永続性と減少ダイアグラム法に基づく合流性自動証明

内田 和真 [1], 青戸 等人 [1], 外山 芳人 [1]

[1] 東北大学 電気通信研究所

{uchida,aoto,toyama}@nue.riec.tohoku.ac.jp

概 要　項書き換えシステムの合流性証明法としてルールラベリングに基づく減少ダイアグラム法が知られている．しかし，非線形項書き換えシステムに対してはこの証明法をそのまま適用することは困難である．本論文では，非線形項書き換えシステムに適用可能な，永続性と減少ダイアグラム法に基づく新しい合流性自動証明法を提案する．本手法では，非線形項書き換えシステムの合流性の証明問題を，永続性と弱線形性を利用して線形型付き項書き換えシステムの合流性の証明問題に変換する．この線形型付き項書き換えシステムに対してルールラベリングに基づく減少ダイアグラム法を適用することで合流性を証明する．さらに，提案手法に基づいた合流性自動判定システムを計算機上に実装し，実験を通じて手法の有効性の評価を行う．

1　はじめに

抽象書き換えシステムの合流性証明法として減少ダイアグラム法が知られている [11, 12]．また，減少ダイアグラム法とルールラベリングをもちいて左線形かつ停止性をもたない項書き換えシステムの合流性証明法が提案されている [2, 9, 12, 13]．しかし，非線形項書き換えシステムに減少ダイアグラム法を直接適用することは一般に困難である．

一方で，非線形かつ停止性をもたない項書き換えシステムの合流性判定法として，項書き換えシステムに型付けを行なっていくつかの部分システムに分解し，部分システムの合流性から永続性を利用して全体の合流性を示す方法が提案されている [3]．また，型付けによる分解に失敗する場合でも，型付き項書き換えシステムが弱左線形のときは非左線形型付き項書き換えシステムの合流性の証明問題をその弱左非線形変数を正規項で具体化して得られる左線形項書き換えシステムの合流性の証明問題に変換し，その左線形項書き換えシステムの合流性を古典的な危険対解析をもちいて示すことで元の項書き換えシステムの合流性を示す方法も提案されている [10]．

本論文では，永続性と減少ダイアグラム法を組み合わせた非線形項書き換えシステムの合流性自動証明法を提案する．本論文のアイデアは，減少ダイアグラム法を適用するために，非線形項書き換えシステムの合流性証明の問題を文献 [10] と同様な手法で永続性をもちいて線形項書き換えシステムの合流性証明の問題に変換する点にある．本証明法では，減少ダイアグラム法が直接適用できない非線形項書き換えシステム R について，R から得られる型付き項書き換えシステム R^τ に含まれる非線形変数に任意の正規項を代入し，R^τ を無限個の書き換え規則をもつ線形項書き換えシステム R^τ_{nf} に変換する．さらに，R^τ_{nf} にルールラベリングに基づく減少ダイアグラム法を直接適用することで元の項書き換えシステム R の合流性を導く．さらに，本論文の合流性証明手法に基づいた合流性自動判定手続きを計算機上に実装し，停止性をもたない非線形項書き換えシステムの合流性判定について，従来手法との比較を通じてその有効性を明らかにする．

本論文は，以下のように構成されている．第 2 節では，抽象リダクションシステムおよび項書き換えシステムの基本的な用語や概念について説明する．第 3 節では，弱線形システムを定義し，R^τ_{nf} の合流性から R^τ の合流性を導く．第 4 節では，永続性とルールラベリングを組み合わせた非線形項書き換えシステムの合流条件を示す．第 5 節では，合流性自動判定手続きの実装と実験について説明する．第 6 節は，まとめと今後の課題である．

2　準備

ここでは，抽象リダクションシステムおよび項書き換えシステムの基本的な用語や概念について説明する [5].

ラベル集合を I とし，$\to_\alpha$ を $\alpha \in I$ によってラベル付けされた集合 D 上の関係とする．このとき，$A = (D, \langle \to_\alpha \rangle_{\alpha \in I})$ を抽象リダクションシステム，$\to_\alpha$ をリダクション関係という．$|I| = 1$ のとき，簡単に $A = (D, \to)$ と表す．$J \subseteq I$ のとき，$\to_J = \bigcup_{\alpha \in J} \to_\alpha$ と定義する．また，$\succ$ は I 上の整礎な半順序とする．$\alpha \in I$ について，$\curlyvee\alpha = \{\beta \in I \mid \alpha \succ \beta\}$ と定義する．また，α，β のどちらかより真に小さいラベルの集合を $\curlyvee\alpha \vee \beta = \{\gamma \in I \mid \alpha \succ \gamma \vee \beta \succ \gamma\}$ と定義する．$\to$ の反射閉包を $\xrightarrow{=}$，対称閉包を $\leftrightarrow$，推移閉包を $\xrightarrow{+}$，反射推移閉包を $\xrightarrow{*}$，同値閉包を $\xleftrightarrow{*}$ とそれぞれ表す.

関数記号の集合を F，変数記号の集合を V，また F と V からなる項の集合を $T(F, V)$ と表す．項 t に 1 回だけ出現する変数を線形変数，2 回以上出現する変数を非線形変数とよぶ．各変数が高々1 回しか現れない項を線形項，非線形変数を含んだ項を非線形項とよぶ．項 t に出現する変数集合を $V(t)$，項 t に出現する非線形変数集合を $V_{nl}(t)$ と表す．項 t の位置の集合 $Pos(t)$ を $t \in V$ のとき $Pos(t) = \{\epsilon\}$，$t = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ のとき $Pos(t) = \{\epsilon\} \cup \{iu \mid 1 \leq i \leq n, u \in Pos(t_i)\}$ と定義する．項 t の位置 p での部分項を $t|_p$，位置 p に出現する関数記号を $t(p)$ と表す．項 t における関数記号の位置集合を $Pos_F(t) = \{p \in Pos(t) \mid t(p) \in F\}$，変数記号の位置集合を $Pos_V(t) = Pos(t) \backslash Pos_F(t)$ と定義する．p と q をある項における位置とする．このとき，ある正整数列 o が存在して $po = q$ ならば $p \leq q$ と順序付けされ，位置 o は q/p と表される．$p \parallel q$ を $p \not\geq q \wedge q \not\geq p$ と定義する．ホールとよばれる特別な定数記号 $\Box$ を唯一つ含む項を文脈とよぶ．文脈 $C[\;]$ のホールを項 t で置き換えて得られる項を $C[t]$ と表す．項 s の $p_1, \ldots, p_n$ の位置の部分項を $t_1, \ldots, t_n$ に置き換えて得られる項を $s[t_1, \ldots, t_n]_{p_1, \ldots, p_n}$ と表す．代入 θ は，$\theta : V \to T(F, V)$ で定義される関数である．$\theta(t)$ は $t\theta$ とも表される．

項の対 (l, r) が $l \notin V$ かつ $V(r) \subseteq V(l)$ をみたすとき，これを書き換え規則とよび $l \to r$ と表す．項書き換えシステム R は書き換え規則の有限集合である．書き換え規則 $l \to r$ の両辺が線形項ならば，この書き換え規則 $l \to r$ は線形であるという．項書き換えシステム R が線形であるとは，R のすべての書き換え規則が線形であることをいう．書き換え規則 $l \to r$ に出現する非線形変数集合を $V_{nl}(l \to r) = V_{nl}(l) \cup V_{nl}(r)$，線形変数集合を $V_l(l \to r) = V(l) \backslash V_{nl}(l \to r)$ と定義する．書き換え規則 $l \to r \in R$，文脈 $C[\;]$，代入 θ が存在して $s = C[l\theta]$ かつ $t = C[r\theta]$ となるとき，項 s が項 t に書き換えられるといい，$s \underset{R}{\to} t$ と表す．R が明らかなときは $\underset{R}{\to}$ を $\to$ と略記する．また，項 s の部分項 $l\theta$ をリデックスといい，リデックスを持たない項を正規形という．R の正規形の集合を $N\!F(R)$ と表す．関係 $s \xleftrightarrow{*} t$ をみたす具体的な書き換えの列 $\delta : s = s_0 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow s_n = t$ を $s \xleftrightarrow{*} t$ の書き換え列とよぶ．このとき，書き換え $s_i \leftrightarrow s_{i+1} (0 \leq i \leq n-1)$ でもちいられた書き換え規則 $l_i \to r_i \in R$ の集合を $Rules(\delta) = \{l_i \to r_i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$ と定義する．また，$s \xleftrightarrow{*} t$ の書き換え列 δ を考えていることが明らかな場合には $Rules(\delta)$ を $Rules(s \xleftrightarrow{*} t)$ と略記する．ある書き換え $C[l\theta] \to C[r\theta]$ について，リデックス $l\theta$ の真部分項が正規形となるとき，この書き換えを最内書き換えとよぶ．最内書き換えを $\underset{im}{\to}$ と表す．また，$s \underset{im}{\xrightarrow{*}} t$ となる正規形 t が存在するとき，項 s は最内正規性をもつという．すべての項が最内正規性をもつとき，項書き換えシステム R は最内正規性をもつという.

項 s, t について，$s\theta = t\theta$ をみたす代入 θ を単一化子とよび，s と t の最汎単一化子を $mgu(s, t)$ と表す．項 t が項 s に対して位置 $p \in Pos_F(s)$ で重なるとは，$s|_p$ と t が最汎単一化子をもつことをいう．また，項書き換えシステム R が重なりをもつとは，ある書き換え規則 $l_1 \to r_1, l_2 \to r_2 \in R$ について，l_1 が l_2 に対して位置 $p \in Pos_F(l_2)$ で重なりをもつことをいう．ただし，一般性を失うことなく $l_1 \to r_1$ と $l_2 \to r_2$ は変数を共有しないものと仮定する．書き換え規則 $l_1 \to r_1$，$l_2 \to r_2$ について，位置 p が存在し l_1 と $l_2|_p \notin V$ が単一化可能で，l_1 と $l_2|_p$ の最汎単一化子を θ としたとき，項の対 $\langle l_2[r_1]_p\theta, r_2\theta \rangle$ を $l_1 \to r_1$ の $l_2 \to r_2$ に対する危険対とよぶ．また，危険対を生成するときに

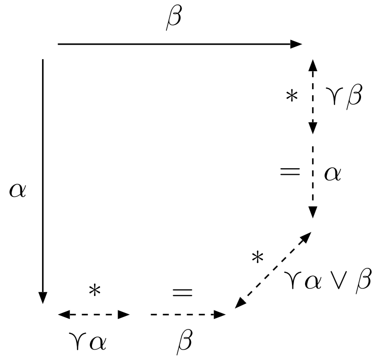

図 1. 局所減少性

もちいた書き換え規則を明示したいときには $\langle l_2[r_1]_p\theta, r_2\theta\rangle_{l_1\to r_1, l_2\to r_2}$ と表す．ただし，$l_1 \to r_1$ と $l_2 \to r_2$ が同一の書き換え規則のときは $p \neq \epsilon$ とする．R に含まれる書き換え規則から得られる危険対の集合を $CP(R)$ と表記する．

項書き換えシステム R が合流性をもつとは，任意の項 t, t_1, t_2 に対して，$t_1 \overset{*}{\leftarrow} t \overset{*}{\rightarrow} t_2$ ならば，ある項 s が存在して $t_1 \overset{*}{\rightarrow} s \overset{*}{\leftarrow} t_2$ となることである．

命題 2.1 ([10]) 項書き換えシステム R_1，R_2 の書き換え関係を $\underset{1}{\to}$，$\underset{2}{\to}$ とし，また $\underset{1}{\to} \subseteq \underset{2}{\to} \subseteq \underset{1}{\overset{*}{\leftrightarrow}}$ が成り立つとする．このとき，R_1 が合流性をもつならば R_2 も合流性をもつ．

2.1　減少ダイアグラム法による合流条件

ここでは，文献 [11, 12] に基づいて減少ダイアグラム法に基づく合流条件について説明する．$\alpha, \beta \in I$ に対して，$\leftarrow_\alpha \cdot \rightarrow_\beta \subseteq \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha} \cdot \overset{=}{\rightarrow}_\beta \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha\vee\beta} \cdot \overset{=}{\leftarrow}_\alpha \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\beta}$ をみたす整礎な半順序 $\succ$ が存在するとき，$\rightarrow_\alpha$ と $\rightarrow_\beta$ は局所減少性をもつという (図 1)．また，抽象リダクションシステム $A = (D, \langle\rightarrow_\alpha\rangle_{\alpha\in I})$ が局所減少性をもつとは，整礎な半順序 $\succ$ が存在して，すべての $\alpha, \beta \in I$ に対して，$\rightarrow_\alpha$ と $\rightarrow_\beta$ が局所減少性をもつことである．

命題 2.2 (減少ダイアグラム法に基づく合流性 [12]**)** 抽象リダクションシステム $A = (D, \langle\rightarrow_\alpha\rangle_{\alpha\in I})$ が局所減少性をもつとき，A は合流性をもつ．

項書き換えシステム R の書き換え規則へラベル付けすることをルールラベリングという [12]．ラベル集合を $\mathbb{N}$，R 上のラベリング関数を $lab : R \to \mathbb{N}$ とする．このとき，書き換え関係 $s = C[l\theta] \to C[r\theta] = t$ は，$lab(l \to r) = i$ ならば $s \to_i t$ とラベル付けされる．

項書き換えシステム R の部分集合 $S \subseteq R$ を考える．このとき，すべての $l \to r \in S$ について $lab(l \to r) \prec \alpha$ が成り立つとき，$S \prec \alpha$ と記す．また，S のすべての書き換え規則 $l \to r \in S$ について，$lab(l \to r) \prec \alpha$ と $lab(l \to r) \prec \beta$ のいずれかが成り立つとき，$S \prec \alpha \vee \beta$ と記す．

定義 2.3 (項書き換えシステムの局所減少性) R 上のラベリング関数 $lab : R \to \mathbb{N}$ を仮定する．このとき，項書き換えシステム R が局所減少性をもつとは，抽象リダクションシステム $(T(F, V), \langle\underset{R}{\rightarrow}_i\rangle_{i\in\mathbb{N}})$ が局所減少性をもつことをいう．

命題 2.4 (線形項書き換えシステムの合流性 [12]**)** 項書き換えシステム R が線形かつ R の任意の危険対が局所減少性をもつならば，R は合流性をもつ．

2.2 永続性による合流条件

ソートの集合を $\mathcal{S}$ とする．変数 x にソート σ，n 引数関数の関数記号 f にソート $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n \to \sigma$ を関連付ける型付けを τ と定義する．項 t を τ で型付けしたものを t^τ と表し，その型を $type(t^\tau)$ と表す．t^τ の型付けが明らかなときには，t^τ を単に t と略記する．τ で型付けされた項の集合を $T(F,V)^\tau$ と表す．型付け τ が R において矛盾がないとは，任意の $l \to r \in R$ において l，r が型付けされて $type(l^\tau) = type(r^\tau)$ となることをいう．このとき，$type(l^\tau \to r^\tau) = type(l^\tau)$ と定める．R 上の矛盾のない型付け τ から得られる型付き項書き換えシステムを $R^\tau = \{l^\tau \to r^\tau \mid l \to r \in R\}$ と定義する．型 σ をもつ項に適用可能な R^τ の書き換え規則の集合を R^τ_σ と表す．R の合流性と R^τ の合流性が等価であることは以下の命題より知られている．

命題 2.5 (永続性 [3]**)** R が $T(F,V)$ 上で合流性をもつことと R^τ が $T(F,V)^\tau$ 上で合流性をもつことは等価である．

3 弱線形システム

項書き換えシステム R に減少ダイアグラム法を直接適用するには R が線形となっている必要がある [2, 12, 13]．以下では，項書き換えシステム R が非線形のときは R に減少ダイアグラム法を直接適用することはできないことを示す．

例 3.1 以下の非線形項書き換えシステム R を考える．

$$R = \{ \quad f(x,x) \to g(x) \tag{1}$$

ここで，$lab((1)) = 1$ のようなラベリング関数 lab を考えると，項 $f(f(x,x), f(x,x))$ は R をもちいて以下のように異なる 2 つの項に書き換えられる．

$$f(g(x), f(x,x)) \leftarrow_1 f(f(x,x), f(x,x)) \to_1 g(f(x,x))$$

このとき，$f(g(x), f(x,x))$ と $g(f(x,x))$ の 2 項間には以下の書き換え列が存在する．

$$f(g(x), f(x,x)) \to_1 \to_1 g(g(x)) \leftarrow_1 g(f(x,x))$$

しかし，これは局所減少性の関係をみたさない．よって，R は局所減少性をもたない．

そこで，非線形項書き換えシステム R に対して減少ダイアグラム法を適用するために，R に含まれる書き換え規則の左辺と右辺に現れる非線形変数に基底項を代入することにより線形化する手法を提案する．この手法が適用できる項書き換えシステムを弱線形システムとよぶ．最初に，非線形型付き項書き換えシステム R^τ が弱線形システムならば，無限個の書き換え規則をもつ線形型付き項書き換えシステム R^τ_{nf} に変換できることを示す．次に，R^τ が弱線形かつ R^τ_{nf} が合流性をもつとき，R^τ は合流性をもつことを示す．

3.1 弱線形システムの線形化

ここでは，弱線形な非線形型付き項書き換えシステム R^τ を無限個の書き換え規則をもつ線形型付き項書き換えシステム R^τ_{nf} に変換する手法を示す．変数 x に対応する定数 c_x の集合を $C_V = \{c_x \mid x \in V\}$ とする．以下では，書き換えを行う項の集合として，$T(F,V)$ の代わりに基底項集合 $T(F \cup C_V)$ をもちいる．項 $t \in T(F,V)$，$\{x_1, \ldots, x_n\} = V(t)$ とおくと，$x_1, \ldots, x_n$ を定数 $c_{x_1}, \ldots, c_{x_n}$ に置き換えた基底項 $t^c \in T(F \cup C_V)$ が得られ，$t \to s \Leftrightarrow t^c \to s^c$ が成立する．よって，項書き換えシステムが $T(F,V)$ 上で合流性をもつことと $T(F \cup C_V)$ 上で合流性をもつことは等価である．また，以下では $T(F \cup C_V)^\tau \cap NF(R^\tau)$ を $T_{NF}(F \cup C_V)^\tau$ と表す．

定義 3.2 (非線形型) ある型付き項書き換えシステム R^τ について，$l \to r \in R^\tau$ と $x \in V_{nl}(l \to r)$ が存在し $\sigma = \mathit{type}(x)$ となるとき，σ を R^τ の非線形型とよぶ．また，R^τ 上の非線形型の集合を $\mathit{NL}(R^\tau)$ と表す．

定義 3.3 (弱線形) 型 σ が最内正規性をもつとは，$\mathit{type}(t) = \sigma$ となる任意の項 t が最内正規性をもつことをいう．また，型付き項書き換えシステム R^τ のすべての非線形型が最内正規性をもつとき，R^τ は弱線形であるという．

定義 3.4 (型付き項書き換えシステムの線形化) 弱線形な型付き項書き換えシステム R^τ の非線形変数に正規形を代入して得られる線形な型付き項書き換えシステム R^τ_{nf} を $R^\tau_{nf} = \{l\hat{\theta} \to r\hat{\theta} \mid l \to r \in R^\tau, \hat{\theta} : V_{nl}(l \to r) \to T_{NF}(F \cup C_V)^\tau\}$ と定義する．

例 3.5 以下の型付き項書き換えシステム R^τ を考える．

$$R = \begin{cases} f(x,x,y) \to f(x,g(x),y) & (2) \\ f(x,y,z) \to h(a) & (3) \end{cases}$$

型付けτ

$$\begin{array}{llllllll} f: & \sigma_0 \times \sigma_0 \times \sigma_1 & \to & \sigma_2, & g: & \sigma_0 & \to & \sigma_0 \\ h: & \sigma_0 & \to & \sigma_2, & a: & & \to & \sigma_0 \end{array}$$

このとき，$V_{nl}((2)) = \{x\}$，$V_{nl}((3)) = \emptyset$ より，$R^\tau_{nf} = \{f(s,s,y) \to f(s,g(s),y) \mid s \in T_{NF}(F \cup C_V)\} \cup \{f(x,y,z) \to h(a)\}$ が得られる．

3.2 線形化されたシステムの合流性

ここでは，R^τ_{nf} の合流性から R^τ の合流性を導く．以下では，R^τ は弱線形をもつと仮定し，$T(F \cup C_V)^\tau$ 上での R^τ の書き換えを $\to$，R^τ_{nf} の書き換えを $\underset{nf}{\to}$ とする．

補題 3.6 $s, t \in T(F \cup C_V)^\tau$ とする．このとき，$s \underset{im}{\to} t$ ならば，$s \underset{nf}{\to} t$ が成り立つ．

証明. $l \to r \in R^\tau$，$s = C[l\theta] \to C[r\theta] = t$，$\theta = [x_1 := u_1, \ldots, x_n := u_n]$ とする．このとき，$s \underset{im}{\to} t$ より $u_1, \ldots, u_n \in T_{NF}(F \cup C_V)^\tau$．定義 3.4 より，$s \underset{nf}{\to} t$ が成り立つ． □

定義 3.7 ($\mathit{NLR}(P^\tau)$) $P^\tau \subseteq R^\tau$ とする．このとき，P^τ のすべての非線形型 σ から得られる R^τ_σ の和集合を $\mathit{NLR}(P^\tau) = \bigcup\{R^\tau_\sigma \mid \sigma \in \mathit{NL}(P^\tau)\}$ と定義する．

補題 3.8 $l \to r \in R^\tau$，$S^\tau = \mathit{NLR}(\{l \to r\})$ とする．このとき，任意の項 $s \in T(F \cup C_V)^\tau$ について $\mathit{type}(s) \in \mathit{NL}(\{l \to r\})$ ならば，ある正規形 $t \in T_{NF}(F \cup C_V)^\tau$ が存在し，$s \overset{*}{\underset{S^\tau_{nf}}{\to}} t$ が成り立つ．

証明. R^τ は弱線形より，R^τ のすべての非線形型は最内正規性をもつ．よって，$\mathit{type}(s) \in \mathit{NL}(\{l \to r\}) \subseteq \mathit{NL}(R^\tau)$ より，$s \overset{*}{\underset{S^\tau}{\to}}_{im} t$ となる正規形 $t \in T_{NF}(F \cup C_V)^\tau$ が存在する．このとき，補題 3.6 より $s \overset{*}{\underset{S^\tau_{nf}}{\to}} t$ が成立する． □

補題 3.9 $l \to r \in R^\tau$，$P^\tau = \{l \to r\}$，$S^\tau = \mathit{NLR}(P^\tau)$，$s, t \in T(F \cup C_V)^\tau$ とする．このとき，$s \underset{P^\tau}{\to} t$ ならば，ある項 $s', t' \in T(F \cup C_V)^\tau$ が存在し，$s \overset{*}{\underset{S^\tau_{nf}}{\to}} s' \underset{P^\tau_{nf}}{\to} t' \overset{*}{\underset{S^\tau_{nf}}{\leftarrow}} t$ が成り立つ．

証明. $s = C[l\theta] \underset{P}{\to} C[r\theta] = t$，$\theta = [x_1 := s_1, \ldots, x_n := s_n, y_1 := u_1, \ldots, y_m := u_m]$，$V_{nl}(l \to r) = \{x_1, \ldots, x_n\}$，$V_l(l \to r) = \{y_1, \ldots, y_m\}$ とする．項 $s_i \in T(F \cup C_V)^\tau (1 \leq i \leq n)$ について $type(s_i) = type(x_i) \in NL(\{l \to r\})$ が示されるので，補題 3.8 より，ある正規形 $t_i \in T_{NF}(F \cup C_V)^\tau$ が存在し，$s_i \overset{*}{\underset{S^\tau_{nf}}{\to}} t_i$ が成立する．非線形変数への代入を $\hat{\theta} = [x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$，線形変数への代入を $\theta' = [y_1 := u_1, \ldots, y_m := u_m]$ とすると，$C[l\theta] \overset{*}{\underset{S^\tau_{nf}}{\to}} C[l\hat{\theta}\theta']$，$C[r\theta] \overset{*}{\underset{S^\tau_{nf}}{\to}} C[r\hat{\theta}\theta']$ が成立する．定義 3.4 より，$l\hat{\theta} \to r\hat{\theta} \in P^\tau_{nf}$．よって，$C[l\hat{\theta}\theta'] \underset{P^\tau_{nf}}{\to} C[r\hat{\theta}\theta']$ となり，$s' = C[l\hat{\theta}\theta']$，$t' = C[r\hat{\theta}\theta']$ とすれば題意をみたす. □

定理 3.10 R^τ が弱線形のとき R^τ_{nf} が $T(F \cup C_V)^\tau$ 上で合流性をもつならば，R^τ は $T(F \cup C_V)^\tau$ 上で合流性をもつ.

証明. 定義 3.4 から $T(F \cup C_V)^\tau$ 上で $\underset{nf}{\to} \subseteq \to$，補題 3.9 から $T(F \cup C_V)^\tau$ 上で $\to \subseteq \overset{*}{\underset{nf}{\leftrightarrow}}$ が得られる．よって，命題 2.1 から R^τ の $T(F \cup C_V)^\tau$ 上での合流性が示される. □

4 非線形項書き換えシステムの合流性

本節では，非線形項書き換えシステム R の合流条件を R が重なりをもたない場合と重なりをもつ場合に分けて考える．特に，R が重なりをもつ場合は無限個の R^τ_{nf} の危険対が出現するため局所減少性を示すことが困難である．そこで，R^τ の危険対 (有限個) の局所減少性から R^τ_{nf} の危険対の局所減少性を間接的に求める線形化保存局所減少性を新たに提案し，それをもちいた非線形項書き換えシステム R の合流条件について説明する.

4.1 重なりをもたないシステムの合流性

ここでは，非線形項書き換えシステム R が重なりをもたないとき，R の合流性を示すには R^τ が弱線形であることを示せば十分であることを示す.

補題 4.1 型付き項書き換えシステム R^τ が重なりをもたないならば，R^τ_{nf} も重なりをもたない.

証明. $l_1\hat{\theta}_1 \to r_1\hat{\theta}_1, l_2\hat{\theta}_2 \to r_2\hat{\theta}_2 \in R^\tau_{nf}$ とおく．このとき，$l_1\hat{\theta}_1$ が $l_2\hat{\theta}_2$ に位置 $p \in Pos(l_2\hat{\theta}_2)$ で重なると仮定して矛盾を導く.

1. $p \in Pos_F(l_2)$ のとき．このとき，l_2 の位置 p の部分項 $l_2|_p$ と $l_1\hat{\theta}_1$ について，$mgu(l_1\hat{\theta}_1, l_2|_p) = \theta$ となる最汎単一化子 θ が存在する．このとき，l_1 と $l_2|_p$ の最汎単一化子は $mgu(l_1, l_2|_p) = \hat{\theta}_1\theta$ となる．しかし，これは R^τ が重なりをもたないことに矛盾する.
2. $p \notin Pos_F(l_2)$ のとき．このとき，$p = p_0q$，$l_2|_{p_0} = x$ をみたすような位置 $p_0 \in Pos_V(l_2)$ と正整数列 q，変数 $x \in V_{nl}(l_2 \to r_2)$ が存在する．このとき，$l_1\hat{\theta}_1$ と $x\hat{\theta}_2|_q$ について $mgu(l_1\hat{\theta}_1, x\hat{\theta}_2|_q) = \theta'$ となる最汎単一化子 θ' が存在する．しかし，定義 3.4 より $x\hat{\theta}_2 \in T_{NF}(F \cup C_V)^\tau$ であり矛盾する. □

定義 4.2 (R^τ_{nf} に対するラベル付け) $l \to r \in R^\tau$ のラベリング関数を lab を，$l\hat{\theta} \to r\hat{\theta} \in R^\tau_{nf}$ のラベリング関数 lab に以下のように拡張する.

$$lab(l\hat{\theta} \to r\hat{\theta}) = lab(l \to r)$$

線形項書き換えシステムについて以下の性質が成立することはよく知られている [5].

$$
\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
s \arrow[r, "\beta", "nf"'] \arrow[d, "\alpha"', "nf"] & u \arrow[d, dashed, "\alpha", "\overset{=}{nf}"'] \\
t \arrow[r, dashed, "\overset{=}{}\ nf", "\beta"'] & {}
\end{tikzcd}
$$

図 2. 補題 4.3

補題 4.3 型付き項書き換えシステム R^{τ}_{nf} について，$l_1\hat{\theta}_1 \to r_1\hat{\theta}_1, l_2\hat{\theta}_2 \to r_2\hat{\theta}_2 \in R^{\tau}_{nf}$ ，l_1 と l_2 は重なりをもたないものとする．このとき，

$$
s = s[l_1\hat{\theta}_1\theta']_p \underset{nf}{\to}_{\alpha} s[r_1\hat{\theta}_1\theta']_p = t
$$

$$
s = s[l_2\hat{\theta}_2\theta']_q \underset{nf}{\to}_{\beta} s[r_2\hat{\theta}_2\theta']_q = u
$$

ならば，$t \overset{=}{\underset{nf}{\to}}_{\beta} \cdot \overset{=}{\underset{nf}{\leftarrow}}_{\alpha} u$ が成り立つ (図 2) ．

証明. p と q の位置による場合分けを行う．

1. $p \parallel q$ のとき．このとき，

$$
\begin{aligned}
s &= s[l_1\hat{\theta}_1\theta', l_2\hat{\theta}_2\theta']_{p,q} \\
t &= s[r_1\hat{\theta}_1\theta', l_2\hat{\theta}_2\theta']_{p,q} \\
u &= s[l_1\hat{\theta}_1\theta', r_2\hat{\theta}_2\theta']_{p,q}
\end{aligned}
$$

とおける．よって，以下が成立する．

$$
t = s[r_1\hat{\theta}_1\theta', l_2\hat{\theta}_2\theta']_{p,q} \underset{nf}{\to}_{\beta} s[r_1\hat{\theta}_1\theta', r_2\hat{\theta}_2\theta']_{p,q} \underset{nf}{\leftarrow}_{\alpha} s[l_1\hat{\theta}_1\theta', r_2\hat{\theta}_2\theta']_{p,q} = u
$$

2. $p \leq q$ のとき．

   (a) $q/p \in Pos(l_2\hat{\theta}_2)$ のとき．補題 4.1 より，$l_1\hat{\theta}_1$ と $l_2\hat{\theta}_2$ は重なりをもたない．よって，(t, u) は存在しない．

   (b) $q/p \notin Pos(l_2\hat{\theta}_2)$ のとき．このとき，$l_1\hat{\theta}_1 \to r_1\hat{\theta}_1, l_2\hat{\theta}_2 \to r_2\hat{\theta}_2$ の線形性より，以下が成立する．

$$
s = s[l_1\hat{\theta}_1\theta']_p \underset{nf}{\to}_{\alpha} s[r_1\hat{\theta}_1\theta']_p = t
$$

$$
s = s[l_1\hat{\theta}_1\theta']_p \underset{nf}{\to}_{\beta} s[l_1\hat{\theta}_1\theta'']_p = u
$$

   また，$r_1\hat{\theta}_1$ の線形性から，$t \overset{=}{\underset{nf}{\to}}_{\beta} s[r_1\hat{\theta}_1\theta'']_p \underset{nf}{\leftarrow}_{\alpha} u$ が成り立つ．

3. $p > q$ のとき．2 と同様.

よって，すべての場合で $t \overset{=}{\underset{nf}{\to}}_{\beta} \cdot \overset{=}{\underset{nf}{\leftarrow}}_{\alpha} u$ が成り立つ. □

定理 4.4 重なりのない項書き換えシステム R から得られる型付き項書き換えシステム R^{τ} が弱線形とする．このとき，R は $T(F, V)$ 上で合流性をもつ．

証明. R が重なりをもたないので，R^τ も重なりをもたない．また，補題 4.1 より R^τ_{nf} も重なりをもたないので補題 4.3 より R^τ_{nf} は局所減少性をもち，命題 2.2 より $T(F \cup C_V)^\tau$ 上で合流性をもつ．このとき，定理 3.10 より R^τ は $T(F \cup C_V)^\tau$ 上で合流性をもち，命題 2.5 より R の $T(F \cup C_V)$ 上での合流性が示される．よって，項書き換えシステム R は $T(F, V)$ 上で合流性をもつ． □

例 4.5 以下の停止性をもたない項書き換えシステム R とその一般的な型付け τ を考える．

$$R = \begin{cases} f(x, g(x)) \to f(g(x), x) & (4) \\ f(x, h(x)) \to f(p(x), h(x)) & (5) \\ p(x) \to h(x) & (6) \end{cases}$$

型付けτ

$$\begin{array}{lcccllccc} f: & \sigma_1 \times \sigma_1 & \to & \sigma_0, & g: & \sigma_1 & \to & \sigma_1 \\ h: & \sigma_1 & \to & \sigma_1, & p: & \sigma_1 & \to & \sigma_1 \end{array}$$

R と一般的な型付け τ から型付き項書き換えシステム R^τ が得られる．R^τ の部分システムは，$R^\tau_{\sigma_1} = \{(6)\}$ と $R^\tau_{\sigma_0} = \{(4), (5), (6)\}$ である．R^τ の非線形型は型 σ_1 のみであり，$R^\tau_{\sigma_1}$ は明らかに停止性をみたすので型 σ_1 となる任意の項は最内正規性をもつ．よって R^τ は弱線形である．また，R は重なりをもたないので定理 4.4 から R の合流性が示される．

4.2 重なりをもつシステムの合流性

ここでは，非線形項書き換えシステム R が重なりをもつ場合の合流条件を検討する．R が重なりをもつとき，R^τ_{nf} の危険対は無限個存在するため，すべての危険対の局所減少性を調べることは困難である．そこで，R^τ_{nf} の危険対の局所減少性を，R^τ の危険対の局所減少性に条件を加えることで間接的に保証する手法を考察する．

以下では，R^τ は弱線形性をもつものとする．

補題 4.6 $l_1\hat{\theta}_1 \to r_1\hat{\theta}_1 \in R^\tau_{nf}$ は $l_2\hat{\theta}_2 \to r_2\hat{\theta}_2 \in R^\tau_{nf}$ に対して危険対 $\langle \hat{v}_1, \hat{v}_2 \rangle$ をもつとする．このとき，$l_1 \to r_1 \in R^\tau$ は $l_2 \to r_2 \in R^\tau$ に対して危険対 $\langle v_1, v_2 \rangle$ をもち，ある θ が存在して $v_1\theta = \hat{v}_1$，$v_2\theta = \hat{v}_2$ となる．

証明. 一般性を失うことなく $l_1 \to r_1$ と $l_2 \to r_2$ は変数を共有しないものと仮定すると，$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}$ と表せる．このとき，$l_1\hat{\theta}$ が $l_2\hat{\theta}$ に位置 $p \in Pos(l_2\hat{\theta})$ で重なり，$\theta' = mgu(l_1\hat{\theta}, l_2\hat{\theta}|_p)$ とすると，$\hat{v}_1 = l_2\hat{\theta}[r_1\hat{\theta}]_p\theta'$，$\hat{v}_2 = r_2\hat{\theta}\theta'$ と表せる．まず，$p \in Pos_F(l_2)$ であることを示す．

$p \notin Pos_F(l_2)$ と仮定する．このとき，$p = p_0q$，$l_2|_{p_0} = x$ をみたすような位置 $p_0 \in Pos_V(l_2)$ と正整数列 q，変数 $x \in V_{nl}(l_2 \to r_2)$ が存在する．このとき，$l_1\hat{\theta}\theta' = l_2\hat{\theta}|_p\theta' = x\hat{\theta}|_q\theta'$ が成立する．また，$\hat{\theta} : V_{nl}(l_2 \to r_2) \to T_{NF}(F \cup C_V)^\tau$ より，$x\hat{\theta}|_q\theta' = x\hat{\theta}|_q$ となる．しかし，定義 3.4 より $x\hat{\theta} \in T_{NF}(F \cup C_V)^\tau$ であり矛盾する．

次に，$p \in Pos_F(l_2)$ の場合を考える．このとき，$l_1\hat{\theta}\theta' = l_2\hat{\theta}|_p\theta' = l_2|_p\hat{\theta}\theta'$．よって，$l_1$ と $l_2|_p$ について最汎単一化子 $\theta'' = mgu(l_1, l_2|_p)$ が存在し，$\hat{\theta}\theta' = \theta \circ \theta''$ となる代入 θ が存在する．このとき，$v_1 = l_2[r_1]_p\theta''$，$v_2 = r_2\theta''$ と表され，$v_1\theta = l_2[r_1]_p\theta''\theta = l_2[r_1]_p\hat{\theta}\theta' = l_2\hat{\theta}[r_1\hat{\theta}]_p\theta' = \hat{v}_1$，$v_2\theta = r_2\theta''\theta = r_2\hat{\theta}\theta' = \hat{v}_2$ より題意が示される． □

以下では，L を α または $\alpha \vee \beta$ と定義する．

補題 4.7 $l \to r \in R^\tau$，$NLR(\{l \to r\}) \prec L$ ，$lab(l \to r) = \beta$ ，$s, t \in T(F \cup C_V)^\tau$ とする．このとき，$s \to_\beta t$ ならば，$s \underset{nf}{\overset{*}{\to}}_{\curlyvee L} \cdot \underset{nf}{\to}_\beta \cdot \underset{nf}{\overset{*}{\leftarrow}}_{\curlyvee L} t$ が成り立つ．

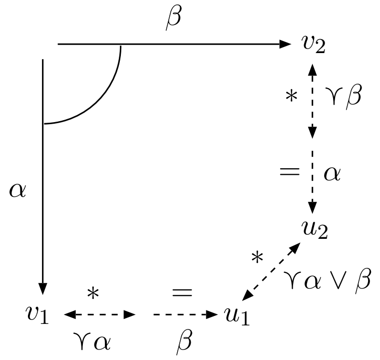

図 3. R^τ 上の危険対の局所減少性

証明. 補題 3.9 より明らか. □

補題 4.8 $s\overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee L}t$ を $T(F \cup C_V)^\tau$ 上の書き換え列とする．このとき，$NLR(Rules(s\overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee L}t)) \prec L$ ならば，$s \underset{nf}{\overset{*}{\leftrightarrow}}_{\curlyvee L} t$ が成り立つ.

証明. $s\overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee L}t$ の書き換え列として以下を考える.

$$s \leftrightarrow_{\beta_1} s_1 \leftrightarrow_{\beta_2} s_2 \leftrightarrow_{\beta_3} \cdots \leftrightarrow_{\beta_{n-1}} s_{n-1} \leftrightarrow_{\beta_n} t$$

ただし，$\beta_1, \ldots, \beta_n \prec L$ とする．このとき，補題 4.7 より以下が成立する.

$$s \underset{nf}{\overset{*}{\rightarrow}}_{\curlyvee L} \cdot \underset{nf}{\leftrightarrow}_{\beta_1} \cdot \underset{nf}{\overset{*}{\leftarrow}}_{\curlyvee L} s_1 \underset{nf}{\overset{*}{\rightarrow}}_{\curlyvee L} \cdot \underset{nf}{\leftrightarrow}_{\beta_2} \cdot \underset{nf}{\overset{*}{\leftarrow}}_{\curlyvee L} s_2 \underset{nf}{\overset{*}{\rightarrow}}_{\curlyvee L} \cdots \underset{nf}{\overset{*}{\leftarrow}}_{\curlyvee L} s_{n-1} \underset{nf}{\overset{*}{\rightarrow}}_{\curlyvee L} \cdot \underset{nf}{\leftrightarrow}_{\beta_n} \cdot \underset{nf}{\overset{*}{\leftarrow}}_{\curlyvee L} t$$

よって，$s \underset{nf}{\overset{*}{\leftrightarrow}}_{\curlyvee L} t$ が成り立つ. □

補題 4.9 $s \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha} s_1 \overset{=}{\rightarrow}_{\beta} t$ を $T(F \cup C_V)^\tau$ 上の書き換え列とする．このとき，$NLR(Rules(s \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha} s_1 \overset{=}{\rightarrow}_{\beta} t)) \prec \alpha$ ならば，$s \underset{nf}{\overset{*}{\leftrightarrow}}_{\curlyvee\alpha} \cdot \underset{nf}{\overset{=}{\rightarrow}}_{\beta} \cdot \underset{nf}{\overset{*}{\leftarrow}}_{\curlyvee\alpha} t$ が成り立つ.

証明. $s_1 \overset{=}{\rightarrow}_{\beta} t$ を場合分けする.

1. $s_1 = t$ のとき．補題 4.8 より，$s \underset{nf}{\overset{*}{\leftrightarrow}}_{\curlyvee\alpha} s_1 = t$ が成り立つ.
2. $s_1 \rightarrow_\beta t$ のとき．補題 4.8 より，$s \underset{nf}{\overset{*}{\leftrightarrow}}_{\curlyvee\alpha} s_1 \overset{=}{\rightarrow}_{\beta} t$ が成り立つ．このとき，補題 4.7 より以下が成立する.

$$s \underset{nf}{\overset{*}{\leftrightarrow}}_{\curlyvee\alpha} s_1 \underset{nf}{\overset{*}{\rightarrow}}_{\curlyvee\alpha} \cdot \underset{nf}{\overset{=}{\rightarrow}}_{\beta} \cdot \underset{nf}{\overset{*}{\leftarrow}}_{\curlyvee\alpha} t$$

よって，$s \underset{nf}{\overset{*}{\leftrightarrow}}_{\curlyvee\alpha} \cdot \underset{nf}{\overset{=}{\rightarrow}}_{\beta} \cdot \underset{nf}{\overset{*}{\leftarrow}}_{\curlyvee\alpha} t$ が成り立つ. □

定義 4.10 (線形化保存局所減少性) 型付き項書き換えシステム R^τ が弱線形であるとする．R^τ 上の危険対 $\langle v_1, v_2\rangle_{l_1 \rightarrow r_1, l_2 \rightarrow r_2} \in CP(R^\tau)$ について，$lab(l_1 \rightarrow r_1) = \alpha$，$lab(l_2 \rightarrow r_2) = \beta$ とするとき，$T(F, V)^\tau$ 上で

$$v_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha} \cdot \overset{=}{\rightarrow}_{\beta} u_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha\vee\beta} u_2 \overset{=}{\leftarrow}_{\alpha} \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\beta} v_2$$

が成立し (図 3)，さらに以下の条件が成立するものとする.

I. $NLR(Rules(v_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha} \cdot \overset{=}{\rightarrow}_{\beta} u_1)) \prec \alpha$

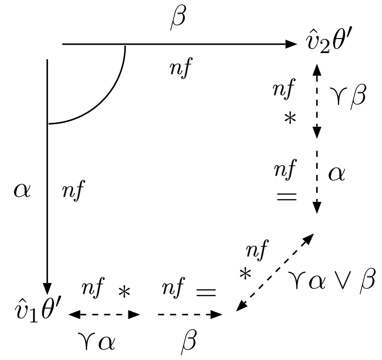

図 4. R^{τ}_{nf} 上の危険対の局所減少性

II. $NLR(Rules(u_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha\vee\beta} u_2)) \prec \alpha \vee \beta$

III. $NLR(Rules(u_2 \overset{=}{\leftarrow}_{\alpha} \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\beta} v_2)) \prec \beta$

このとき，危険対 $\langle v_1, v_2 \rangle$ は線形化保存局所減少性をもつという．また，R^{τ} 上のすべての危険対について線形化保存局所減少性が成立するとき，R^{τ} は線形化保存局所減少性をもつという．

補題 4.11 R^{τ} は線形化保存局所減少性をもつものとする．$\langle \hat{v}_1, \hat{v}_2 \rangle_{l_1\hat{\theta}_1 \to r_1\hat{\theta}_1, l_2\hat{\theta}_2 \to r_2\hat{\theta}_2}$ を R^{τ}_{nf} の危険対とし，$lab(l_1\hat{\theta}_1 \to r_1\hat{\theta}_1) = \alpha$，$lab(l_2\hat{\theta}_2 \to r_2\hat{\theta}_2) = \beta$ とする．このとき，$\hat{v}_1\theta', \hat{v}_2\theta' \in T(F \cup C_V)^{\tau}$ とすると，以下が $T(F \cup C_V)^{\tau}$ 上で成立する (図 4).

$$\hat{v}_1\theta' \underset{nf}{\overset{*}{\leftrightarrow}}_{\curlyvee\alpha} \cdot \underset{nf}{\overset{=}{\rightarrow}}_{\beta} \cdot \underset{nf}{\overset{*}{\leftrightarrow}}_{\curlyvee\alpha\vee\beta} \cdot \underset{nf}{\overset{=}{\leftarrow}}_{\alpha} \cdot \underset{nf}{\overset{*}{\leftrightarrow}}_{\curlyvee\beta} \hat{v}_2\theta'$$

証明. 命題 4.6 より，$\langle v_1, v_2 \rangle_{l_1 \to r_1, l_2 \to r_2} \in CP(R^{\tau})$ と代入 θ が存在し，$\hat{v}_1 = v_1\theta$，$\hat{v}_2 = v_2\theta$ が成り立つ．R^{τ} は線形化保存局所減少性をもつので，$lab(l_1\hat{\theta}_1 \to r_1\hat{\theta}_1) = lab(l_1 \to r_1) = \alpha$，$lab(l_2\hat{\theta}_2 \to r_2\hat{\theta}_2) = lab(l_2 \to r_2) = \beta$ に注意すると，以下が $T(F, V)^{\tau}$ 上で成立する．

$$v_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha} \cdot \overset{=}{\rightarrow}_{\beta} \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha\vee\beta} \cdot \overset{=}{\leftarrow}_{\alpha} \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\beta} v_2$$

よって，以下が $T(F \cup C_V)^{\tau}$ 上で成立する．

$$\hat{v}_1\theta' = v_1\theta\theta' \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha} \cdot \overset{=}{\rightarrow}_{\beta} \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha\vee\beta} \cdot \overset{=}{\leftarrow}_{\alpha} \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\beta} v_2\theta\theta' = \hat{v}_2\theta'$$

補題 4.8，補題 4.9 より以下が $T(F \cup C_V)^{\tau}$ 上で成立する．

$$\hat{v}_1\theta' = v_1\theta\theta' \underset{nf}{\overset{*}{\leftrightarrow}}_{\curlyvee\alpha} \cdot \underset{nf}{\overset{=}{\rightarrow}}_{\beta} \cdot \underset{nf}{\overset{*}{\leftarrow}}_{\curlyvee\alpha} \cdot \underset{nf}{\overset{*}{\leftrightarrow}}_{\curlyvee\alpha\vee\beta} \cdot \underset{nf}{\overset{*}{\rightarrow}}_{\curlyvee\beta} \cdot \underset{nf}{\overset{=}{\leftarrow}}_{\alpha} \cdot \underset{nf}{\overset{*}{\leftrightarrow}}_{\curlyvee\beta} v_2\theta\theta' = \hat{v}_2\theta'$$

よって，$\hat{v}_1\theta' \underset{nf}{\overset{*}{\leftrightarrow}}_{\curlyvee\alpha} \cdot \underset{nf}{\overset{=}{\rightarrow}}_{\beta} \cdot \underset{nf}{\overset{*}{\leftrightarrow}}_{\curlyvee\alpha\vee\beta} \cdot \underset{nf}{\overset{=}{\leftarrow}}_{\alpha} \cdot \underset{nf}{\overset{*}{\leftrightarrow}}_{\curlyvee\beta} \hat{v}_2\theta'$ が成り立つ． □

補題 4.12 型付き項書き換えシステム R^{τ} が線形化保存局所減少性をもつならば，R^{τ}_{nf} は $T(F \cup C_V)^{\tau}$ 上で合流性をもつ．

証明.

$$s = s[l_1\hat{\theta}_1\theta']_p \underset{nf}{\rightarrow}_{\alpha} s[r_1\hat{\theta}_1\theta']_p = t$$

$$s = s[l_2\hat{\theta}_2\theta']_q \underset{nf}{\rightarrow}_{\beta} s[r_2\hat{\theta}_2\theta']_q = u$$

とおく．p と q の位置による場合分けを行う．

1. $p \parallel q$ のとき．補題 4.3 より $t \underset{nf}{\overset{=}{\rightarrow}}_{\beta} \cdot \underset{nf}{\overset{=}{\leftarrow}}_{\alpha} u$ が成り立つ．

2. $p \leq q$ のとき．

    (a) $q/p \in Pos_F(l_2\hat{\theta}_2)$ のとき．補題 4.6 より，ある危険対 $\langle v_1, v_2\rangle$ と代入 $\hat{\theta}$ が存在し，$t = s[v_1\hat{\theta}]_p \underset{nf}{\leftarrow}_{\alpha} s \underset{nf}{\rightarrow}_{\beta} s[v_2\hat{\theta}]_p = u$ と表せる．このとき，補題 4.11 より以下が成立する．

    $$t = s[v_1\hat{\theta}]_p \underset{nf}{\overset{*}{\leftrightarrow}}_{\curlyvee\alpha} \cdot \underset{nf}{\overset{=}{\rightarrow}}_{\beta} \cdot \underset{nf}{\overset{*}{\leftrightarrow}}_{\curlyvee\alpha\vee\beta} \cdot \underset{nf}{\overset{=}{\leftarrow}}_{\alpha} \cdot \underset{nf}{\overset{*}{\leftrightarrow}}_{\curlyvee\beta} s[v_2\hat{\theta}]_p = u$$

    (b) $q/p \notin Pos_F(l_2\hat{\theta}_2)$ のとき．補題 4.3 より $t \underset{nf}{\overset{=}{\rightarrow}}_{\beta} \cdot \underset{nf}{\overset{=}{\leftarrow}}_{\alpha} u$ が成り立つ．

3. $p > q$ のとき．2 と同様．

よって，すべての場合で局所減少性をみたすため，命題 2.2 より，R^{τ}_{nf} は合流性をもつ．

□

以下に示す定理は，定理 4.4 の拡張となっている．

定理 4.13 型付き項書き換えシステム R^{τ} が弱線形かつ線形化保存局所減少性をもつならば，R は合流性をもつ．

証明. 補題 4.12 より，R^{τ}_{nf} は $T(F \cup C_V)^{\tau}$ 上で合流性をもつ．よって，定理 3.10 より，R^{τ} は $T(F \cup C_V)^{\tau}$ 上で合流性をもつ．このとき，命題 2.5 より R は $T(F \cup C_V)^{\tau}$ 上で合流性をもつ．よって，R は $T(F, V)$ 上で合流性をもつことが示される．□

例 4.14 ([10]) 以下の停止性を持たない項書き換えシステム R とその一般的な型付け τ を考える．

$$R = \begin{cases} f(x,y) \to f(g(x), g(x)) & (7) \\ f(g(x), x) \to f(x, g(x)) & (8) \\ g(x) \to h(x) & (9) \end{cases}$$

型付けτ

$$\begin{array}{llllllll} f: & \sigma_1 \times \sigma_1 & \to & \sigma_0, & g: & \sigma_1 & \to & \sigma_1 \\ h: & \sigma_1 & \to & \sigma_1 & & & & \end{array}$$

R と一般的な型付け τ から型付き項書き換えシステム R^{τ} が得られる．R^{τ} の部分システムは，$R^{\tau}_{\sigma_1} = \{(9)\}$ と $R^{\tau}_{\sigma_0} = \{(7),(8),(9)\}$ である．まず，R^{τ} が弱線形かどうか調べる．R^{τ} の非線形型は型 σ_1 のみであり，$R^{\tau}_{\sigma_1}$ は明らかに停止性をみたすので型 σ_1 となる任意の項は最内正規性をもつ．よって R^{τ} は弱線形である．このとき，R^{τ} の危険対は

$$CP(R^{\tau}) = \begin{cases} \langle f(x, g(x)), f(g(g(x)), g(g(x)))\rangle \\ \langle f(g(g(x)), g(g(x))), f(x, g(x))\rangle \\ \langle f(h(x), x), f(x, g(x))\rangle \end{cases}$$

となる．ここで，$lab((8)) = 1$，$lab((7)) = lab((9)) = 0$ のようなラベリングを考える．このとき，危険対 $\langle f(x, g(x)), f(g(g(x)), g(g(x)))\rangle$ に対して，

$$f(x, g(x)) \to_0 \to_0 f(g(g(x)), g(g(x)))$$

となり，また $NLR(\{(7)\}) = \{(9)\} \prec 1$ が成り立つので定理 4.13 の合流条件が成立する．危険対 $\langle f(g(g(x)), g(g(x))), f(x, g(x))\rangle$ に対しても同様に成立する．また，危険対 $\langle f(h(x), x), f(x, g(x))\rangle$ に対して，

$$f(h(x), x) \to_0 f(g(h(x)), g(h(x))) \leftarrow_0 \leftarrow_0 \leftarrow_0 f(x, g(x))$$

となり，$NLR(\{(7),(9)\}) = \{(9)\} \prec 1$ が成り立つので定理 4.13 の合流条件が成り立つ．よって，R^{τ} のすべての危険対は定理 4.13 の合流条件をみたすので，R の合流性が示される．

5　合流性自動判定手続きの実装と実験

本節では，定理 4.13 の合流条件に基づいた合流性自動判定手続きを計算機上に実装し，実験を通じて提案手法の有効性の評価を行う．

5.1　合流性自動判定手続き

以下では，定理 4.13 の合流条件に基づいた合流性自動判定手続きを示す．R の合流性を示すために，まず R から R^τ を構成する．次に，R^τ の危険対 $\langle v_1, v_2\rangle \in CP(R^\tau)$ から書き換え列 $v_1 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow v_2$ を構成し，線形化保存局所減少性をみたすラベル付けが可能であるかを判定する．合流性の判定では，一般性を失うことなく $l \to r \in R$ なら $l \neq r$ と仮定してよい．したがって，以下では $l = r$ となる書き換え規則 $l \to r$ を取り除いた R を考えることとする．

まず，合流性自動判定手続きの実装に必要な定義を与える．型付き項書き換えシステム R^τ 上の危険対 $v_1 \leftarrow_\alpha \cdot \to_\beta v_2$ 線形化保存局所減少性を調べるために $\langle v_1, v_2\rangle$ 間の書き換え列 $v_1 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow v_2$ の候補を構成する必要がある．しかし，例えば $f(x,y) \to x \in R^\tau$ のような変数を減少させる書き換え規則がある場合，この書き換え規則を逆向きに適用すると新しく変数が出現するため，無限個の代入例が出現してしまう．これを防ぐために，$\underset{R^\tau}{\leftrightarrow}$ の代わりに $\underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\to}$ をもちいて近似する．$R^\tau_\leftrightarrow$ は文献 [7] に従って，以下のように定義される．

定義 5.1 ($R^\tau_\leftrightarrow$) 型付き項書き換えシステム R^τ に両辺の変数集合が一致する書き換え規則を反転させたものを追加した型付き項書き換えシステム $R^\tau_\leftrightarrow$ を $R^\tau_\leftrightarrow = R^\tau \cup \{r \to l \mid l \to r \in R^\tau, V(l) = V(r), r \notin V\}$ と定義する．

このとき，$\langle v_1, v_2\rangle$ 間の書き換え列を以下の系列に制限する．

$$v_1 \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\to} \cdots \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\to} \cdot \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\leftarrow} \cdots \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\leftarrow} v_2$$

また，$\underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\to}$ の R^τ 上での書き換えの向きの情報を書き換え規則の名前に付与する．また，書き換え規則の名前から書き換えの向きを判定する関数 dir を以下に定義する．

定義 5.2 (関数 dir) $l \to_\alpha r \in R^\tau_\leftrightarrow$ としたとき，書き換え規則の名前 α から R^τ 上での書き換えの向きを判定する関数 dir を以下のように定義する．

$$dir(\alpha) = \begin{cases} \to & if \;\; l \to_\alpha r \in R^\tau \\ \leftarrow & if \;\; l \to_\alpha r \in R^\tau_\leftrightarrow \backslash R^\tau \end{cases}$$

$R^\tau_\leftrightarrow$ に対するラベル付けは以下のように定義される．

定義 5.3 ($R^\tau_\leftrightarrow$ に対するラベル付け) R^τ 上のラベリング関数 lab を，$R^\tau_\leftrightarrow$ 上のラベリング関数 lab に以下のように拡張する．

$$lab(l \to r) = lab(r \to l) \qquad if \;\; dir(l \to r) = \leftarrow$$

次に，$R^\tau_\leftrightarrow$ をもちいて R^τ 上の任意の危険対が線形化保存局所減少性をもつための条件を示す．R^τ 上で危険対 $v_1 \leftarrow_\alpha \cdot \to_\beta v_2$ が線形化保存局所減少性をもつことを示すには，

$$v_1 \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\overset{*}{\to}}_{\curlyvee\alpha} \cdot \underset{R^\tau}{\overset{=}{\to}}_\beta u_1 \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\overset{*}{\to}}_{\curlyvee\alpha\vee\beta} u \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\overset{*}{\leftarrow}}_{\curlyvee\alpha\vee\beta} u_2 \underset{R^\tau}{\overset{=}{\leftarrow}}_\alpha \cdot \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\overset{*}{\leftarrow}}_{\curlyvee\beta} v_2$$

が成立し，さらに

I. $NLR(Rules(v_1 \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\overset{*}{\to}}_{\curlyvee\alpha} \cdot \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\overset{=}{\to}}_\beta u_1)) \prec \alpha$

II. $NLR(Rules(u_1 \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\overset{*}{\to}}_{\curlyvee\alpha\vee\beta} u \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\overset{*}{\leftarrow}}_{\curlyvee\alpha\vee\beta} u_2)) \prec \alpha \vee \beta$

III. $NLR(Rules(u_2 \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\overset{=}{\leftarrow}}_{\alpha} \cdot \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\overset{*}{\leftarrow}}_{\curlyvee\beta} v_2)) \prec \beta$

をみたすような u_1, u_2 とルールラベリングが存在することを示せば良い．

次に，書き換え列から上記の条件をみたすようなルールラベリングが存在するか判定するための条件式を構成するために必要な定義をいくつか与える．

定義 5.4 (ラベル情報列) 書き換え列 $v_1 \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\to}_{\alpha_1} \cdots \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\to}_{\alpha_n} u$ からラベル情報列 $(I(\alpha_1), \ldots, I(\alpha_n))$ を求める関数 $labseq$ を以下のように定義する．

$$labseq(v_1 \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\to}_{\alpha_1} \cdots \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\to}_{\alpha_n} u) = (I(\alpha_1), \ldots, I(\alpha_n))$$

ここで，ラベル情報 $I(\alpha_i)$ は以下のように定義される．

$$I(\alpha_i) = (\alpha_i, \{lab(l \to r) \mid l \to r \in NLR(Rules(\underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\to}_{\alpha_i}))\})$$

定義 5.5 (ラベル情報列に対する条件式) ラベル情報列 $(I(\alpha_1), \ldots, I(\alpha_n))$ と書き換え規則の名前 α, β から条件式 $\Phi^\alpha_\beta((I(\alpha_1), \ldots, I(\alpha_n)))$ を以下のように生成する．

$$\Phi^\alpha_\beta((I(\alpha_1), \ldots, I(\alpha_n))) = \bigvee_{k=0}^{n} \Psi_k((I(\alpha_1), \ldots, I(\alpha_n)))$$

$$\begin{aligned}\Psi_k(((\alpha_1, A_1), \ldots, (\alpha_n, A_n))) = & [(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\} \cup \bigcup_{i=0}^{k} A_i) \prec \alpha] \\ & \wedge (\alpha_k = \beta) \wedge (dir(\alpha_k) = \to) \\ & \wedge [(\{\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n\} \cup \bigcup_{i=k+1}^{n} A_i) \prec (\alpha \vee \beta)]\end{aligned}$$

定義 5.6 (交差列集合) 項 v_1, v_2 から項 u で交差する書き換え列 $v_1 \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\to}_{\alpha_1} \cdots \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\to}_{\alpha_n} u \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\leftarrow}_{\beta_m} \cdots \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\leftarrow}_{\beta_1} v_2$ からラベル情報列の対を求める関数 $labjoin$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}& labjoin(v_1 \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\to}_{\alpha_1} \cdots \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\to}_{\alpha_n} u \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\leftarrow}_{\beta_m} \cdots \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\leftarrow}_{\beta_1} v_2) = \\ & \qquad (labseq(v_1 \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\to}_{\alpha_1} \cdots \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\to}_{\alpha_n} u), labseq(v_2 \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\to}_{\beta_1} \cdots \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\to}_{\beta_m} u))\end{aligned}$$

また，項 v_1, v_2 の長さ k 以下の交差列集合 $J^k_{R^\tau_\leftrightarrow}(v_1, v_2)$ を以下のように定義する．

$$J^k_{R^\tau_\leftrightarrow}(v_1, v_2) = min_{\sqsupseteq\times\sqsupseteq}\{labjoin(v_1 \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\to}_{\alpha_1} \cdots \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\to}_{\alpha_n} \cdot \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\leftarrow}_{\beta_m} \cdots \underset{R^\tau_\leftrightarrow}{\leftarrow}_{\beta_1} v_2) \mid n, m \leq k\}$$

ただし，ラベル情報列上の半順序関係 $\sqsupseteq$ を以下のように定義し，$min_{\sqsupseteq\times\sqsupseteq}$ は極小要素の集合を表す．

$$(I(\alpha_1), \ldots, I(\alpha_n)) \sqsupseteq (I(\alpha_{i_1}), \ldots, I(\alpha_{i_m})) \qquad (1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n)$$

以下では，定理 4.13 の合流条件に基づいた合流性自動判定手続きを示す．

合流性自動判定手続き

入力：項書き換えシステム R，上限ステップ数 k

出力：合流性判定結果

1. R と矛盾しない最も一般的な型付け τ を求める．
2. R^τ のすべての非線形型 σ を求める．
3. すべての非線形型 σ について，以下を実行する．
   3-1. R^τ_σ を求める．
   3-2. R^τ_σ が最内正規性をもつことを示す．最内正規性をもたなければ失敗を返す．
4. R^τ の危険対集合 $CP(R^\tau)$ を求める．もし $CP(R^\tau) = \emptyset$ ならば，成功を返す．
5. すべての危険対について線形化保存局所減少性が成立することを示す．ただし，危険対の交差を判定する書き換え列の上限ステップ数を k とする．成立するならば成功，そうでなければ失敗を返す．

項書き換えシステムに自動で型付けを行う手続きを以下に与える．

自動型付け手続き

入力：項書き換えシステム R
出力：型付け τ

1. R に出現するすべての書き換え規則について，変数記号が重複しないように変数の名前変えを行う．
2. R に出現するすべての関数，変数記号についてそれぞれ異なるソートをつける．
3. すべての書き換え規則 $l \to r$ について，以下の条件をみたすようにソートを変更し，型付け τ を生成する．
   - $\mathit{type}(l) = \mathit{type}(r)$
   - 関数記号の引数の型とその引数の項の型を一致させる．
4. 型付け τ を出力する．

以下に，危険対の交差を判定する書き換え列の上限ステップ数を k としたとき，任意の危険対について線形化保存局所減少性が成立するようなルールラベリングが存在するか判定するための条件式を構成する手順を示す．条件式の判定は，SMT ソルバをもちいて行う．

線形化保存局所減少性判定手続き

入力：型付き項書き換えシステム R^τ，上限ステップ数 k
出力：R^τ の線形化保存局所減少性判定結果

1. R^τ の危険対集合 $CP(R^\tau)$ を求める．このとき，危険対 $v_1 \leftarrow_\alpha \cdot \rightarrow_\beta v_2$ を求めるのに用いた書き換え規則の名前 α, β を $\langle v_1, v_2 \rangle$ に添付する．
2. R^τ から $R^\tau_\leftrightarrow$ を構成する．
3. $\langle v_1, v_2 \rangle \in CP(R^\tau)$ より交差列集合 $J^k_{R^\tau_\leftrightarrow}(\langle v_1, v_2 \rangle)$ を求める．$J^k_{R^\tau_\leftrightarrow}(\langle v_1, v_2 \rangle) = \emptyset$ ならば失敗を返す．
4. 危険対 $\langle v_1, v_2 \rangle \in CP(R^\tau)$ に関する条件式 $\mathit{Cond}(\langle v_1, v_2 \rangle)$ を，交差列集合 $J^k_{R^\tau_\leftrightarrow}(\langle v_1, v_2 \rangle)$ と 1 で危険対 $\langle v_1, v_2 \rangle$ に添付した書き換え規則の名前 α, β をもちいて以下のように構成する．

$$\mathit{Cond}(\langle v_1, v_2 \rangle) = \bigvee \{ \Phi^\alpha_\beta(\gamma) \wedge \Phi^\beta_\alpha(\delta) \mid (\gamma, \delta) \in J^k_{R^\tau_\leftrightarrow}(\langle v_1, v_2 \rangle) \}$$

5. すべての危険対について線形化保存局所減少性をみたすルールラベリングを示す条件式 $Cond$ を以下のように構成する．
$$Cond = \bigwedge \{ Cond(\langle v_1, v_2 \rangle) \mid \langle v_1, v_2 \rangle \in CP(R^\tau) \}$$
6. 条件式 $Cond$ の充足可能性を SMT ソルバをもちいて判定し，充足可能ならば成功，そうでなければ失敗を返す．

5.2 実装と実験

上記の合流性自動判定手続きに基づいた合流性自動判定システムを SML/NJ をもちいて実装した (約 1000 行)．ただし，最内正規性の自動判定法はほとんど知られていないので，最内正規性の十分条件である停止性をもちいて判定した．停止性の判定には $\mathsf{T_TT_2}$[8] をもちい，また，条件式 $Cond$ の判定には SMT ソルバ Yices[6] を使用した．例 4.14 の項書き換えシステムに対する合流性自動判定手続きの動作例を図 5 に示す．また，鈴木らの論文 [10] に記載されている非線形項書き換えシステム (例 1-9) と，付録 A に示す弱線形な非線形項書き換えシステム (例 10-16) について，本システムと本研究室で開発している合流性自動判定システム ACP[4] をもちいて合流性自動判定実験を行った．ACP には鈴木らの合流性自動判定システム [10] も組み込まれている．これらの例は非線形であるためルールラベリングに基づく減少ダイアグラム法はそのまま適用できない．実験結果を表 1 に示す．表 1 の k は危険対の交差を判定する書き換えステップ数の上限を表し，○は成功，×は失敗を表す．本システムでは成功 15 例，失敗 1 例，ACP では成功 8 例，失敗 8 例だった．本システムでは ACP で合流性が判定できない項書き換えシステムについても合流性を示すことができた．次に，合流性の公開問題集 Cops[1] に記載されている合流性をもつ項書き換えシステム 261 例について，危険対の交差を判定する書き換えステップ数の上限 $k = 3$ として合流性自動判定実験を行ったところ，本システムでは成功 69 例，失敗 192 例，ACP では成功 230 例，失敗 31 例であり，ACP で判定に失敗するが本システムで判定に成功する例は 1 例のみ存在した．

6 まとめと今後の課題

本論文では，永続性と減少ダイアグラム法を組み合わせた非線形項書き換えシステムの合流性証明法を提案した．本証明法では，与えられた非線形項書き換えシステム R から型付き項書き換えシステム R^τ を構成する．次に，R^τ が弱線形ならば R^τ の書き換え規則に含まれる非線形変数を基底正規形に置き換えることで R^τ を無限個の書き換え規則を含む線形な項書き換えシステム R^τ_{nf} に変換する．さらに，減少ダイアグラム法を適用して R^τ_{nf} の $T(F \cup C_V)^\tau$ 上での合流性を示し，R^τ の弱線形性から R^τ の $T(F, V)^\tau$ 上での合流性を示し，永続性をもちいて R の $T(F, V)$ 上での合流性を導く．また，本論文では，線形化保存局所減少性を新たに定義し，R^τ_{nf} の無限個の危険対に対する局所減少性を，R^τ の有限個の危険対に対する線形化保存局所減少性から導く手法を示した．また，提案手法に基づき合流性自動証明システムの実装を行い，非線形項書き換えシステムについて線形化保存局所減少性をもちいた合流性自動判定が成功する場合があることを実験を通じて明らかにした．今回提案した合流性証明法では，非線形項書き換えシステムのうち弱線形な項書き換えシステムに制限されているため，条件を緩和してより多くの項書き換えシステムに適用可能な合流性証明法を提案することは今後の課題である．また，ルールラベリング法の改良なども今後の課題である．

謝辞

本論文に貴重なコメントを頂きました査読者に深く感謝いたします．なお，本研究は一部日本学術振興会科学研究費 25330004，25280025，23500002 の補助を受けて行われた．

```
Input
r1 : F(x, y) -> F(G(x), G(x))
r2 : F(G(x), x) -> F(x, G(x))
r3 : G(x) -> H(x)
Types
F : 1*1 -> 0
G : 1 -> 1
H : 1 -> 1

check Termination of Non-Linear-Type by TTT2
Non-Linear-Type : Terminating
Input : Weak-Linear

Input : Overlap
CP :
[ <F(z, G(z)) , F(G(G(z)), G(G(z)))> ,
  <F(G(G(y)), G(G(y))) , F(y, G(y))> ,
  <F(H(u), u) , F(u, G(u))> ]

check satisfiability of rulelabeling condition by Yices
Satisfiable
(= r1 0)
(= r2 1)
(= r3 0)

Input : CR
```

図 5. 合流性自動判定システムの実行例

表 1. 合流性自動判定実験結果

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	ACP
例 1[10]	○	○	○	○
例 2[10]	○	○	○	○
例 3[10]	○	○	○	○
例 4[10]	○	○	○	○
例 5[10]	○	○	○	○
例 6[10]	○	○	○	○
例 7[10]	×	○	○	○
例 8[10]	○	○	○	○
例 9[10]	×	○	○	×
例 10	○	○	○	×
例 11	○	○	○	×
例 12	×	○	○	×
例 13	×	○	○	×
例 14	×	○	○	×
例 15	×	×	○	×
例 16	×	×	×	×

参考文献

[1] Confluence Problems(Cops). `http://termcomp-devel.uibk.ac.at/cops/`.

[2] T. Aoto. Automated confluence proof by decreasing diagrams based on rule-labeling. In *Proc. of 21st RTA*, LIPIcs, Vol. 6, pp. 7–16. 2010.

[3] T. Aoto and Y. Toyama. Persistency of confluence. *Journal of Universal Computer Science*, Vol. 3, No. 11, pp. 1134–1147. 1997.

[4] T. Aoto, J. Yoshida, and Y. Toyama. Proving confluence of term rewriting systems automatically. In *Proc. of 20th RTA*, LNCS, Vol. 5595, pp. 93–102. 2009.

[5] F. Baader and T. Nipkow. *Term Rewriting and All That.* Cambridge University Press, 1998.

[6] B. Dutertre and L. de Moura. The Yices SMT Solver. `http://yices.csl.sri.com/`.

[7] N. Hirokawa and A. Middeldorp. Decreasing diagrams and relative termination. *Journal of Automated Reasoning*, Vol. 47, pp. 481–501. 2011.

[8] M. Krop, C. Sternagel, H. Zankl, and A. Middeldorp. Tyrolean termination tool 2. In *Proc. of 20th RTA*, LNCS, Vol. 5595, pp. 295–304. 2009.

[9] 的場正樹, 青戸等人, 外山芳人. 片側減少ダイアグラム法による項書き換えシステムの可換性証明法. コンピュータソフトウェア, Vol. 30, No. 1, pp. 187–202. 2013.

[10] 鈴木翼, 青戸等人, 外山芳人. 永続性に基づく項書き換えシステムの合流性証明. コンピュータソフトウェア, Vol. 30, No. 3, pp. 148–162. 2013.

[11] V. van Oostrom. Confluence by decreasing diagrams. *Theoretical Computer Science*, Vol. 175, pp. 159–181. 1997.

[12] V. van Oostrom. Confluence by decreasing diagrams: converted. In *Proc. of 19th RTA*, LNCS, Vol. 5117, pp. 306–320. 2008.

[13] H. Zankl, B. Felgenhauer, and A. Middeldorp. Labelings for decreasing diagrams. In *Proc. of 22nd RTA*, LIPIcs, Vol. 10, pp. 377–392. 2011.

A 付録

以下に合流性自動証明の実験のために新たに用意した非線形項書き換えシステム 7 例を示す．これらはすべて停止性をみたさないので，通常の合流性証明法を適用することは困難である．

例 10

$$R = \begin{cases} f(x,y) \to f(g(x),g(y)) \\ f(x,x) \to a \\ g(x) \to x \end{cases}$$

例 11

$$R = \begin{cases} f(x,g(x),y) \to p(h(x),y) \\ f(x,y,z) \to f(x,g(x),z) \\ g(x) \to h(x) \end{cases}$$

例 12

$$R = \begin{cases} f(x,g(y)) \to f(g(y),g(x)) \\ f(x,x) \to a \\ f(x,y) \to f(y,x) \\ g(x) \to x \end{cases}$$

例 13

$$R = \begin{cases} f(x,x) \to f(g(x),h(x)) \\ f(x,g(y)) \to f(g(x),g(x)) \\ f(x,h(y)) \to f(h(x),h(x)) \\ g(x) \to h(x) \end{cases}$$

例 14

$$R = \begin{cases} f(x,g(x)) \to f(g(x),g(x)) \\ f(x,h(y)) \to f(h(y),h(y)) \\ g(x) \to h(x) \end{cases}$$

例 15

$$R = \begin{cases} f(x,g(x)) \to f(h(x),h(x)) \\ f(x,x) \to f(h(x),h(x)) \\ f(h(x),y) \to p(d(x),d(y)) \\ p(h(x),y) \to f(g(y),g(y)) \\ d(x) \to h(x) \\ g(h(x)) \to h(x) \end{cases}$$

例 16

$$R = \begin{cases} f(x,h(x)) \to f(h(x),h(x)) \\ f(x,k(x,y)) \to f(h(y),h(y)) \\ h(x) \to k(x,x) \\ k(a,a) \to h(b) \\ a \to b \end{cases}$$