(q_1, ..., q_n) \to_{\mathcal{A}_{k-1}} q$ かつ $f(s_1, ..., s_n) \to_{\mathcal{R}}^* f(t_1, ..., t_n) = t$ が成立するので，$s = f(s_1, ..., s_n)$ とすればよい．

(II-ii) $f(q_1, ..., q_n) \to q \in \tilde{\Delta}_k^{\perp}$ のとき．補題 3.9 から $u_1, ..., u_n, \theta$ が存在して，$q = q_{f(u_1, ..., u_n)\theta} \in \tilde{Q}_k$ かつ $q_i = \alpha(u_i\theta)$ $(1 \leq i \leq n)$ である．各 $i$ $(1 \leq i \leq n)$ に対して $\sigma_i$ を以下のように定める．$u_i \in \mathcal{V}$ ならば $q_i = u_i\theta \in Q_{k-1}$ であり，(2) に関する帰納法の仮定

から $s_i$ が存在して $s_i \to^*_{\mathcal{A}_{k-1}} q_i$ かつ $s_i \to^*_{\mathcal{R}} t_i$ なので $\sigma_i = [u_i \mapsto s_i]$ とおく．$u_i \notin \mathcal{V}$ ならば，$q_i = q_{u_i\theta} \in \tilde{Q}_k$ であるので，(1) に関する帰納法の仮定から $u_i\sigma_i \to^*_{\mathcal{A}_{k-1}} u_i\theta$ かつ $u_i\sigma_i \to^*_{\mathcal{R}} t_i$ となる $\sigma_i$ がとれる．$\sigma = \bigcup_{1\leq i\leq n}\sigma_i$ とすると，$f(u_1,...,u_n)\sigma = f(...,s_i,...,u_j\sigma_j,...) \to^*_{\mathcal{A}_{k-1}} f(...,q_i,...,u_j\theta,...) = f(u_1,...,u_n)\theta$ かつ $f(u_1,...,u_n)\sigma = f(...,s_i,...,u_j\sigma_j,...) \to^*_{\mathcal{R}} f(t_1,...,t_n) = t$ が成り立つ．

(II-iii) $f(q_1,...,q_n) \to q \in \tilde{\Delta}^{\top}_k$ のとき．$q = q_k \in Q_{k-1}$ かつ $r_k = f(r_k|_1,...,r_k|_n)$ である．$\tilde{\Delta}^{\top}_k$ の構成から $q_i = \alpha(r_k|_i\theta)$ $(1 \leq i \leq n)$ なので，各 $i$ に対して $\sigma_i$ を以下のように定める．$r_k|_i \in \mathcal{V}$ ならば $q_i = r_k|_i\theta_k \in Q_{k-1}$ であり，(2) に関する帰納法の仮定から $s_i$ が存在して $s_i \to^*_{\mathcal{A}_{k-1}} q_i$ かつ $s_i \to^*_{\mathcal{R}} t_i$ なので $\sigma_i = [u_i \mapsto s_i]$ とおく．$r_k|_i \notin \mathcal{V}$ ならば，$q_i = q_{r_k\theta_k|_i} \in \tilde{Q}_k$ であるので，(1) に関する帰納法の仮定から $r_k|_i\sigma_i \to^*_{\mathcal{A}_{k-1}} r_k\theta_k|_i$ かつ $r_k|_i\sigma_i \to^*_{\mathcal{R}} t_i$ となる $\sigma_i$ がとれる．$\sigma = \bigcup_{1\leq i\leq n}\sigma_i$ とすると，(II-ii) と同様に $r_k\sigma \to^*_{\mathcal{A}_{k-1}} r_k\theta_k$ かつ $r_k\sigma \to^*_{\mathcal{R}} f(t_1,...,t_n)$ が成り立つ．よって，定義 3.3 の条件 (1) から，$l_k\sigma \to^*_{\mathcal{A}_{k-1}} l_k\theta_k \to^*_{\mathcal{A}_{k-1}} q_k$ かつ $l_k\sigma \to_{\mathcal{R}} r_k\sigma \to^*_{\mathcal{R}} f(t_1,...,t_n) = t$ が成り立つので，$s = l_k\sigma$ とすればよい．

□

**補題 3.22.** $\mathcal{L}(\mathcal{A}_{OUT}) \subseteq (\to^*_{\mathcal{R}})(\mathcal{L}(\mathcal{A}_{IN}))$.

**証明.** 任意の自然数 $k$ について $\mathcal{L}(\mathcal{A}_k) \subseteq (\to^*_{\mathcal{R}})(\mathcal{L}(\mathcal{A}_{IN}))$ であることを，$k$ に関する帰納法で示す．$k = 0$ のときは明らかである．よって $k > 0$ とする．補題 3.21(2) から，任意の $q \in Q_{k-1}$ に対して $\mathcal{L}_q(\mathcal{A}_k) \subseteq (\to^*_{\mathcal{R}})(\mathcal{L}_q(\mathcal{A}_{k-1}))$ である．$Q_f \subseteq Q_{k-1}$ より任意の $q \in Q_f$ で $\mathcal{L}_q(\mathcal{A}_k) \subseteq (\to^*_{\mathcal{R}})(\mathcal{L}_q(\mathcal{A}_{k-1})) \subseteq (\to^*_{\mathcal{R}})(\mathcal{L}(\mathcal{A}_{k-1}))$ が成り立つので，$\mathcal{L}(\mathcal{A}_k) = \bigcup_{q\in Q_f}\mathcal{L}_q(\mathcal{A}_k) \subseteq \bigcup_{q\in Q_f}(\to^*_{\mathcal{R}})(\mathcal{L}_q(\mathcal{A}_{k-1})) \subseteq (\to^*_{\mathcal{R}})(\mathcal{L}(\mathcal{A}_{k-1}))$ が成立する．また，帰納法の仮定より $\mathcal{L}(\mathcal{A}_{k-1}) \subseteq (\to^*_{\mathcal{R}})(\mathcal{L}(\mathcal{A}_{IN}))$ が成り立つ．$\to^*_{\mathcal{R}}$ の推移性より $(\to^*_{\mathcal{R}})((\to^*_{\mathcal{R}})(\mathcal{L}(\mathcal{A}_{IN}))) = (\to^*_{\mathcal{R}})(\mathcal{L}(\mathcal{A}_{IN}))$ は明らかなので，$\mathcal{L}(\mathcal{A}_k) \subseteq (\to^*_{\mathcal{R}})(\mathcal{L}(\mathcal{A}_{k-1})) \subseteq (\to^*_{\mathcal{R}})((\to^*_{\mathcal{R}})(\mathcal{L}(\mathcal{A}_{IN}))) = (\to^*_{\mathcal{R}})(\mathcal{L}(\mathcal{A}_{IN}))$ が成立する． □

**定理 3.23 ([3]).** $\mathcal{R}$ を線形な項書き換えシステムとし，$\mathcal{A}_{OUT}$ を $\mathcal{R}$ と $\mathcal{A}_{IN}$ に対する完備化手続きによる出力とする．このとき，$\mathcal{L}(\mathcal{A}_{OUT}) = (\to^*_{\mathcal{R}})(\mathcal{L}(\mathcal{A}_{IN}))$.

**証明.** 補題 3.20 および補題 3.22 から明らか． □

# 4 安定な項書き換えシステムの到達可能性

前節では，項書き換えシステム $\mathcal{R}$ と木オートマトン $\mathcal{A}_{IN}$ に対する完備化手続きが停止するならば，その出力 $\mathcal{A}_{OUT}$ を用いて $\mathcal{R}$ の到達可能性が判定できることを示した．本節では，完備化手続きが停止するための $\mathcal{R}$ の十分条件を与える．

## 4.1 安定な項書き換えシステム

完備化手続きで追加される新しい状態 $q_{u\theta}$ は，項 $u\theta$ のパターンを認識するためのものである．しかし，ある完備化ステップにおいて，もし $l_k\theta_k \to^*_{\mathcal{A}_{k-1}} q_{u\theta}$ となるならば，$u\theta$ の構造とは全く関わりがない項 $r_k\theta_k$ も $r_k\theta_k \to^*_{\mathcal{A}_k} q_{u\theta}$ となり，解析に不都合が生じる (図 2 参照)．そこで，本論文ではこのようなことが起こらないよう項書き換えシステムに安定性という構文的な制限を加える．

**定義 4.1 (安定性).** 書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ が不安定であるとは，ある $l' \to r' \in \mathcal{R}$ が存在して $l'$ が $r$ と重なることをいう．不安定でない書き換え規則を安定であるという．$\mathcal{R}$ が安定であるとは，$\mathcal{R}$ のすべての書き換え規則が安定であることをいう．

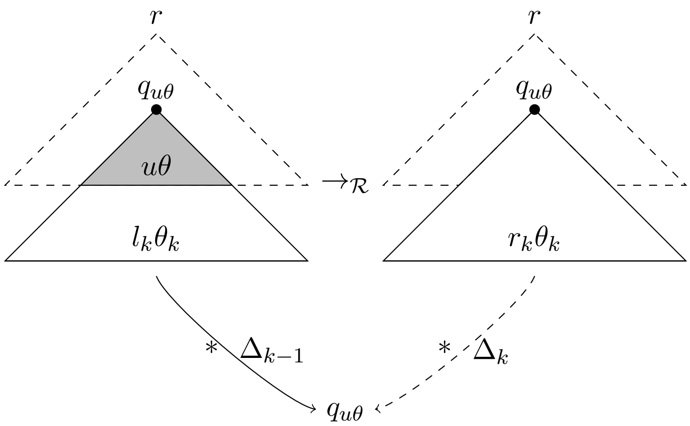


図 2: $k$ ステップ目の完備化

安定な項書き換えシステムの例としては，$\mathcal{R}$ の左辺の根の位置の関数記号 (定義関数記号) が右辺に出現しない場合などがある．

**例 4.2.** $\mathcal{R} = \{v_1 : f(g(x)) \to g(x), v_2 : h(x) \to g(f(x))\}$ に関して，$v_1$ の左辺が $v_2$ の右辺と重なるので，$v_2$ は不安定な書き換え規則である．$\mathcal{R}' = \{v_1 : f(g(x)) \to g(x), v_2' : h(x) \to g(f(k(x)))\}$ に関しては，$v_1, v_2'$ のいずれの左辺も $v_2'$ の右辺と重ならないので，$v_2'$ は安定な書き換え規則である．同様に $v_1$ が安定であることも容易に分かるので，$\mathcal{R}'$ は安定な項書き換えシステムである．

以下では，$\mathcal{R}$ を安定かつ線形な項書き換えシステムとし，$\mathcal{R}$ と $\mathcal{A}_{IN}$ に対する完備化手続き $\mathcal{A}_{i-1} \xRightarrow{l_i \to r_i, \theta_i, q_i} \mathcal{A}_i$ $(0 < i \leq k)$ により構成される木オートマトンの性質を示す．まず，項書き換えシステムが安定なとき，状態 $q_{u\theta}$ に遷移する項が必ず項 $u$ の構造をもつことを次の補題で示す．

**補題 4.3.** $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$，$t \to_{\mathcal{A}_k}^* q_{u\theta}$ ならば，基底代入 $\sigma$ が存在して $t = u\sigma$．

**証明．** 自然数 $k$ に関する帰納法で示す．$k = 0$ のときは $t \to_{\mathcal{A}_0}^* q_{u\theta}$ は成立しないので明らか．$k > 0$ とする．$t \to_{\mathcal{A}_k}^n q_{u\theta}$ として，遷移の長さ $n$ に関する帰納法で示す．$n = 0$ のときは明らか．$n > 0$ とし，最後の遷移規則によって場合分けを行う．$q \notin Q_0$ から，最後の遷移規則は $\Delta_0$ に含まれないことに注意する．

(1) $f(q_1, ..., q_n) \to q_{u\theta} \in \Delta_k^{\perp}$ のとき．このとき，$t = f(t_1, ..., t_n)$ である．補題 3.9 より $u = f(u_1, ..., u_n)$ かつ $q_i = \alpha(u_i\theta)$ が成り立つ．$u_i \in \mathcal{V}$ ならば $q_i = u_i\theta$ なので $\sigma_i = [u_i \mapsto t_i]$ とし，$u_i \notin \mathcal{V}$ ならば $q_i = q_{u_i\theta}$ なので，帰納法の仮定から $t_i = u_i\sigma_i$ となる $\sigma_i$ がとれる．$\sigma = \bigcup_i \sigma_i$ とすると，$t = f(t_1, ..., t_n) = f(u_1\sigma_1, ..., u_n\sigma_n) = u\sigma$ が成り立つ．

(2) $f(q_1, ..., q_n) \to q_{u\theta} \in \Delta_k^{\top}$ あるいは $q' \to q_{u\theta} \in \Delta_k^{\top}$ のとき．$\Delta_k^{\top}$ の定義から $m \leq k$ が存在して，$f(q_1, ..., q_n) \to q_{u\theta} \in \tilde{\Delta}_m^{\top}$ あるいは $q' \to q_{u\theta} \in \tilde{\Delta}_m^{\top}$ である．このとき，$m$ ステップ目における定義 3.3 の条件 (1) から，$l_m\theta_m \to_{\Delta_{m-1}}^* q_{u\theta}$ である．補題 3.11 より $\mathcal{A}_{m-1}$ は既約なので，命題 2.1 から基底代入 $\sigma_m$ が存在して，$l_m\sigma_m \to_{\Delta_{m-1}}^* l_m\theta_m \to_{\Delta_{m-1}}^* q_{u\theta}$ である．よって，$m - 1 < k$ より，$l_m\sigma_m \to_{\Delta_{m-1}}^* q_{u\theta}$ に帰納法の仮定を適用すると，$\sigma$ が存在して $l_m\sigma_m = u\sigma$ が成立する．また，補題 3.8 より，書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ および位置 $p \in PosF(r)$ が存在して $u = r|_p$ となる．したがって，$l_m\sigma_m = r|_p\sigma$ となり，$l_m$ は $r$ と重なる．これは $\mathcal{R}$ が安定であることと矛盾する．

□

以上の補題から，任意の書き換え規則 $l \to r$ および状態代入 $\theta$ を用いた完備化ステップにおいて，定義 3.3 の条件 (1)–(3) をみたす状態 $q_k$ は必ず $Q_0$ に含まれていることが導かれる．加えて，補題

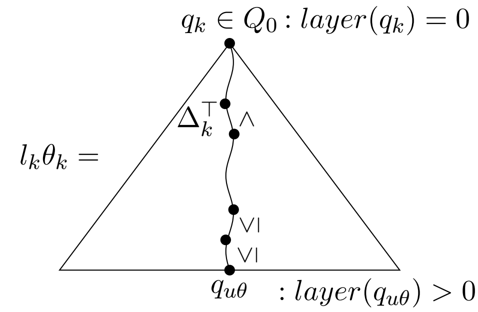


図 3: $l_k\theta_k$ の遷移と状態の階層

3.19 より，$\Delta_k^\top$ 以外の遷移では状態の階層は上昇するので，もし $\theta_k$ として $Q_0$ 以外の状態を用いる場合には，$l_k\theta_k$ の遷移中に必ず階層が減少する遷移 $\Delta_k^\top$ が含まれていなければならないことも示せる (図 3 参照).

**補題 4.4.** $l \to r \in \mathcal{R}$，$l\theta \to^*_{\mathcal{A}_k} q$ とする．このとき，以下が成立する．

(1) $q \in Q_0$ である．

(2) $x \in \mathcal{V}(l)$ が存在し $layer(x\theta) > 0$ ならば，$p \in Pos(l), m \le k, v \to q_m \in \tilde{\Delta}_m^\top$ が存在して，$l\theta \to^*_{\Delta_k \setminus \Delta_k^\top} l\theta[v]_p \to_{\tilde{\Delta}_m^\top} l\theta[q_m]_p \to^*_{\mathcal{A}_k} q$ かつ $x \in \mathcal{V}(l|_p)$ である．

**証明.** (1) $q \notin Q_0$ として矛盾を導く．補題 3.8 から，$q \in Q_k \setminus Q_0$ ならば，$l_i \to r_i, \theta_i, p \in PosF(r_i) \setminus \{\epsilon\}$ が存在して $q = q_{r_i\theta_i|_p}$ である．補題 3.11 および命題 2.1 から，基底代入 $\sigma$ が存在して $l\sigma \to^*_{\mathcal{A}_k} l\theta \to^*_{\mathcal{A}_k} q_{r_i\theta_i|_p}$ が成立．補題 4.3 から $l\sigma = r_i\sigma_i|_p$ となる．よって，$l$ は $r_i$ と重なり，$\mathcal{R}$ の安定性と矛盾する．

(2) $l\theta \to^*_{\Delta_k \setminus \Delta_k^\top} l\theta[v]_p \to_{\Delta_k^\top} l\theta[q_m]_p \to^*_{\mathcal{A}_k} q$ $(x \in \mathcal{V}(l|_p))$ の形の遷移が存在しないならば，補題 3.19 から $layer(q) \ge layer(x\theta) > 0$ が成立する．一方，(1) より $q \in Q_0$ から，$layer(q) = 0$ であるので矛盾する．よって，$v \to q \in \Delta_k^\top = \bigcup_{0<i\le k} \tilde{\Delta}_m^\top$ から，$q = q_m, v \to q_m \in \tilde{\Delta}_m^\top$ なる $m$ が存在する．

□

補題 4.4 において，$\tilde{\Delta}_m^\top$ を追加した完備化ステップにおいて用いられた書き換え規則 $l_m \to r_m \in \mathcal{R}$ を考えると，$r_m$ は $l_k$ に重なることを次の補題で示す．

**補題 4.5.** $\mathcal{A}_{k-1} \xRightarrow{l_k \to r_k, \theta_k, q_k} \mathcal{A}_k$，定義 3.3 の条件 (1) を満たす遷移が $l_k\theta_k \to^*_{\Delta_{k-1}} \circ \to_{\tilde{\Delta}_m^\top} l_k\theta_k[q_m]_p \to^*_{\Delta_{k-1}} q_k$ $(m < k)$ であるとする．このとき，位置 $p \in PosF(l_k)$ で項 $r_m$ と $l_k|_p$ は単一化可能となる．

**証明.** $p \in PosF(l_k)$ かつ $l_k|_p$ と $r_m$ が単一化可能となることを示す．もし $p \notin PosF(l_k)$ とすると $l_k(p) \in \mathcal{V}$ であるから，$l_k\theta_k \to^*_{\mathcal{A}_{k-1}} q_k$ の遷移は，状態代入 $\theta'$ が存在して $l_k\theta_k \to_{\tilde{\Delta}_m^\top} l_k\theta' \to^*_{\Delta_{k-1}} q_k$ の形をしている．これは定義 3.3 の条件 (1) をみたさない．よって，$p \in PosF(l_k)$ である．$l_k|_p$ と $r_m$ が単一化可能となることを示すため，$\tilde{\Delta}_m^\top$ の規則の形で場合分けを行う．$\tilde{\Delta}_m^\top = \{q' \to q_m\}$ のとき，$r_m = x$ であるので明らか．そうでない場合，$\tilde{\Delta}_m^\top = \{f(q_1, ..., q_n) \to q_m\}$ である．このとき，$l_k\theta_k \to^*_{\Delta_{k-1}} \circ \to_{\tilde{\Delta}_m^\top} l_k\theta_k[q_m]_p$ より，$l_k\theta_k|_p \to^*_{\Delta_{k-1}} f(\alpha(r_m\theta_m|_1), ..., \alpha(r_m\theta_m|_n)) = f(q_1, ..., q_n) \to_{\tilde{\Delta}_m^\top} q_m$ である．また，補題 3.11, 命題 2.1 から，基底代入 $\sigma_k$ が存在して $l_k\sigma_k|_p \to^*_{\Delta_{k-1}} l_k\theta_k|_p$ なので，$l_k\sigma_k|_{pi} \to^*_{\Delta_{k-1}} \alpha(r_m\theta_m|_i)$ $(1 \le i \le n)$ が成立する．ここで，各 $i$ $(1 \le i \le n)$ に対して $\sigma_i$ を以下のように構成する．$r_m|_i \in \mathcal{V}$ ならば $\sigma_i = [r_m|_i \mapsto l_k|_{pi}\sigma_k]$ とする．$r_m|_i \notin \mathcal{V}$ ならば $q_i = q_{r_m\theta_m|_i}$ であり，$l_k|_{pi}\sigma \to^*_{\Delta_{k-1}} q_{r_m\theta_m|_i}$ となるので，補題 4.3 より $l_k|_{pi}\sigma_k = r_m|_i\sigma_i$ となる $\sigma_i$ がとれる．$\sigma = \bigcup_{1\le i\le n} \sigma_i$

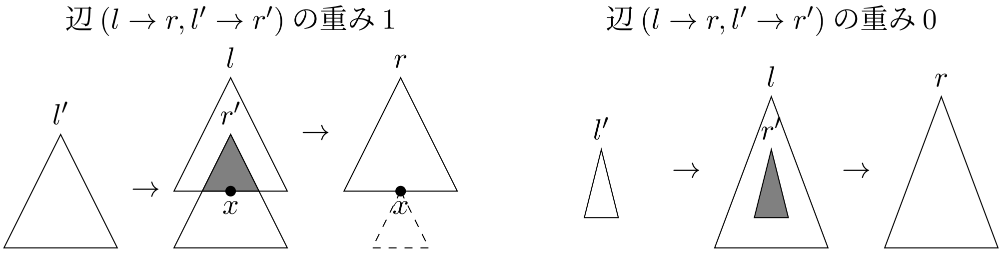


図 4: 接続グラフの辺の重みと書き換え規則間の関係

と定めると，$l_k|_p\sigma_k = f(l_k|_{p1}\sigma_k, ..., l_k|_{pn}\sigma_k) = f(r_m|_1\sigma_1, ..., r_m|_n\sigma_n) = r_m\sigma$ が成立するので，$l_k|_p, r_m$ は単一化可能となる． □

## 4.2 完備化手続きの停止性

ここでは，安定かつ線形な項書き換えシステム $\mathcal{R}$ に対する木オートマトンの完備化手続きが停止するための十分条件を，書き換え規則の接続の概念に基づいて与える．

**定義 4.6 (接続グラフ).** 項書き換えシステム $\mathcal{R}$ の接続グラフを，以下の重み付き有向グラフ $\mathcal{G}(\mathcal{R}) = (V, E, w)$ と定義する．

- $V$ は頂点集合であり，$V = \mathcal{R}$.
- $E$ は辺集合であり，以下のように定める．
  $$E = \{(l \to r, l' \to r') \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} \mid \exists p \in PosF(l).\ \exists\mu = mgu(r', l|_p).\ \mathcal{V}(r) \cap \mathcal{V}(l|_p) \neq \emptyset\}$$
  ただし，$l \to r, l' \to r'$ は変数が重ならないよう名前替えされているものとする．
- $w : E \to \{0, 1\}$ は重み関数であり，以下のように定める (図 4 参照).
  $$w((l \to r, l' \to r')) = \begin{cases} 1 & \cdots \exists p \in PosF(l).\ \exists x \in \mathcal{V}(r) \cap \mathcal{V}(l|_p).\ \exists\mu = mgu(r', l|_p). \\ & \qquad x\mu \notin \mathcal{V} \cup \mathcal{T}(\mathcal{F}). \\ 0 & \cdots \text{上記以外}. \end{cases}$$

**定義 4.7 (経路の重み).** 接続グラフ $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ の辺の列 $(l_i \to r_i, l_{i+1} \to r_{i+1})_{0 \le i \le n}$ を，$\mathcal{G}(\mathcal{R})$ の経路とよぶ．このとき，$l_0 \to r_0 \in \mathcal{R}$ をその経路の始点，$l_{n+1} \to r_{n+1} \in \mathcal{R}$ を終点という．始点と終点が一致する経路をとくに閉路とよぶ．経路の重みを，経路を構成する辺の重みの総和とする．また，頂点 $l \to r \in \mathcal{R}$ の重み $w(l \to r)$ を，接続グラフ $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ 上の始点を $l \to r$ とする経路における重みの最大値とする．ただし，最大値が存在しなかった場合は $w(l \to r) = \infty$ とする．

**例 4.8.** $\mathcal{R} = \{v_1 : f(g(h(x))) \to g(h(x)), v_2 : k(x, g(y)) \to h(s(x))\}$ の接続グラフを考える．$v_1$ の左辺の部分項 $g(h(x))$ は $v_1$ の右辺 $g(h(x'))$ と $\mu = [x \mapsto x']$ で単一化可能であり，$\mathcal{V}(g(h(x))) \cap \mathcal{V}(g(h(x))) \neq \emptyset$ となるので $v_1$ から $v_1$ への辺をもつ．このとき，$x\mu = x' \in \mathcal{V}$ なので，辺 $(v_1, v_1)$ の重みは 0 である．$v_1$ の左辺の部分項 $h(x)$ は $v_2$ の右辺 $h(s(x'))$ と $\mu = [x \mapsto s(x')]$ で単一化可能であり，$\mathcal{V}(h(x)) \cap \mathcal{V}(g(h(x))) \neq \emptyset$ となるので $v_1$ から $v_2$ への辺をもつ．このとき，$x\mu = s(x') \notin \mathcal{V} \cup \mathcal{T}(\mathcal{F})$ なので，辺 $(v_1, v_2)$ の重みは 1 である．$v_2$ の左辺の部分項 $g(y)$ は $v_1$ の右辺 $g(h(x'))$ と単一化可能であるが，$\mathcal{V}(g(y)) \cap \mathcal{V}(h(s(x))) = \emptyset$ なので，$v_2$ から $v_1$ への辺は存在しない．これら以外には左辺と右辺との間に重なりは存在しないので，$\mathcal{R}$ の接続グラフは図 5 のようになる．このとき，頂点 $v_1, v_2$ の重みは $w(v_1) = 1$，$w(v_2) = 0$ である．

頂点の重み $w(l \to r)$ は有限であるとは限らない．しかし，文献 [6] で示されているように，グラフの中に重み 1 以上の閉路が存在しなければあらゆる経路の重みは $\mathcal{R}$ の要素の数以下であることがわかり，$w(l \to r)$ は常に有限である．

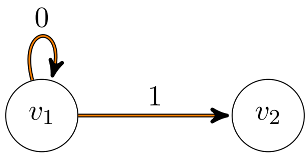


図 5: $\mathcal{R} = \{v_1 : f(g(h(x))) \to g(h(x)), v_2 : k(x, g(y)) \to h(g(x))\}$ の接続グラフ

**補題 4.9.** 接続グラフ $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ に重み 1 以上の閉路が存在しないならば，すべての $l \to r \in \mathcal{R}$ で $w(l \to r) \le |\mathcal{R}|$ である．

**証明.** $l \to r \in \mathcal{R}$ が存在して $w(l \to r) > |\mathcal{R}|$ であったと仮定する．すると定義から，$l \to r = l_0 \to r_0$ を始点とする経路 $(l_i \to r_i, l_{i+1} \to r_{i+1})_{0 \le i \le n}$ が存在して，$\Sigma_{i=0}^{n} w(l_i \to r_i, l_{i+1} \to r_{i+1}) > |\mathcal{R}|$ が成立する．$J = \{j \in \{0, 1, ..., n\} \mid w((l_j \to r_j, l_{j+1} \to r_{j+1})) = 1\}$ とおくと，$|J| > |\mathcal{R}|$ であるから，異なる 2 つの要素 $j, j' \in J$ $(j < j')$ が存在して $l_j \to r_j = l_{j'} \to r_{j'}$ となる．すると，$(l_i \to r_i, l_{i+1} \to r_{i+1})_{j \le i \le j'-1}$ は閉路であり，かつ $w((l_j \to r_j, l_{j+1} \to r_{j+1})) = 1$ であるから重みは必ず 1 以上である．これは，接続グラフ $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ に重み 1 以上の閉路が存在しないことと矛盾する． □

以上の準備のもとで，完備化手続きが停止する十分条件を $\mathcal{R}$ の接続グラフ $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ の構造から与えることができる．

**補題 4.10.** 接続グラフ $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ に重み 1 以上の閉路が存在しないならば，$\mathcal{R}$ と $\mathcal{A}_{IN}$ に対する完備化手続きは停止する．

**証明.** 補題 3.17 から，任意の自然数 $k$ および状態 $q \in Q_k$ で $layer(q) \le |\mathcal{R}| + 1$ であることを示せば完備化手続きは停止する．状態 $q_{u\theta} \in \tilde{Q}_k$ の階層は，1 ステップ完備化のときに使用される規則および状態代入によって定まる．このとき，$layer(q_{u\theta}) = \max\{layer(x\theta_k) + 1 \mid x \in \mathcal{V}(l_k) \cap \mathcal{V}(u)\}$ である．補題 4.9 より $w(l_k \to r_k) \le |\mathcal{R}|$ が成立するので，各完備化ステップ $\mathcal{A}_{k-1} \xRightarrow{l_k \to r_k, \theta_k, q_k} \mathcal{A}_k$ において，すべての $x \in \mathcal{V}(l_k) \cap \mathcal{V}(r_k)$ で $layer(x\theta_k) \le w(l_k \to r_k)$ となることを $k$ に関する帰納法で示せば，$layer(q_{u\theta}) < |\mathcal{R}| + 1$ が得られる．$k = 1$ のときは，$\theta_1 : \mathcal{V} \to Q_0$ より明らか．$k > 1$ のとき，$x \in \mathcal{V}(l_k) \cap \mathcal{V}(r_k)$ が存在して $layer(x\theta_k) > w(l_k \to r_k)$ と仮定して矛盾を示す．$w(l_k \to r_k) \ge 0$ から $layer(x\theta_k) > 0$．$l_k\theta_k \to^*_{\mathcal{A}_{k-1}} q_k$ から，補題 4.4.(2) より $p, m, v \to q_m \in \tilde{\Delta}^{\top}_m$ $(m < k, x \in \mathcal{V}(l_k|_p))$ が存在して，$l_k\theta_k \to^*_{\Delta_{k-1} \setminus \Delta^{\top}_{k-1}} l_k\theta_k[v]_p \to_{\tilde{\Delta}^{\top}_m} l_k\theta_k[q_m]_p \to^*_{\mathcal{A}_{k-1}} q_k$ となる．完備化ステップ $\mathcal{A}_{m-1} \xRightarrow{l_m \to r_m, \theta_m, q_m} \mathcal{A}_m$ を考えると，補題 4.5 から $\mu = mgu(l_k|_p, r_m)$ が存在する．また，$x \in \mathcal{V}(l_k|_p) \cap \mathcal{V}(r_k)$ より $\mathcal{V}(l_k|_p) \cap \mathcal{V}(r_k) \neq \emptyset$．よって，接続グラフ $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ に辺 $(l_k \to r_k, l_m \to r_m)$ が存在する．$p \in PosF(l_k)$ から $l_k|_p = f(l'_1, ..., l'_n)$ とおける．また，$x \in \mathcal{V}(l_k|_p)$ より，$p' \in Pos(l_k|_p)$ が存在して $x = l_k|_{p \cdot p'}$ が成立する．なお，$p' = \epsilon$ とすると $x = l_k|_p$ となり，$p \in PosF(l_k)$ に矛盾するので，$p' \neq \epsilon$ である．

(1) $x\mu \notin \mathcal{V}$ のとき．このとき，$x\mu = r_m|_{p'}$，$p' \in PosF(r_m)$ である．$p' \in PosF(r_m)$ より $r_m \notin \mathcal{V}$ であるから，$l_k(p) = f$ より $r_m = f(r'_1, ..., r'_n)$ とおける．よって，$v = f(\alpha(r'_1\theta_m), ..., \alpha(r'_n\theta_m))$ が成立する．$p' \neq \epsilon$ から $p' = ip''$ とおける．すると，$x = l_k|_{p \cdot p'} = f(l'_1, ..., l'_n)|_{ip''} = l'_i|_{p''}$ となる．$r_m|_{p'} \notin \mathcal{V}$ より $r'_i|_{p''} \notin \mathcal{V}$ であるから，$r'_i \notin \mathcal{V}$ が成立する．よって，$\alpha(r'_i\theta_m) = q_{r'_i\theta_m} = q_{r_m\theta_m|_i}$．また，$l'_i\theta_k[x\theta_k]_{p''} \to^*_{\Delta_{k-1} \setminus \Delta^{\top}_{k-1}} q_{r_m\theta_m|_i}$ に補題 3.12 を用い，$x\theta_k \notin Q_0$ から $x\theta_k = \alpha((r_m\theta|_i)|_{p''}) = \alpha(r_m\theta|_{p'}) = q_{r_m\theta|_{p'}}$ が成立する．ここで，$r_m|_{p'} \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ とすると，$layer(q_{r_m\theta_m|_p}) = layer(x\theta_k) > 0$ と矛盾する．よって，$r_m|_{p'} \notin \mathcal{T}(\mathcal{F})$ となる．したがって，$x \in \mathcal{V}(l_k|_p) \cap \mathcal{V}(r_k), x\mu = r_m|_{p'} \notin \mathcal{V} \cup \mathcal{T}(\mathcal{F})$ から辺 $(l_k \to r_k, l_m \to r_m)$ の重みは 1 となり，$w(l_k \to r_k) \ge w(l_m \to r_m) + 1$ が成立する．一方，$x\theta_k = q_{r_m\theta_m|_{p'}}$ から，$y \in \mathcal{V}(r_m|_{p'})$ が存在して

$layer(y\theta_m) = layer(x\theta_k) - 1 > w(l_k \to r_k) - 1$ となる．このとき，$y \in \mathcal{V}(l_m)$ ならば，$m < k$ に関する帰納法の仮定から $w(l_m \to r_m) \geq layer(y\theta_m)$ が成立し，$y \notin \mathcal{V}(l_m)$ ならば，定義 3.3 の条件 (3) から $layer(y\theta_m) = layer(q_{any}) = 0$ である．どちらの場合も $w(l_m \to r_m) \geq layer(y\theta_m)$ が成立する．したがって，$w(l_k \to r_k) \geq w(l_m \to r_m) + 1 \geq layer(y\theta_m) + 1 = layer(x\theta_k)$ となり，これは仮定 $layer(x\theta_k) > w(l_k \to r_k)$ と矛盾する．

(2) $x\mu \in \mathcal{V}$ のとき．辺 $(l_k \to r_k, l_m \to r_m)$ の存在から $w(l_k \to r_k) \geq w(l_m \to r_m)$ が成立する．一方，$y \in \mathcal{V}(r_m)$ および $p'' \in Pos(r_m)$ が存在して，$r_m|_{p''} = y$ かつ $x \in \mathcal{V}(l_k|_{p \cdot p''})$ である．このとき，$l_k\theta_k \to^*_{\Delta_k \setminus \Delta_k^\top} l_k\theta_k[\tilde{q}]_{p \cdot p''} \to^*_{\Delta_{k-1} \setminus \Delta_{k-1}^\top} l_k\theta_k[v]_p \to_{\tilde{\Delta}_m^\top} l_k\theta_k[q_m]_p$ ならば $\tilde{q} = y\theta_m$ であることを示す．ここで，$l_k\theta_k|_{p \cdot p''} \to^*_{\Delta_k \setminus \Delta_k^\top} \tilde{q}$ に補題 3.19 を用いて，$layer(\tilde{q}) \geq layer(x\theta) > 0$ が成立する．したがって，$\tilde{q} \notin Q_0$ である．

   (a) $r_m \in \mathcal{V}$ のとき．このとき，$r_m = y, v = y\theta_m$ かつ $p'' = \epsilon$ である．ここで，$l_k\theta_k[\tilde{q}]_{p \cdot p''} = l_k\theta_k[\tilde{q}]_p \to^*_{\Delta_k \setminus \Delta_k^\top} l_k\theta_k[y\theta_m]_p$ から，$\tilde{q} \to^*_{\Delta_k \setminus \Delta_k^\top} y\theta_m$ が成立する．また，$\Delta_k^\perp$ は $\epsilon$ 規則を含まないことから $\tilde{q} \to^*_{\Delta_0} y\theta_m$ となる．よって，$\tilde{q} \notin Q_0$ より $\tilde{q} = y\theta_m$ が成立する．

   (b) $r_m \notin \mathcal{V}$ のとき．このとき，$l_k|_p = f(l'_1, ..., l'_n)$ から $r_m = f(r'_1, ..., r'_n)$ となり，$v = f(q_1, ..., q_n)$ である．$p'' \neq \epsilon$ から $p'' = jp'''$ とおける．また，$l_k\theta_k \to^*_{\Delta_k \setminus \Delta_k^\top} l_k\theta_k[\tilde{q}]_{p \cdot p''} = l'_j\theta_m[\tilde{q}]_{p'''}$ から，$l'_j\theta_m[\tilde{q}]_{p'''} \to^*_{\Delta_{k-1} \setminus \Delta_{k-1}^\top} l_k\theta_k[v]_p \to_{\tilde{\Delta}_m^\top} l_k\theta_k[q_m]_p$ が成立する．$r'_j \in \mathcal{V}$ のとき．$y = r'_j$ から $p'' = j, p''' = \epsilon$ となり，$l'_j\theta_m[\tilde{q}]_\epsilon = \tilde{q} \to^*_{\Delta_k \setminus \Delta_k^\top} q_j = \alpha(r'_j\theta_m) = y\theta_m$ である．よって，(2)-(a) と同様に $\tilde{q} \notin Q_0$ より $\tilde{q} = y\theta_m$ が成立する．$r'_j \notin \mathcal{V}$ のとき．$q_j = \alpha(r'_j\theta_m) = q_{r_m\theta|_j}$ である．よって，$l'_j\theta_m[\tilde{q}]_{p'''} \to^*_{\Delta_k \setminus \Delta_k^\top} q_{r_m\theta|_j}$ に補題 3.12 を用いて，$\tilde{q} \notin Q_0$ より $\tilde{q} = \alpha((r_m\theta|_j)|_{p'''}) = \alpha(r_m\theta|_{p''}) = y\theta_m$ が成立する．

以上より $l_k\theta_k|_{p \cdot p''} \to^*_{\Delta_k \setminus \Delta_k^\top} y\theta_m$ なので，補題 3.19 から $layer(y\theta_m) \geq layer(x\theta_k)$ が成立する．また，(1) と同様に $m < k$ の帰納法の仮定および定義 3.3 の条件 (3) を用いて，$w(l_m \to r_m) \geq layer(y\theta_m)$ が成立する．したがって，$w(l_k \to r_k) \geq w(l_m \to r_m) \geq layer(y\theta_m) \geq layer(x\theta_k)$ となり，これは仮定 $layer(x\theta_k) > w(l_k \to r_k)$ と矛盾する．

□

以上の結果から，本論文の主定理を導くことができる．この定理の条件をみたす項書き換えシステムのクラスが，我々が与える木オートマトンの完備化手法が有効な新しいクラスである．

**定理 4.11.** $\mathcal{R}$ を安定かつ線形な項書き換えシステムとする．接続グラフ $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ に重み 1 以上の閉路が存在しないならば，$\mathcal{R}$ の到達可能性は判定可能である．

**証明.** 定理 3.23 および補題 4.10 から明らか． □

最後に，定理 4.11 で与えられた項書き換えシステムのクラスが，成長項書き換えシステムのクラス [4] や有限経路重なり項書き換えシステム [6] のクラスと独立であることを示す．

まず，成長項書き換えシステムについて説明する．$\mathcal{R}$ が成長項書き換えシステムであるとは，すべての書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ で，任意の変数 $x \in \mathcal{V}(l) \cap \mathcal{V}(r)$ の左辺における出現が深さ 1 以下であることをいう．$\mathcal{R}^{-1}$ が成長項書き換えシステムのとき，完備化手続きが停止し，到達可能性が判定可能となることが文献 [4] で示されている．

**命題 4.12 ([4]).** $\mathcal{R}^{-1}$ を線形な成長項書き換えシステムとすると，$\mathcal{R}$ の到達可能性は判定可能である．

**例 4.13.** $\mathcal{R} = \{v_1 : f(a, g(x)) \to f(b, g(h(x)))\}$ は安定かつ線形な項書き換えシステムであり，その接続グラフ $\mathcal{G}(\mathcal{R})$ の辺は存在しないので， 定理 4.11 から到達可能性は判定可能である．一方，$x \in \mathcal{V}(f(a, g(x))) \cap \mathcal{V}(f(b, g(h(x))))$ は右辺の深さ 3 の位置で出現しているため，$\mathcal{R}^{-1}$ は成長項書き換えシステムとはならず，命題 4.12 は適用できない．

**例 4.14.** $\mathcal{R} = \{v_1 : f(x, g(a)) \to f(x, y)\}$ において，$\mathcal{V}(f(x, g(a))) \cap \mathcal{V}(f(x, y))$ 内の変数は右辺の深さ 1 でしか出現していないため，$\mathcal{R}^{-1}$ は成長項書き換えシステムである．したがって，命題 4.12 から $\mathcal{R}$ の到達可能性は判定可能である．一方，これは安定な項書き換えシステムではないので，定理 4.11 は適用できない．

次に，有限経路重なり項書き換えシステムについて説明する．項 $s$ が項 $t$ から突出するとは，$t \notin \mathcal{V}$ かつ，位置 $p \in (Pos(s) \cap PosV(t)) \setminus \{\epsilon\}$ が存在し，$s|_p \notin \mathcal{T}(\mathcal{F})$ かつ $\epsilon \preceq p' \prec p$ となるすべての $p'$ に対して $s(p') = t(p')$ となることをいう．さらに $s|_p \notin \mathcal{V}$ のとき，$s$ は $t$ から真に突出するという．項書き換えシステム $\mathcal{R}$ に対して，頂点集合を $V = \mathcal{R}$，重み付き辺 $E$ を以下のように構成した重み付き有向グラフ $G_{\mathcal{R}} = (V, E, w)$ を，$\mathcal{R}$ の突出グラフという：2 つの $v_1 : l_1 \to r_1, v_2 : l_2 \to r_2 \in V$ に対し，すべての変数 $x \in \mathcal{V}(r_i) \setminus \mathcal{V}(r_i)$ $(i = 1, 2)$ を新しい定数記号 $\diamond$ に置き換えたものをそれぞれ $l'_1 \to r'_1, l'_2 \to r'_2$ とおく．

(1) $r'_2$ が $l'_1$ の部分項から真に突出しているとき，$v_2 \xrightarrow{1} v_1 \in E$,

(2) $r'_2$ の部分項が $l'_1$ から真に突出しているとき，$v_2 \xrightarrow{1} v_1 \in E$,

(3) $l'_1$ の部分項が $r'_2$ から突出しているとき，$v_2 \xrightarrow{0} v_1 \in E$,

(4) $l'_1$ が $r'_2$ の部分項から突出しているとき，$v_2 \xrightarrow{0} v_1 \in E$.

項書き換えシステム $\mathcal{R}$ の突出グラフ $G_{\mathcal{R}}$ に重みが 1 以上の閉路が存在しないとき，$\mathcal{R}$ を有限経路重なり項書き換えシステムという．有限経路重なり項書き換えシステムについては，完備化手続きが停止し，到達可能性が判定可能となることが文献 [6] で示されている．

**命題 4.15 ([6]).** $\mathcal{R}$ を右線形な項書き換えシステム，突出グラフ $G_{\mathcal{R}}$ に重み 1 以上の閉路が存在しないならば， $\mathcal{R}$ の到達可能性は判定可能である．

**例 4.16.** 例 4.13 における $\mathcal{R}$ の突出グラフ $G_{\mathcal{R}}$ は閉路 $v_1 \xrightarrow{1} v_1$ をもつので，$\mathcal{R}$ は有限経路重なり項書き換えシステムではなく，命題 4.15 は適用できない．

**例 4.17.** $\mathcal{R} = \{v_1 : f(x, a) \to f(h(y), x), v_2 : g(y) \to f(g(y), b)\}$ は線形な項書き換えシステムであり，その突出グラフ $G_{\mathcal{R}}$ の辺は $v_2 \xrightarrow{1} v_1$ および $v_2 \xrightarrow{0} v_2$ のみであるので，$\mathcal{R}$ は有限経路重なり項書き換えシステムであり，命題 4.15 から到達可能性は判定可能である．一方，これは安定な項書き換えシステムではないので，定理 4.11 は適用できない．

## 5 おわりに

本論文では，項書き換えシステムの書き換え規則間の重なりに着目し，2 つの書き換え規則間で右辺に左辺が重なることのない安定な項書き換えシステムのクラスを提案し，その到達可能性の判定法を与えた．具体的には，安定な項書き換えシステムの書き換え規則間で左辺に右辺が重なるとき，その状況を接続グラフで解析することによって，安定かつ線形な項書き換えシステムに対する木オートマトンの完備化手続きが停止するための十分条件を与えた．本論文で示された到達可能性が判定可能なクラスは，成長項書き換えシステム [4, 5] や有限経路重なり項書き換えシステム [6] とは独立なクラスとなっている．なお，成長項書き換えシステム [4, 5] や有限経路重なり項書き換えシステム [6] では，線形性よりも弱い右線形性で完備化手続きの停止性が保証されている．本論文で仮定している線形性や安定性の条件を緩めることにより，接続グラフによる解析手法を拡張することは今後の課題である．

**謝辞**　本論文に大変貴重なコメントをいただきました査読者に感謝いたします．なお，本研究は一部日本学術振興会科学研究費 25330004，25280025 の補助を受けて行われた．

## 参考文献

[1] F. Baader, T. Nipkow, *Term Rewriting and All That,* Cambridge University Press, 1998.

[2] H. Comom, M. Dauchet, R. Gilleron, F. Jacquemard, D. Lugiez, C. Loding, S. Tison, M. Tomasi, *Tree Automata Techniques and Applications*, 2007, `http://tata.gforge.inria.fr`.

[3] G. Feuillade, T. Genet, V. Viet Triem Tong, Reachability analysis over term rewriting systems, *Journal of Automated Reasoning*, Vol. 33(3–4), pp. 341–383, 2004.

[4] F. Jacquemard, Decidable approximations of term rewrite systems, In *Proc. of 7th RTA*, LNCS, Vol. 1103, pp. 362–376, 1996.

[5] T. Nagaya, Y. Toyama, Decidability for left-linear growing term rewriting systems, *Information and Computation*, Vol. 178(2), pp. 499–514, 2002.

[6] T. Takai, Y. Kaji, H. Seki, Right-linear finite path overlapping term rewriting systems effectively preserve recognizability, *Scienticae Mathematicae Japonicae*, Vol. 71(2), pp. 127–153, 2010.