名目書き換えシステムの合流性について

鈴木 貴樹 [1], 菊池 健太郎 [1], 青戸 等人 [1], 外山 芳人 [1]

[1] 東北大学 電気通信研究所

{takaki,kentaro,aoto,toyama}@nue.riec.tohoku.ac.jp

概 要　名目書き換えシステム (Fernández&Gabbay,2007) は，変数におけるアトムの非出現制約を取り入れた高階項書き換えシステムである．名目書き換えシステムの合流条件としては，Fernández&Gabbay により与えられた停止性と危険対の交差性に基づく条件が知られている．しかし，名目書き換えでは書き換え規則におけるアトムの置換を考慮する必要があるため，Fernández&Gabbay の条件では無限個の危険対に対する交差性を検証することになり，実効的な合流性判定手続きの実現は困難である．本論文では，置換を明示した形で書き換えを定式化し，これに基づいたより精密な危険対補題を与える．書き換えの前後で α 同値性を保存する書き換え規則の新たなクラスを提案し，実効的な判定手続きが実現可能な名目書き換えシステムの合流条件を与える．

1　はじめに

変数束縛はさまざまな形式的な記述において広く使われている．このような形式的記述では，変数束縛がある項に対する α 同値性を考える必要があるが，一般には，α 同値性は暗黙的に扱われることが多い．しかし，実際の定理自動証明や計算機上で実装を行う際には，形式的に扱う必要があり，これは多くの労力が必要である．このため，変数束縛をより容易に見通しよく扱うためのさまざまな枠組みが提案されてきた [4, 8, 11, 12].

名目技法 [8, 11] は，このような変数束縛を扱うために提案された枠組みの一つであり，伝統的な変数束縛の取り扱いではあまり一般的でなかった非出現制約や置換といった仕組みを体系の基本要素に取り入れた独創的な枠組みである．従来の変数束縛をもつ枠組みでは，一般に，高階項に対する単一化が決定不能になるのと対照的に，名目項では単一化が決定可能となる [2, 13]．このため，名目項に関する効率の良いアルゴリズムなどの研究が進められている [1, 10].

名目書き換えシステム [5] は，名目項に基づいた高階書き換えシステムである．名目書き換えシステムを利用することにより，一階述語論理式やラムダ計算のように変数束縛を含む項に対する書き換えを実現できる．

例 1.1 ([5])．論理積と全称記号からなる一階述語論理式の冠頭標準形を求める名目書き換えシステム $\mathcal{R}_{pnf}$ は以下のような規則で与えられる．

$$\mathcal{R}_{pnf} = \begin{cases} a\#X & \vdash & and(X, forall([a]Y)) & \to & forall([a]and(X,Y)) & (R_1) \\ a\#X & \vdash & and(forall([a]Y), X) & \to & forall([a]and(Y,X)) & (R_2) \end{cases}$$

ここで，X, Y は書き換え規則中のメタな変数を表し，a は一階述語論理式における変数を意味するアトムを表す．$a\#X$ は書き換え規則の適用において，変数 X はアトム a が自由に現れる項には具体化できないという制約を表す．一般的な記法に基づき，$and(X,Y)$ を $X \wedge Y$，$forall([a]X)$ を $\forall a.X$ と表すと，$\mathcal{R}_{pnf}$ は次のようになる．

$$\mathcal{R}_{pnf} = \begin{cases} a\#X & \vdash & X \wedge \forall a.Y & \to & \forall a.(X \wedge Y) & (R_1) \\ a\#X & \vdash & (\forall a.Y) \wedge X & \to & \forall a.(Y \wedge X) & (R_2) \end{cases}$$

このとき，$(\forall a.P(a)) \wedge (\forall b.Q(b))$ の冠頭標準形は，$\mathcal{R}_{pnf}$ の規則による書き換えによって以下のように求められる．

$$\emptyset \vdash (\forall a.P(a)) \wedge (\forall b.Q(b)) \to_{R_1} \forall b.((\forall a.P(a)) \wedge Q(b)) \to_{R_2} \forall b.\forall a.(P(a) \wedge Q(b)) \qquad \square$$

変数束縛をもつさまざまな高階書き換えシステムが提案されているが，一般的には，第一階項書き換えシステムと比較して，高階書き換えシステムに対する強力な書き換え理論の構築は難しい．このため，より簡明な体系である名目書き換えシステムに対する強力な書き換え理論の構築が期待される．

名目書き換えシステムに対して，一様な (uniform) システムにおける停止性と危険対の交差性 (joinability) に基づく合流条件，一様な直交システムにおける合流条件が知られている [5]．さらに，効率的な照合アルゴリズムを適用可能な閉書き換え (closed rewriting)[5, 6] と，それに対する停止性の検証手法や完備化手続き [7] が提案されている．

本論文では，書き換えシステムの重要な性質の一つである合流性について検討する．名目書き換えシステムの合流条件としては，停止性と危険対の交差性に基づく条件 [5] が基本的である．しかし，文献 [5] における名目書き換えシステムは，あらゆるアトムの名前変え (置換) により生成される同変な (equivariant) 書き換え規則からなる無限集合として定義されている．そのため，この合流条件を利用し合流性を検証するためには，無限個の危険対に対して交差性を検証する必要があり，実効的な合流性判定手続きの実現は困難である．

さらに，合流条件が適用可能である一様な名目書き換えシステムにおいても，次の例で見られるように，同一の項の同じ位置に同変な規則を適用して得られる二つの項は必ずしも合流するとは限らない．以下で，$R^{(a\ b)}$ は規則 R 中に出現するアトム a, b を入れ替える操作である．

例 1.2. 名目書き換え規則として $R = \emptyset \vdash f\ X \to [a]X$ をとり，名目項 $f\ a$ を同変な二つの規則 $R^{Id} = \emptyset \vdash f\ X \to [a]X$ と $R^{(a\ b)} = \emptyset \vdash f\ X \to [b]X$ でそれぞれ書き換えると，$\emptyset \vdash f\ a \to_{R^{Id}} [a]a$, $\emptyset \vdash f\ a \to_{R^{(a\ b)}} [b]a$ が得られる．この二つの項が合流するかどうかは他の規則に依存する． □

したがって，合流性を判定するためには，同変な規則の根の位置での重なりから得られる危険対についてもすべて調べなければならない．

本論文では，置換を明示した形で書き換え関係を定式化し，書き換え規則の有限集合として実際的な構成が可能な名目書き換えシステムを提案する．この定式化に基づいて危険対補題を示し，決定可能な合流条件を与える．さらに，同変かつ根重なりの危険対が α 同値となる α 安定性の概念を与える．そして，名目書き換えシステムが α 安定となるための十分条件を与え，本論文で提案する合流条件が具体例に対しても適用可能であることを示す．

本論文の構成は次のとおりである．2 節では，名目項の基本的な定義と記法について説明し，有限集合による名目書き換えシステムの定義を与える．3 節では，危険対補題を与え決定可能な合流条件を与える．4 節では，α 安定な書き換えシステムとなるための十分条件を与える．5 節は，本論文のまとめである．

2 名目書き換えシステム

名目書き換え [5] は，束縛変数を扱えるように通常の項書き換えを拡張した枠組みの一つである．本節では，名目書き換えシステムを規則の有限集合として再定義し，文献 [5] とは異なる書き換え関係を導入する．まず，名目項に関する基本的な定義と記法について説明する．

2.1 名目項

関数記号の集合を $\Sigma = \{f, g, h, \dots\}$，変数の可算無限集合を $\mathcal{X} = \{X, Y, Z, \dots\}$ とする．アトムの可算無限集合を $\mathcal{A} = \{a, b, c, x, y, \dots\}$ とする．$\mathcal{A}$ 上の互換をアトムの対で表し，置換を互換のリストで表す．置換 π をリストの右から順にアトム a に適用した結果を $\pi(a)$ で表す．例えば，置換 $(b\ c)(a\ b)$ に対して，$((b\ c)(a\ b))(a) = c$，$((b\ c)(a\ b))(b) = a$，$((b\ c)(a\ b))(c) = b$ となる．二つの置換の合成を $\circ$ で表す．恒等置換を Id で表す．置換 π に対する逆置換を π^{-1} で表す．

名目項 (あるいは単に項) は文法

$$t ::= a \mid \pi \cdot X \mid (t_1, \ldots, t_n) \mid [a]t \mid f\ t$$

で与えられる．それぞれ，アトム，保留変数，タプル，抽象，関数適用とよぶ．また，$Id{\cdot}X$ を X と略す．$f\ ()$ を単に f と書く．項 t に出現する変数の集合を $V(t)(\subseteq \mathcal{X})$ で表す．項 t に出現する自由アトムの集合 $FA(t)$ は，$FA(a) = \{a\}$; $FA(\pi{\cdot}X) = \emptyset$; $FA((t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_i FA(t_i)$; $FA([a]t) = FA(t) \setminus \{a\}$; $FA(f\ t) = FA(t)$ で定義される．

例 2.1. ラムダ計算におけるラムダ抽象 $\lambda a.X$ を $lam([a]X)$，関数適用 XY を $app(X, Y)$ で表すと，ラムダ項 $(\lambda a.\lambda b.aX)a$ は，名目項の記法で $app(lam([a]lam([b]app(a, X))), a)$ と表現することができる．ここで，X は任意のラムダ項 (a や b を自由アトムとして含んでいてもよい) で置き換えられることを意図したメタレベルの変数である．この項 t に出現する変数の集合は $V(t) = \{X\}$ であり，自由アトムの集合は $FA(t) = \{a\}$ である． □

項 t の位置集合 $Pos(t)$ は，$Pos(a) = Pos(\pi{\cdot}X) = \{\varepsilon\}$; $Pos((t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_i \{ip \mid p \in Pos(t_i)\} \cup \{\varepsilon\}$; $Pos([a]t) = Pos(f\ t) = \{1p \mid p \in Pos(t)\} \cup \{\varepsilon\}$ で定義される．項 t の位置 p の部分項を $t|_p$ で表す．項 t の保留変数の位置集合，アトムの位置集合をそれぞれ $Pos_{\mathcal{X}}(t), Pos_{\mathcal{A}}(t)$ で表す．また，$Pos_{\mathcal{X}\mathcal{A}}(t) = Pos_{\mathcal{X}}(t) \cup Pos_{\mathcal{A}}(t)$，$Pos_{\bar{\mathcal{X}}}(t) = Pos(t) \setminus Pos_{\mathcal{X}}(t)$，$Pos_X(t) = \{p \mid \exists \pi.\, t|_p = \pi \cdot X\}$ と定義する．正整数列 u, v が $u \preceq v$ とは $v = uw$ となる w が存在することである．$u \preceq v$ でも $v \preceq u$ でもないとき $u||v$ と記す．

ホールは特別な定数記号□であり，ホールを含む項を文脈という．文脈 C における位置 p_i のホールを項 t_i で置き換えて得られる項を $C[t_1, \ldots, t_n]_{p_1,\ldots,p_n}$ あるいは略して $C[t_1, \ldots, t_n]$ で表す．同様に，項 s における位置 p_i の部分項を t_i で置き換えて得られる項を $s[t_1, \ldots, t_n]_{p_1,\ldots,p_n}$ で表す．

次に，α 同値性や名目書き換えを定義するために必要となる保留あり置換，保留なし置換を定義する．項 t に対する保留あり置換 $\pi \cdot t$ は，$\pi \cdot a = \pi(a)$; $\pi \cdot (\pi' \cdot X) = (\pi \circ \pi') \cdot X$; $\pi \cdot (t_1, \ldots, t_n) = (\pi \cdot t_1, \ldots, \pi \cdot t_n)$; $\pi \cdot ([a]t) = [\pi \cdot a](\pi \cdot t)$; $\pi \cdot (f\ t) = f\ \pi \cdot t$ と定義される．保留なし置換 t^π は，$a^\pi = \pi \cdot a$; $(\pi' \cdot X)^\pi = (\pi \circ \pi' \circ \pi^{-1}) \cdot X$; $(t_1, \ldots, t_n)^\pi = (t_1^\pi, \ldots, t_n^\pi)$; $([a]t)^\pi = [\pi \cdot a](t^\pi)$; $(f\ t)^\pi = f\ (t^\pi)$ と定義される．置換 π, π' と項 t に対して，$\pi \cdot (\pi' \cdot t) = (\pi \circ \pi') \cdot t$，$(t^\pi)^{\pi'} = t^{\pi' \circ \pi}$ が成り立つ．

代入 σ は変数から項への写像で，$dom(\sigma) = \{X \mid \sigma(X) \neq X\}$ である．$dom(\sigma) = \{X_1, \ldots, X_n\}$ かつ $\forall i.\, \sigma(X_i) = t_i$ のとき，σ を $[X_1 := t_1, \ldots, X_n := t_n]$ と記す．項 t に対する代入 σ の適用を $t\sigma$ で表す．このとき，t に現れる保留変数 $\pi{\cdot}X$ 中の X が $\sigma(X)$ に置き換わり，保留あり置換 $\pi{\cdot}(\sigma(X))$ となることに注意する．置換 π，項 t，代入 σ に対して，$\pi \cdot (t\sigma) = (\pi \cdot t)\sigma$ が成り立つ [5]．また，代入に対する置換 $\pi \cdot \sigma$ を $(\pi \cdot \sigma)(X) = \pi \cdot (\sigma(X))$ で定義する．

2.2 α 同値性と名目書き換えシステム

名目書き換えシステムにおける書き換え関係は，α 同値性も考慮して定義される．本論文では，文献 [5] とは異なる書き換え関係を導入する．まず，名目項の間の α 同値性を表す関係を定義する．

アトム a と項 t の組 $a\#t$ を非出現制約とよぶ．直観的には，これは a が自由アトムとして t に出現しないこと (t に現れる変数を具体化した場合も含めて) を表す．また，有限集合 $\nabla \subseteq \{a\#X \mid a \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{X}\}$ を非出現環境とよぶ．非出現環境 ∇ に対して，$V(\nabla) = \{X \mid \exists a.\, a\#X \in \nabla\}$，$\nabla^\pi = \{a^\pi\#X \mid a\#X \in \nabla\}$，$\nabla\sigma = \{a\#X\sigma \mid a\#X \in \nabla\}$ と定義する．∇ のもとで $a\#t$ が成り立つことを表す $\nabla \vdash a\#t$ は図 1 により定義される．$\nabla \vdash a\#t$ のときは $a \notin FA(t)$ となる．∇ のもとで s と t が α 同値になることを表す $\nabla \vdash s \approx_\alpha t$ は図 2 で定義される．ここで，$ds(\pi, \pi')$ は集合 $\{a \in \mathcal{A} \mid \pi(a) \neq \pi'(a)\}$ を表す．以下の性質が知られている．

$$\frac{}{\nabla \vdash a\#[a]t} \qquad \frac{\pi^{-1}\cdot a\#X \in \nabla}{\nabla \vdash a\#\pi\cdot X}$$

$$\frac{a \neq b}{\nabla \vdash a\#b} \qquad \frac{\nabla \vdash a\#t}{\nabla \vdash a\#f\ t}$$

$$\frac{\nabla \vdash a\#t_1 \quad \cdots \quad \nabla \vdash a\#t_n}{\nabla \vdash a\#(t_1,\ldots,t_n)} \qquad \frac{\nabla \vdash a\#t \quad a \neq b}{\nabla \vdash a\#[b]t}$$

図 1. 非出現制約の定義

$$\frac{}{\nabla \vdash a \approx_\alpha a} \qquad \frac{\forall a \in ds(\pi,\pi').\ \nabla \vdash a\#X}{\nabla \vdash \pi\cdot X \approx_\alpha \pi'\cdot X}$$

$$\frac{\nabla \vdash t_1 \approx_\alpha s_1 \quad \cdots \quad \nabla \vdash t_n \approx_\alpha s_n}{\nabla \vdash (t_1,\ldots,t_n) \approx_\alpha (s_1,\ldots,s_n)} \qquad \frac{\nabla \vdash t \approx_\alpha s}{\nabla \vdash f\ t \approx_\alpha f\ s}$$

$$\frac{\nabla \vdash t \approx_\alpha s}{\nabla \vdash [a]t \approx_\alpha [a]s} \qquad \frac{\nabla \vdash (a\ b)\cdot t \approx_\alpha s \quad \nabla \vdash b\#t \quad a \neq b}{\nabla \vdash [a]t \approx_\alpha [b]s}$$

図 2. α 同値性の定義

命題 2.2 ([5]).

(1) $\nabla \vdash a\#t \iff \nabla \vdash \pi\cdot a\#\pi\cdot t$

(2) $\nabla \vdash s \approx_\alpha t \iff \nabla \vdash \pi\cdot s \approx_\alpha \pi\cdot t$

(3) $\nabla \vdash a\#s \wedge \nabla \vdash s \approx_\alpha t \implies \nabla \vdash a\#t$

(4) $\forall a \in ds(\pi,\pi').\ \nabla \vdash a\#s \iff \nabla \vdash \pi\cdot s \approx_\alpha \pi'\cdot s$

命題 2.3 ([5]). 任意の非出現環境 ∇ に対し，$\nabla \vdash - \approx_\alpha -$ は合同関係となる．

この関係は，変数を含まない項に対しては通常の α 同値性 (束縛アトムの名前換えを繰り返すことにより到達できる関係) と一致する [8].

次に，名目書き換え規則と名目書き換えシステムを定義する．

定義 2.4. 名目書き換え規則あるいは単に書き換え規則とは，$V(\nabla) \cup V(r) \subseteq V(l)$ をみたす非出現環境 ∇ と項 l, r の三つ組であり，$\nabla \vdash l \to r$ と書く．以下では，$\nabla = \emptyset$ の場合は単に $\vdash l \to r$ と書く．名目書き換えシステムあるいは単に書き換えシステムとは，書き換え規則の有限集合である．

書き換え規則 $R = \nabla \vdash l \to r$ に対して，置換 π により生成される同変な規則とは $R^\pi = \nabla^\pi \vdash l^\pi \to r^\pi$ のことをいう．文献 [5] では，任意の置換により生成される同変な規則を含む無限集合として名目書き換えシステムが定義されているが，本論文では同変な規則を含めない有限集合として定義する．このことより，書き換え関係の定義も文献 [5] とは異なり，置換を明示した形で行われる．以下では，$\vdash$ は集合や列の各要素に対して成り立つことを意味するように拡張されている．

定義 2.5 (名目書き換え関係). 非出現環境 Δ と項 s, t に対して，名目書き換え規則 $R = \nabla \vdash l \to r$ による書き換え関係を以下のように定義する．

$$\Delta \vdash s \to_{\langle R,\pi,p,\sigma\rangle} t \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \Delta \vdash \nabla^\pi\sigma,\ s = C[s']_p,\ \Delta \vdash s' \approx_\alpha l^\pi\sigma,\ t = C[r^\pi\sigma]_p$$

ただし，$V(l) \cap (V(\Delta) \cup V(s)) = \emptyset$ とする．Δ, s, t に対し，$\Delta \vdash s \to_{\langle R,\pi,p,\sigma\rangle} t$ となるような p, σ が存在するとき $\Delta \vdash s \to_{\langle R,\pi\rangle} t$ と書く．さらに，そのような π が存在するとき単に $\Delta \vdash s \to_R t$ と書く．名目書き換えシステム $\mathcal{R}$ に対する書き換え関係 $\Delta \vdash s \to_\mathcal{R} t$ は，ある書き換え規則 $R \in \mathcal{R}$ が存在して $\Delta \vdash s \to_R t$ となることと定義する．

例 2.6. 例 2.1 のラムダ項の名目項での表現に加え，明示的な代入 $X\langle a := Y\rangle$ を $sub([a]X, Y)$ で表すと，代入結果を求める書き換えシステム $\mathcal{R}_\sigma$ は以下のような規則で与えられる．

$$\mathcal{R}_\sigma = \left\{ \begin{array}{rrcll} & \vdash \; sub([a]app(X,Y),Z) & \to & app(sub([a]X,Z), sub([a]Y,Z)) & (\sigma_{app}) \\ & \vdash \; sub([a]a,X) & \to & X & (\sigma_{var}) \\ & \vdash \; sub([a]b,X) & \to & b & (\sigma_\epsilon) \\ b\#Y & \vdash \; sub([a]lam([b]X),Y) & \to & lam([b]sub([a]X,Y)) & (\sigma_{lam}) \end{array} \right.$$

一般的な記法で表すと次のようになる．

$$\mathcal{R}_\sigma = \left\{ \begin{array}{rrcll} & \vdash \; (XY)\langle a := Z\rangle & \to & (X\langle a := Z\rangle)(Y\langle a := Z\rangle) & (\sigma_{app}) \\ & \vdash \; a\langle a := X\rangle & \to & X & (\sigma_{var}) \\ & \vdash \; b\langle a := X\rangle & \to & b & (\sigma_\epsilon) \\ b\#Y & \vdash \; (\lambda b.X)\langle a := Y\rangle & \to & \lambda b.(X\langle a := Y\rangle) & (\sigma_{lam}) \end{array} \right.$$

ラムダ項 $\lambda b.ba$ 中の a に b を代入することを意図した $(\lambda b.ba)\langle a := b\rangle$ は，$sub([a]lam([b]app(b,a)), b)$ という名目項で表現できる．この項 s は，以下のようにして規則 σ_{lam} による書き換えが可能である．

まず，$\pi = (b\ c)$，$p = \varepsilon$，$\sigma = [X := app(c,a), Y := b]$ とおく．非出現環境に関する条件については，$\{b\#Y\}^\pi\sigma = \{b^\pi\#Y\sigma\} = \{c\#b\}$ より，$\emptyset \vdash \{b\#Y\}^\pi\sigma$ が成り立つ．また，

$$\begin{array}{rcl} l^\pi\sigma & = & (sub([a]lam([b]X),Y))^\pi\sigma \\ & = & (sub([a]lam([c]X),Y))\sigma \\ & = & sub([a]lam([c]app(c,a)),b) \end{array}$$

であるから，$C = \Box$，$s' = sub([a]lam([b]app(b,a)), b)$ とすると，$s = C[s']$ かつ $\emptyset \vdash s' \approx_\alpha l^\pi\sigma$ である．さらに，

$$\begin{array}{rcl} C[r^\pi\sigma] & = & (lam([b]sub([a]X,Y)))^\pi\sigma \\ & = & (lam([c]sub([a]X,Y)))\sigma \\ & = & lam([c]sub([a]app(c,a),b)) \end{array}$$

であるから，書き換え関係の定義より，$\emptyset \vdash s \to_{\langle \sigma_{lam},\pi,p,\sigma\rangle} lam([c]sub([a]app(c,a),b))$ が成り立つ．

以下同様にして，非出現環境 $\emptyset$ のもとで $\mathcal{R}_\sigma$ による s の正規形が次のように求まる．(右側には一般的な記法による表現を示す．)

$$\begin{array}{lll} & lam([c]sub([a]app(c,a),b)) & (\ \lambda c.((ca)\langle a := b\rangle)\ ) \\ \to_{\langle \sigma_{app},Id,11,[X:=c,Y:=a,Z:=b]\rangle} & lam([c]app(sub([a]c,b), sub([a]a,b))) & (\ \lambda c.(c\langle a := b\rangle)(a\langle a := b\rangle)\ ) \\ \to_{\langle \sigma_\epsilon,(b\ c),111,[X:=b]\rangle} & lam([c]app(c, sub([a]a,b))) & (\ \lambda c.c(a\langle a := b\rangle)\ ) \\ \to_{\langle \sigma_{var},Id,112,[X:=b]\rangle} & lam([c]app(c,b)) & (\ \lambda c.cb\ ) \end{array}$$

□

以下では，非出現環境 Δ を固定することによって得られる名目項の間の二項関係 $\Delta \vdash - \bowtie -$ ($\bowtie$ は $\to_R$ や $\approx_\alpha$ など) を，Δ のもとでの関係 $\bowtie$ とよび，文脈から明らかな場合は，単に関係 $\bowtie$ とよぶ．関係 $\bowtie$ が $\to$ を伴って表されている場合には，その逆関係を $\leftarrow$ を伴って表す．また，$\bowtie$ の反射推移閉包を $\bowtie^*$ で表し，関係の合成を $\circ$ で表す．

注意 2.7. 文献 [5, page 946] では，名目書き換え関係 (ここでは $\Delta \vdash s \underset{FG}{\longrightarrow}_R t$ と書く) が次のように定義されている．書き換え規則 $R = \nabla \vdash l \to r$ によって $\Delta \vdash s \underset{FG}{\longrightarrow}_R t$ となるのは，以下の (1) から (3) が成り立つときである．

(1) $V(R) \cap (V(\Delta) \cup V(s)) = \emptyset$ (ただし，$V(R) = V(\nabla) \cup V(l) \cup V(r)$)

(2) $s = C[s']$ となる文脈 C と項 s' が存在して，ある代入 σ が $\Delta \vdash \nabla\sigma$, $\Delta \vdash s' \approx_\alpha l\sigma$ をみたす

(3) $\Delta \vdash t \approx_\alpha C[r\sigma]$ ((2) の文脈 C と代入 σ に対して)

したがって，$\underset{FG}{\longrightarrow}_R$ が本論文の $\to_R$ と異なるのは，次の二点である．まず，文献 [5] では書き換え規則として同変な規則を含むため置換 π を明示せずに定義されること，さらに，右辺に α 同値な項も許すことである．よって，同一の非出現環境のもとで両者の関係は $\underset{FG}{\longrightarrow}_R = \to_R \circ \approx_\alpha$ となる．

3 名目書き換えシステムの合流条件

本節では，書き換えシステムの重要な性質の一つである合流性について，通常の項書き換えにおける理論的枠組みを名目書き換えの場合に拡張することを検討する．

文献 [5] では，一様な名目書き換えシステムという書き換えシステムのクラスが提案され，停止性と危険対の交差性に基づく合流条件が与えられている．しかし，書き換えシステムが同変な規則を含む無限集合として定義されているため，その合流条件を用いた合流性の判定には，無限個の危険対に対する交差性の検証が必要となり，実効的な合流性判定手続きの実現は困難である．

本論文では，規則の有限集合からなる書き換えシステムと置換を明示した書き換え関係に基づいて，一様な書き換えシステムに対する危険対補題を証明し，決定可能な合流条件を与える．

3.1 一様な名目書き換えシステム

一様な名目書き換えシステムとは，直観的には，書き換えによって新たな自由アトムが生じないようなシステムのことである．ここでは，文献 [5] における一様性と等価な以下の定義を用いる．

定義 3.1 (一様性). 書き換え規則 $\nabla \vdash l \to r$ が一様であるとは，任意の $a \in \mathcal{A}$ と非出現環境 Δ に対して，$\Delta \vdash \nabla, a\#l$ ならば $\Delta \vdash a\#r$ となることをいう．また，名目書き換えシステム $\mathcal{R}$ が一様であるとは，すべての $R \in \mathcal{R}$ が一様であるときをいう．

一様な書き換え規則に対しては，次の重要な性質が成り立つ．この性質は危険対補題および合流性の議論を行う際に必要となる．

定理 3.2. R を一様な書き換え規則とする．このとき，$\Delta \vdash s' \approx_\alpha s \to_{\langle R,\pi,p,\sigma\rangle} t$ ならば，ある π', σ', t' が存在して，$\Delta \vdash s' \to_{\langle R,\pi',p,\sigma'\rangle} t' \approx_\alpha t$ が成り立つ．

この定理は，α 同値な二つの名目項は一様な書き換え規則によって遷移したときに互いを模倣できるということを表している．対応する定理は文献 [5] でも示されているが，置換と位置を明示した形では述べられていない．以下では，本論文の定義に従って改めて定理の証明を与える．

まず，一様な書き換え規則 R について文献 [5] で示されている命題について述べる．

命題 3.3 ([5]). 一様な書き換え規則 R に対して，$\Delta \vdash a\#s$ かつ $\Delta \vdash s \to_R t$ ならば $\Delta \vdash a\#t$.

文献 [5] の書き換え関係は本論文の $\to_R$ を含むので，この命題は本論文の $\to_R$ に対しても成立する．

次に，置換と代入，非出現環境，書き換え関係の間に成り立つ性質について，いくつかの補題を示す．(証明は付録を参照)

補題 3.4. $\pi \cdot (t\sigma) = t^\pi(\pi \cdot \sigma)$

補題 3.5. $\Delta \vdash \nabla\sigma \implies \Delta \vdash \nabla^\pi(\pi \cdot \sigma)$

補題 3.6. $\Delta \vdash s \to_{\langle R,\pi,p,\sigma\rangle} t \implies \Delta \vdash \tau \cdot s \to_{\langle R,\tau\circ\pi,p,\tau\cdot\sigma\rangle} \tau \cdot t$

これらの補題を用いて，定理 3.2 を証明する．

定理 3.2 の証明. p の長さに関する帰納法で示す．$R = \nabla \vdash l \to r$ とする．

$p = \varepsilon$ のときは，書き換え関係の定義より，$s \approx_\alpha l^\pi\sigma$．仮定より推移律を用いて $s' \approx_\alpha l^\pi\sigma$．よって，$\pi' = \pi$，$\sigma' = \sigma$，$t' = t$ とすれば成立する．

$p = ip'$ のとき．$s = f\ u$ と $s = (u_1, \ldots, u_n)$ の場合は帰納法の仮定より成立する．

$s = [a]u$ の場合．書き換え関係の定義から $u = C[v]_{p'}$, $\Delta \vdash v \approx_\alpha l^\pi\sigma, \nabla^\pi\sigma$, $t = [a]C[r^\pi\sigma]_{p'}$. 一方，$\Delta \vdash [a]u \approx_\alpha s'$ より，$s' = [b]u'$ かつ $\Delta \vdash [a]u \approx_\alpha [b]u'$．$a = b$ の場合は帰納法の仮定か

ら容易に示されるので，$a \neq b$ の場合を示す．このとき，$\Delta \vdash (a\ b) \cdot u \approx_\alpha u', b\#u$．命題 2.2(2) より $\Delta \vdash u \approx_\alpha (a\ b) \cdot u'$．また，書き換え関係の定義から $\Delta \vdash u \to_{\langle R,\pi,p',\sigma\rangle} C[r^\pi\sigma]_{p'}$．よって，$\Delta \vdash (a\ b) \cdot u' \approx_\alpha u \to_{\langle R,\pi,p',\sigma\rangle} C[r^\pi\sigma]_{p'}$ となり，帰納法の仮定より，ある $\hat{\pi}, \hat{\sigma}, v'$ が存在して，$\Delta \vdash (a\ b) \cdot u' \to_{\langle R,\hat{\pi},p',\hat{\sigma}\rangle} v' \approx_\alpha C[r^\pi\sigma]_{p'}$．したがって，補題3.6より，$\Delta \vdash u' \to_{\langle R,(a\ b)\circ\hat{\pi},p',(a\ b)\cdot\sigma\rangle} (a\ b) \cdot v'$ となり，書き換え関係の定義から，$\Delta \vdash [b]u' \to_{\langle R,(a\ b)\circ\hat{\pi},p,(a\ b)\cdot\sigma\rangle} [b](a\ b) \cdot v'$ が成立する．また，$\Delta \vdash u \to_{\langle R,\pi,p',\sigma\rangle} C[r^\pi\sigma]_{p'}, b\#u$ であったから，命題3.3より $\Delta \vdash b\#C[r^\pi\sigma]_{p'}$．また，$\Delta \vdash v' \approx_\alpha C[r^\pi\sigma]_{p'}$ より，$\Delta \vdash (a\ b) \cdot v' \approx_\alpha (a\ b) \cdot C[r^\pi\sigma]_{p'}$．したがって，$\Delta \vdash (a\ b) \cdot C[r^\pi\sigma]_{p'} \approx_\alpha (a\ b) \cdot v', b\#C[r^\pi\sigma]_{p'}$ となるので，$\Delta \vdash [a]C[r^\pi\sigma]_{p'} \approx_\alpha [b](a\ b) \cdot v'$．以上より，$\Delta \vdash [b]u' \to_{\langle R,(a\ b)\circ\hat{\pi},p,(a\ b)\cdot\hat{\sigma}\rangle} [b](a\ b) \cdot v' \approx_\alpha [a]C[r^\pi\sigma]_{p'}$．したがって，$\pi' = (a\ b) \circ \hat{\pi}$，$\sigma' = (a\ b) \cdot \hat{\sigma}$，$t' = [b](a\ b) \cdot v'$ とすれば題意が成立する． □

3.2 危険対補題

本小節では，一様な名目書き換えシステムに対する危険対補題を証明する．危険対補題に基づく名目書き換えシステムの合流条件については，次小節で議論する．

まず，名目項に対する単一化を定義する．等式および非出現制約からなる集合 $P = \{s_1 \approx t_1, \ldots, s_m \approx t_m, a_1\#u_1, \ldots, a_n\#u_n\}$ が与えられたとする．このとき，$\Gamma \vdash s_1\theta \approx_\alpha t_1\theta, \ldots, s_m\theta \approx_\alpha t_m\theta, a_1\#u_1\theta, \ldots, a_n\#u_n\theta$ をみたす非出現環境 Γ と代入 θ が存在するならば，P は単一化可能であるといい，$\langle\Gamma, \theta\rangle$ を P の単一化子とよぶ．名目項に対する単一化問題は決定可能であり，単一化可能であるときには最汎単一化子が存在することが知られている [13]．P の最汎単一化子とは，P の単一化子 $\langle\Gamma, \theta\rangle$ で，任意の P の単一化子 $\langle\Delta, \sigma\rangle$ に対して，ある代入 δ が存在して $\Delta \vdash \Gamma\delta$ かつ $\forall X \in \mathcal{X}. \Delta \vdash X\theta\delta \approx_\alpha X\sigma$ となるものである．

以下では，基本危険対とよばれる危険対を導入し，これに対する危険対補題を与える．名目書き換えシステムは，非出現環境を制約とみなすと制約付き書き換えシステム [3] の一種とも考えることができるため，各規則の非出現環境を同時にみたす項から基本危険対を得る．

定義 3.7 (基本危険対)．書き換え規則 $R_i = \nabla_i \vdash l_i \to r_i$ $(i = 1, 2)$ を考える．このとき，一般性を失うことなく $V(R_1) \cap V(R_2) = \emptyset$ と仮定できる．重なりの位置を $p \in Pos_{\bar{\mathcal{X}}}(l_2)$ とし，$l_2 = L[l_2|_p]_p$ とする．ある置換 π_2 に対して $P = \nabla_1 \cup \nabla_2^{\pi_2} \cup \{l_1 \approx l_2^{\pi_2}|_p\}$ が単一化可能であるとし，その最凡単一化子を $\langle\Gamma, \sigma\rangle$ とおく．このとき，$\Gamma \vdash (L^{\pi_2}\sigma[r_1\sigma]_p, r_2^{\pi_2}\sigma)$ を R_1 と R_2 の基本危険対とよぶ．

特に，$R_1 = R_2$ かつ重なりの位置 $p = \varepsilon$ による基本危険対を自己基本危険対とよぶ．

R_1 と R_2 の基本危険対の集合を $BCP(R_1, R_2)$ と表す．また，$BCP(\mathcal{R}) = \bigcup_{R_i,R_j\in\mathcal{R}} BCP(R_i, R_j)$ と定義する．$BCP(\mathcal{R})$ には自己基本危険対も含まれることに注意する．

文献 [5] では，名目書き換えシステムとして保留なし置換に関して閉じた規則の無限集合を考えているので，任意の $R_1^{\pi_1}, R_2^{\pi_2} \in \mathcal{R}$ それぞれについての危険対を定義している．一方，本論文では，名目書き換えシステムとして書き換え規則の有限集合を考え，より制限された危険対のみを基本危険対として与える．以下に示す危険対補題では，危険対の各要素に対する置換を考えることで，基本危険対のみを扱うように改良されている．

補題 3.8 (危険対補題)．$\mathcal{R}$ を一様な名目書き換えシステムとする．このとき，$\Delta \vdash s \to_\mathcal{R} t_1, s \to_\mathcal{R} t_2$ ならば，以下のいづれかが成立する．

(1) 名目項 t_1', t_2' が存在して，$\Delta \vdash t_1 \to_\mathcal{R}^* t_1' \approx_\alpha t_2' \leftarrow_\mathcal{R}^* t_2$

(2) 基本危険対 $\Gamma \vdash (u, v) \in BCP(\mathcal{R})$ と π, θ, C が存在して，$\Delta \vdash \Gamma^\pi\theta, t_1 \approx_\alpha C[u^\pi\theta], t_2 \approx_\alpha C[v^\pi\theta]$.

この補題を証明するためには，いくつか準備が必要である．まず，代入に関する二つの補題を示す．

補題 3.9. 代入 σ, σ' が，$\forall X \in \mathcal{X}. \Delta \vdash X\sigma \approx_\alpha X\sigma'$ をみたすとする．このとき，任意の名目項 t について，$\Delta \vdash t\sigma \approx_\alpha t\sigma'$.

証明. t の構造に関する帰納法で示す．$t = a$ のときは，$t\sigma = a$，$t\sigma' = a$ より成立．$t = \pi \cdot X$ のときは，$(\pi \cdot X)\sigma = \pi \cdot X\sigma$，$(\pi \cdot X)\sigma' = \pi \cdot X\sigma'$ となる．ここで，仮定より $\Delta \vdash X\sigma \approx_\alpha X\sigma'$ が成立するので，命題 2.2(2) から $\Delta \vdash \pi \cdot X\sigma \approx_\alpha \pi \cdot X\sigma'$．よって，$\Delta \vdash (\pi \cdot X)\sigma \approx_\alpha (\pi \cdot X)\sigma'$．$t = (s_1, \ldots, s_n)$，$t = f\ s$，$t = [a]s$ のときは帰納法の仮定より成立． $\square$

補題 3.10. $\mathcal{R}$ を一様な名目書き換えシステム，σ, σ' を $\forall X \in \mathcal{X}.\, \Delta \vdash X\sigma \to^*_{\mathcal{R}} X\sigma'$ なる代入とする．このとき，任意の非出現環境 ∇ について，$\Delta \vdash \nabla\sigma$ ならば $\Delta \vdash \nabla\sigma'$．

証明. 命題 3.3 より，任意の $a\#X \in \nabla$ について，$\Delta \vdash a\#X\sigma \implies \Delta \vdash a\#X\sigma'$ が成立する．よって，$\Delta \vdash \nabla\sigma$ ならば $\Delta \vdash \nabla\sigma'$． $\square$

次に，文脈に関する二つの補題を示す．

補題 3.11. $\Delta \vdash a\#s \implies \Delta \vdash a\#t$ とする．このとき，任意の文脈 $C[\,]$ について，$\Delta \vdash a\#C[s] \implies \Delta \vdash a\#C[t]$．

証明. 文脈 $C[\,]$ の構造に関する帰納法で示す．$C[\,] = \Box$ のときは自明．$C[\,]_{ip} = (s_1, \ldots, C'[\,], \ldots, s_n)$ のとき．$\Delta \vdash a\#(s_1, \ldots, C'[s], \ldots, s_n)$ とすると，$\Delta \vdash a\#s_j\ (j \neq i)$ かつ $\Delta \vdash a\#C'[s]$．帰納法の仮定より，$\Delta \vdash a\#C'[t]$ となるので，$\Delta \vdash a\#(s_1, \ldots, C'[t], \ldots, s_n)$ となり，題意が成立する．$C[\,] = f\ C'[\,]$ のとき．$\Delta \vdash a\#f\ C'[s]$ とすると，$\Delta \vdash a\#C'[s]$．帰納法の仮定より，$\Delta \vdash a\#C'[t]$ となるので，$\Delta \vdash a\#f\ C'[t]$ となり，題意が成立する．$C[\,] = [b](C'[\,])$ のとき．$\Delta \vdash a\#[b](C'[s]_p)$ とすると，$a = b$，または，$a \neq b$ かつ $\Delta \vdash a\#C'[s]_p$．$a = b$ のときは，$\Delta \vdash a\#[b](C'[t]_p)$ となり成立．$a \neq b$ かつ $\Delta \vdash a\#C'[s]_p$ のとき，帰納法の仮定より $\Delta \vdash a\#C'[t]$ となるので，$\Delta \vdash a\#[b](C'[t]_p)$ となり成立． $\square$

補題 3.12. $\Delta \vdash \tau \cdot (C[u]_p) \approx_\alpha \hat{C}[v]_p$ とするとき，以下をみたす置換 π が存在する．

(1) $\Delta \vdash (\pi \circ \tau) \cdot u \approx_\alpha v$.

(2) 名目項 u', v' が，(i) $\forall a \in \mathcal{A}.\, \Delta \vdash a\#u \implies \Delta \vdash a\#u'$，および，(ii) $\Delta \vdash (\pi \circ \tau) \cdot u' \approx_\alpha v'$，をみたすとする．このとき，$\Delta \vdash \tau \cdot (C[u']_p) \approx_\alpha \hat{C}[v']_p$.

証明. $C[\,]$ の構造に関する帰納法で示す．

$C[\,] = \Box$ のとき．$\pi = Id$ をとれば，(1), (2) とも明らかに成立．$C[]_{ip} = (s_1, \ldots, C'[]_p, \ldots, s_n)$ と $C[]_{1p} = f\ C'[]_p$ の場合は帰納法の仮定より成立する．

$C[\,]_{1p} = [a](C'[\,]_p)$ のとき．このとき，$\Delta \vdash \tau \cdot [a](C'[u]_p) \approx_\alpha \hat{C}[v]_{1p}$ より，$\hat{C}[\,]_{1p} = [b](\hat{C}'[\,]_p)$ かつ $\Delta \vdash [\tau \cdot a]\tau \cdot (C'[u]_p) \approx_\alpha [b](\hat{C}'[v]_p)$ である．$\tau \cdot a = b$ の場合は帰納法の仮定より明らか．

$\tau \cdot a \neq b$ の場合．このとき，$\Delta \vdash ((\tau \cdot a\ b) \circ \tau) \cdot C'[u]_p \approx_\alpha \hat{C}'[v]_p, b\#\tau \cdot C'[u]_p$．帰納法の仮定から，ある置換 π' が存在して，$\Delta \vdash (\pi' \circ (\tau \cdot a\ b) \circ \tau) \cdot u \approx_\alpha v$，かつ，条件 (i) および $\Delta \vdash (\pi' \circ (\tau \cdot a\ b) \circ \tau) \cdot u' \approx_\alpha v'$ をみたす u', v' について，

$$\Delta \vdash ((\tau \cdot a\ b) \circ \tau) \cdot C'[u']_p \approx_\alpha \hat{C}'[v']_p \tag{3.1}$$

が成立する．ここで，$\pi = \pi' \circ (\tau \cdot a\ b)$ ととると，$\Delta \vdash (\pi \circ \tau) \cdot u \approx_\alpha v$．次に，$u', v'$ が条件 (i) および $\Delta \vdash (\pi \circ \tau) \cdot u' \approx_\alpha v'$ をみたすとする．このとき，(3.1) より，

$$\Delta \vdash (\tau \cdot a\ b) \cdot (\tau \cdot C'[u']_p) \approx_\alpha \hat{C}'[v']_p \tag{3.2}$$

が成立する．一方，$\Delta \vdash b\#\tau \cdot C'[u]_p$ より $\Delta \vdash \tau^{-1} \cdot b\#C'[u]_p$ が成立．また，条件 (i) から，$\Delta \vdash \tau^{-1} \cdot b\#u \implies \Delta \vdash \tau^{-1} \cdot b\#u'$ が成立するので，補題 3.11 より，$\Delta \vdash \tau^{-1} \cdot b\#C'[u']_p$，すなわち，

$$\Delta \vdash b\#\tau \cdot (C'[u']_p) \tag{3.3}$$

が成立．よって，(3.2), (3.3) から，$\Delta \vdash [\tau \cdot a]\tau \cdot (C'[u']_p) \approx_\alpha [b](\hat{C}'[v']_p)$ となり，$\Delta \vdash \tau \cdot (C[u']_{1p}) \approx_\alpha \hat{C}[v']_{1p}$ が成立．以上より，題意が成立する． $\square$

以上の準備のもとで，危険対補題を証明する．

補題 3.8 (危険対補題) **の証明**．$\Delta \vdash s \to_{\langle R_i,\pi_i,p_i,\sigma_i\rangle} t_i$ $(i=1,2)$ とする．$s_1 = s|_{p_1}, s_2 = s|_{p_2}$ とおく．

(1) $p_1||p_2$ の場合

$s = C[s_1,s_2]_{p_1,p_2}$ とする．書き換え関係の定義から，$\Delta \vdash s_1 \approx_\alpha l_1^{\pi_1}\sigma_1, s_2 \approx_\alpha l_2^{\pi_2}\sigma_2$．また，$t_1 = C[r_1^{\pi_1}\sigma_1, s_2]_{p_1,p_2}, t_2 = C[s_1, r_2^{\pi_2}\sigma_2]_{p_1,p_2}$ である．よって，$\Delta \vdash C[r_1^{\pi_1}\sigma_1, s_2]_{p_1,p_2} \approx_\alpha C[r_1^{\pi_1}\sigma_1, l_2^{\pi_2}\sigma_2]_{p_1,p_2}, C[s_1, r_2^{\pi_2}\sigma_2]_{p_1,p_2} \approx_\alpha C[l_1^{\pi_1}\sigma_1, r_2^{\pi_2}\sigma_2]_{p_1,p_2}$．ここで $t = C[r_1^{\pi_1}\sigma_1, r_2^{\pi_2}\sigma_2]_{p_1,p_2}$ とおく．すると，$\Delta \vdash s_2 \approx_\alpha l_2^{\pi_2}\sigma_2$，$t_1 = C[r_1^{\pi_1}\sigma_1, s_2]_{p_1,p_2}$，$t = C[r_1^{\pi_1}\sigma_1, r_2^{\pi_2}\sigma_2]_{p_1,p_2}$ から，書き換えの定義より $\Delta \vdash t_1 \to_{\langle R_2,\pi_2,p_2,\sigma_2\rangle} t$．同様に，$\Delta \vdash t_2 \to_{\langle R_1,\pi_1,p_1,\sigma_1\rangle} t$ が成立．よって題意が成立する．

(2) $p_2 \preceq p_1$ の場合

(2-1) $\exists o \in Pos_{\mathcal{X}}(l_2).\, p_2 o \preceq p_1$ の場合

$l_2|_o = X$，$p_2 o q = p_1$ とおく．まず，$\Delta \vdash s_2 \approx_\alpha l_2^{\pi_2}\sigma_2$ より，$\Delta \vdash s \approx_\alpha s[l_2^{\pi_2}\sigma_2]_{p_2}$．よって，$\Delta \vdash s \to_{\langle R_1,\pi_1,p_1,\sigma_1\rangle} t_1 = s[r_1^{\pi_1}\sigma_1]_{p_1}$ から，定理 3.2 より，$\Delta \vdash s[l_2^{\pi_2}\sigma_2]_{p_2} \to_{\langle R_1,\hat{\pi}_1,p_1,\hat{\sigma}_1\rangle} s[l_2^{\pi_2}\sigma_2]_{p_2}[\hat{u}]_{p_1} \approx_\alpha t_1$ なる $\hat{\pi}_1, \hat{u}, \hat{\sigma}_1$ が存在する．また，$u = (s[l_2^{\pi_2}\sigma_2]_{p_2})|_{p_1} = \sigma_2(X)|_q$ とおくと，$\Delta \vdash u \to_{\langle R_1,\hat{\pi}_1,\varepsilon,\hat{\sigma}_1\rangle} \hat{u}$ となる．

代入 $\hat{\sigma}_2$ を $\hat{\sigma}_2(X) = \sigma_2(X)[\hat{u}]_q$，$\hat{\sigma}_2(Y) = \sigma_2(Y)$ $(X \neq Y)$ により与える．ここで，$l_2|_{o'} = X$ なる任意の $o' \in Pos_{\mathcal{X}}(l_2)$ について，$(l_2\sigma_2)|_{o'q} = \sigma_2(X)|_q = u$ となることに注意すると，$\Delta \vdash s[l_2^{\pi_2}\sigma_2]_{p_2} \to_{\langle R_1,\hat{\pi}_1,p_1,\hat{\sigma}_1\rangle} s[l_2^{\pi_2}\sigma_2]_{p_2}[\hat{u}]_{p_1} \to^*_{\langle R_1,\hat{\pi}_1\rangle} s[l_2^{\pi_2}\hat{\sigma}_2]_{p_2}$ が得られる．また，$\Delta \vdash \nabla_2^{\pi_2}\sigma_2$ から，補題 3.10 を用いて $\Delta \vdash \nabla_2^{\pi_2}\hat{\sigma}_2$．よって，$\Delta \vdash s[l_2^{\pi_2}\hat{\sigma}_2]_{p_2} \to_{\langle R_2,\pi_2,p_2,\hat{\sigma}_2\rangle} s[r_2^{\pi_2}\hat{\sigma}_2]_{p_2}$ が成立する．また，このとき，定理 3.2 より，$\pi'_1, \pi'_2, t'_1, t_3, \sigma'_2$ が存在して，$\Delta \vdash t_1 \to^*_{\langle R_1,\pi'_1\rangle} t'_1 \to_{\langle R_2,\pi'_2,p_2,\sigma'_2\rangle} t_3, t'_1 \approx_\alpha s[l_2^{\pi_2}\hat{\sigma}_2]_{p_2}, t_3 \approx_\alpha s[r_2^{\pi_2}\hat{\sigma}_2]_{p_2}$ となる．

一方，$r_2|_{o'} = X$ なる任意の $o' \in Pos_{\mathcal{X}}(r_2)$ について，$(r_2\sigma_2)|_{o'q} = \sigma_2(X)|_q = u$ に注意すると，$\Delta \vdash t_2 = s[r_2^{\pi_2}\sigma_2]_{p_2} \to^*_{\langle R_1,\hat{\pi}_1\rangle} s[r_2^{\pi_2}\hat{\sigma}_2]_{p_2}$．

以上より，$\Delta \vdash t_1 \to^*_{\mathcal{R}} t_3 \approx_\alpha s[r_2^{\pi_2}\hat{\sigma}_2]_{p_2} \leftarrow^*_{\mathcal{R}} t_2$ となり，題意が成立する．

(2-2) $\neg\exists o \in Pos_{\mathcal{X}}(l_2).\, p_2 o \preceq p_1$ の場合

$p_2 o = p_1$ とおくと，$o \in Pos_{\bar{\mathcal{X}}}(l_2)$．文脈 L を $l_2 = L[l_2|_o]_o$ なる文脈とおく．

書き換えの定義より，$\Delta \vdash s|_{p_1} \approx_\alpha l_1^{\pi_1}\sigma_1, s|_{p_2} \approx_\alpha l_2^{\pi_2}\sigma_2$ なので，$s|_{p_2} = s|_{p_2}[s|_{p_1}]_o$ より，$\Delta \vdash s|_{p_2}[l_1^{\pi_1}\sigma_1]_o \approx_\alpha s|_{p_2}[s|_{p_1}]_o \approx_\alpha l_2^{\pi_2}\sigma_2$．よって，$\Delta \vdash s|_{p_2}[l_1^{\pi_1}\sigma_1]_o \approx_\alpha L^{\pi_2}\sigma_2[l_2^{\pi_2}|_o\sigma_2]_o$．このとき，補題 3.12 より，ある $\hat{\pi}$ が存在して，

$$\Delta \vdash l_1^{\pi_1}\sigma_1 \approx_\alpha \hat{\pi} \cdot l_2^{\pi_2}|_o\sigma_2 \tag{3.4}$$

$$\forall u, v.\, FA(u) \subseteq FA(l_1^{\pi_1}\sigma_1) \wedge FA(v) \subseteq FA(l_2^{\pi_2}|_o\sigma_2) \implies (\Delta \vdash u \approx_\alpha \hat{\pi} \cdot v \implies \Delta \vdash s|_{p_2}[u]_o \approx_\alpha L^{\pi_2}\sigma_2[v]_o) \tag{3.5}$$

が成立する．以上より，$\Delta \vdash \nabla_1^{\pi_1}\sigma_1, \nabla_2^{\pi_2}\sigma_2, l_1^{\pi_1}\sigma_1 \approx_\alpha \hat{\pi} \cdot (l_2^{\pi_2}|_o\sigma_2)$．これを変形すると，

$$\Delta \vdash \nabla_1(\pi_1^{-1} \cdot \sigma_1), \nabla_2^{\pi_1^{-1}\circ\hat{\pi}\circ\pi_2}(\pi_1^{-1} \circ \hat{\pi} \cdot \sigma_2), l_1(\pi_1^{-1} \cdot \sigma_1) \approx_\alpha l_2^{\pi_1^{-1}\circ\hat{\pi}\circ\pi_2}|_o(\pi_1^{-1} \circ \hat{\pi} \cdot \sigma_2)$$

が得られる．ここで，一般性を失うことなく，$V(l_1) \cap V(l_2) = \emptyset$ と仮定し，$\hat{\pi}_2 = \pi_1^{-1} \circ \hat{\pi} \circ \pi_2, \sigma = \pi_1^{-1} \cdot \sigma_1, \sigma = \pi_1^{-1} \circ \hat{\pi} \cdot \sigma_2$ とおく．このとき，$\Delta \vdash \nabla_1\sigma, \nabla_2^{\hat{\pi}_2}\sigma, l_1\sigma \approx_\alpha l_2^{\hat{\pi}_2}|_o\sigma$ となるので，$P = \nabla_1 \cup \nabla_2^{\hat{\pi}_2} \cup \{l_1 \approx l_2^{\hat{\pi}_2}|_o\}$ は単一化可能．よって，P の最汎単一化子 $\langle \Gamma, \theta \rangle$ とある代入 δ が存在し，

$$\Gamma \vdash \nabla_1\theta, \nabla_2^{\hat{\pi}_2}\theta, l_1\theta \approx_\alpha l_2^{\hat{\pi}_2}|_o\theta \tag{3.6}$$

$$\Delta \vdash \Gamma\delta \wedge \forall X \in \mathcal{X}.\, \Delta \vdash X\theta\delta \approx_\alpha X\sigma \tag{3.7}$$

が成立する．このとき，基本危険対の定義から，$\Gamma \vdash \langle L^{\hat{\pi}_2}\theta[r_1\theta]_o, r_2^{\hat{\pi}_2}\theta\rangle \in BCP(R_1, R_2)$ が存在する．以下では，$u = L^{\hat{\pi}_2}\theta[r_1\theta]_o$，$v = r_2^{\hat{\pi}_2}\theta$ とおく．今，性質 (3.7) から，補題 3.9 より，$\Delta \vdash r_2^{\hat{\pi}_2}\theta\delta \approx_\alpha r_2^{\hat{\pi}_2}\sigma$ が成立．したがって，$\Delta \vdash v\delta \approx_\alpha r_2^{\pi_1^{-1}\circ\hat{\pi}\circ\pi_2}((\pi^{-1}\circ\hat{\pi})\cdot\sigma_2)$．式を変形すると，

$$\Delta \vdash v^{\hat{\pi}^{-1}\circ\pi_1}(\hat{\pi}^{-1}\circ\pi_1\cdot\delta) \approx_\alpha r_2^{\pi_2}\sigma_2 \tag{3.8}$$

同様に，性質 (3.7) から，補題 3.9 より，$\Delta \vdash L^{\hat{\pi}_2}\theta\delta[r_1\theta\delta]_o \approx_\alpha L^{\hat{\pi}_2}\sigma[r_1\sigma]_o$ が成立．したがって，$\Delta \vdash u\delta \approx_\alpha L^{\hat{\pi}_2}\sigma[r_1\sigma]_o$．よって，命題 2.2 を用いると $\Delta \vdash \pi_1\cdot(u\delta) \approx_\alpha \pi_1\cdot(L^{\hat{\pi}_2}\sigma[r_1\sigma]_o)$ が成立する．したがって，$\Delta \vdash \pi_1\cdot(u\delta) \approx_\alpha \pi_1\cdot(L^{\pi_1^{-1}\circ\hat{\pi}\circ\pi_2}(\pi_1^{-1}\circ\hat{\pi}\cdot\sigma_2)[r_1(\pi_1^{-1}\cdot\sigma_1)]_o)$．式を変形すると，

$$\Delta \vdash u^{\hat{\pi}^{-1}\circ\pi_1}(\hat{\pi}^{-1}\circ\pi_1\cdot\delta) \approx_\alpha L^{\pi_2}\sigma_2[r_1^{\hat{\pi}^{-1}\circ\pi_1}(\hat{\pi}^{-1}\cdot\sigma_1)]_o \tag{3.9}$$

が得られる．ここで，$r_1^{\pi}\sigma_1 = \hat{\pi}\cdot(r_1^{\hat{\pi}^{-1}\circ\pi_1}(\hat{\pi}^{-1}\cdot\sigma_1))$ に注意すると，性質 (3.5) より $\Delta \vdash s|_{p_2}[r_1^{\pi_1}\sigma_1]_o \approx_\alpha L^{\pi_2}\sigma_2[r_1^{\hat{\pi}^{-1}\circ\pi_1}(\hat{\pi}^{-1}\cdot\sigma_1)]_o$ が得られる．よって，式 (3.9) より，

$$\Delta \vdash u^{\hat{\pi}^{-1}\circ\pi_1}(\hat{\pi}^{-1}\circ\pi_1\cdot\delta) \approx_\alpha s|_{p_2}[r_1^{\pi_1}\sigma_1]_o \tag{3.10}$$

よって，$\pi' = \hat{\pi}^{-1}\circ\pi_1$，$\delta' = \hat{\pi}^{-1}\circ\pi_1\cdot\delta$ とおくと，式 (3.8) と (3.10) より，$\Delta \vdash t_1 \approx_\alpha s[u^{\pi'}\delta']_{p_2}$ かつ $\Delta \vdash t_2 \approx_\alpha s[v^{\pi'}\delta']_{p_2}$ となり，題意が成立する．

(3) $p_2 \succ p_1$ の場合
$p_2 \preceq p_1$ の場合と同様に証明できる．

□

3.3 一様かつ α 安定な名目書き換えシステムの合流条件

本小節では，危険対補題に基づく名目書き換えシステムの合流条件と合流性判定手続きの決定可能性について議論する．まず，抽象書き換えシステムの性質 [9] を名目書き換えシステムの場合に適用した以下の定義を与える．

定義 3.13. $\mathcal{R}$ を名目書き換えシステムとする．

(1) 非出現環境 Δ と項 s, t に対して $\Delta \vdash s\ (\rightarrow_\mathcal{R}^* \circ \approx_\alpha \circ \leftarrow_\mathcal{R}^*)\ t$ となるとき，Δ, s, t は α モジュロ交差性 (joinable modulo α) をもつという．このとき，$\Delta \vdash s \downarrow_{\approx_\alpha} t$ と書く．

(2) $\mathcal{R}$ が α モジュロ局所合流性 (locally confluent modulo α) をもつとは，$\Delta \vdash s\ (\leftarrow_\mathcal{R} \circ \rightarrow_\mathcal{R})\ t$ ならば $\Delta \vdash s \downarrow_{\approx_\alpha} t$ となることである．

(3) $\mathcal{R}$ が α モジュロ CR 性 (Church-Rosser modulo α) をもつとは，$\Delta \vdash s\ (\leftarrow_\mathcal{R} \cup \rightarrow_\mathcal{R} \cup \approx_\alpha)^*\ t$ ならば $\Delta \vdash s \downarrow_{\approx_\alpha} t$ となることである．

(4) $\mathcal{R}$ が α モジュロ停止性 (terminating modulo α) をもつとは，任意の非出現環境 Δ のもとで $\rightarrow_\mathcal{R} \circ \approx_\alpha$ が整礎となることである．

上で定義した α モジュロ局所合流性についての定理を危険対補題から導くことができる．

定理 3.14. $\mathcal{R}$ を一様な名目書き換えシステムとする．任意の基本危険対 $\Gamma \vdash (u, v) \in BCP(\mathcal{R})$ に対して $\Gamma \vdash u \downarrow_{\approx_\alpha} v$ が成り立つならば，$\mathcal{R}$ は α モジュロ局所合流性をもつ．

証明. 補題 3.8 より明らか． □

しかし，上記の条件では，任意の基本危険対が α モジュロ交差性をもつことを示す必要があるため，実際的に決定可能な手続きの構成は困難である．決定可能な条件としては以下の系を考えることができる．

系 3.15. $\mathcal{R}$ を一様な名目書き換えシステムとする．このとき，$BCP(\mathcal{R}) = \emptyset$ ならば $\mathcal{R}$ は α モジュロ局所合流性をもつ．

$BCP(\mathcal{R}) = \emptyset$ であるかどうかは，同変単一化問題 [2] を用いて決定可能である．しかし，$BCP(\mathcal{R})$ には自己基本危険対も含まれており，特に，アトムが出現する名目書き換えシステムに対しては $BCP(\mathcal{R})$ は無限集合となる．このため，上の定理を適用可能な名目書き換えシステムは限られる．

ここで $BCP(\mathcal{R})$ に自己基本危険対を含めるのは，例 1.2 の書き換え規則から生じる自己基本危険対の場合のように，必ずしも α モジュロ交差性をもつとは限らないためである．そこで，以下では自己基本危険対の要素が α モジュロ交差性をもつための十分条件を与え，それ以外の基本危険対をもたない場合に適用可能な合流条件を考える．そのために，同じ位置での書き換えの前後で α 同値性を保存する α 安定性という概念を導入する．

定義 3.16 (α 安定性)**.** 名目書き換え規則 R が α 安定であるとは，$\Delta \vdash s \approx_\alpha s'$, $s \to_{\langle R,\pi,p,\sigma\rangle} t$, $s' \to_{\langle R,\pi',p,\sigma'\rangle} t'$ ならば $\Delta \vdash t \approx_\alpha t'$ が成り立つときをいう．また，名目書き換えシステム $\mathcal{R}$ が α 安定であるとは，すべての $R \in \mathcal{R}$ が α 安定であるときをいう．

書き換え規則が α 安定となるための十分条件については次節で議論する．ここでは，α 安定ではない書き換え規則の例を見る．

例 3.17 (α 安定でない書き換え規則)**.** 例 1.2 の書き換え規則 $R = \emptyset \vdash f\ X \to [a]X$ は，$\Delta = \emptyset$ のもとで α 同値な二つの項 $f\ a, f\ a$ を $p = \varepsilon$ の位置で書き換えて得られる $[a]a, [b]a$ が α 同値となっていないので，α 安定ではない．　□

書き換え規則が α 安定であれば，その規則を同じ位置に適用した結果はすべて α 同値となるので，名目書き換えシステムが α 安定であるならば自己基本危険対について考える必要はなくなる．そこで，基本危険対を制限した真基本危険対を考える．

定義 3.18 (真基本危険対)**.** 自己基本危険対でない基本危険対を真基本危険対とよぶ．名目書き換えシステム $\mathcal{R}$ の真基本危険対の集合を $PBCP(\mathcal{R})$ と表す．

真基本危険対に基づく以下の危険対補題は，補題 3.8 から容易に導くことができる．

補題 3.19. $\mathcal{R}$ を一様かつ α 安定な名目書き換えシステムとする．このとき，$\Delta \vdash t_1 \leftarrow_{\mathcal{R}} s \to_{\mathcal{R}} t_2$ ならば，以下のいづれかが成立する．

(1) $\Delta \vdash t_1 \downarrow_{\approx_\alpha} t_2$.

(2) 真基本危険対 $\Gamma \vdash (u,v) \in PBCP(\mathcal{R})$ と π, θ, C が存在して，$\Delta \vdash \Gamma^\pi\theta, t_1 \approx_\alpha C[u^\pi\theta], t_2 \approx_\alpha C[v^\pi\theta]$.

定理 3.14，系 3.15 と同様に以下も成り立つ．

定理 3.20. $\mathcal{R}$ を一様かつ α 安定な名目書き換えシステムとする．任意の真基本危険対 $\Gamma \vdash (u,v) \in PBCP(\mathcal{R})$ に対して $\Gamma \vdash u \downarrow_{\approx_\alpha} v$ が成り立つならば，$\mathcal{R}$ は α モジュロ局所合流性をもつ．

系 3.21. $\mathcal{R}$ を一様かつ α 安定な名目書き換えシステムとする．このとき，$PBCP(\mathcal{R}) = \emptyset$ ならば $\mathcal{R}$ は α モジュロ局所合流性をもつ．

定理 3.22. $\mathcal{R}$ を一様かつ α 安定な名目書き換えシステムとする．$\mathcal{R}$ が α モジュロ停止性をもち，$PBCP(\mathcal{R}) = \emptyset$ ならば，$\mathcal{R}$ は α モジュロ CR 性をもつ．

証明. 文献 [9, Theorem 5] より，一様かつ α 安定な名目書き換えシステムが α モジュロ停止性と α モジュロ局所合流性をもてば，α モジュロ CR 性をみたすことが導かれる．よって，$PBCP(\mathcal{R}) = \emptyset$ であれば，系 3.21 より，$\mathcal{R}$ は α モジュロ CR 性をもつことが分かる．　□

名目書き換えシステムの停止性を示す方法として，名目項上の経路順序 [7] が知られている．文献 [5] の書き換え関係 $\xrightarrow[FG]{}_R$ は $\to_R \circ \approx_\alpha$ と同値であるから，$\xrightarrow[FG]{}_{\mathcal{R}}$ に関して $\mathcal{R}$ の停止性が成り立つならば $\mathcal{R}$ は α モジュロ停止性をもつ．したがって，一様かつ α 安定な名目書き換えシステムに対しては，定理 3.22 による α モジュロ CR 条件が計算可能である．また，$\mathcal{R}$ の α モジュロ CR 性から $\xrightarrow[FG]{}_{\mathcal{R}}$ の合流性を導くことができる．次節で与える一様性と α 安定性の十分条件を用いることにより，実際的に決定可能な合流性判定手続きの構成が可能となる．

例 3.23. 例 2.6 の名目書き換えシステム $\mathcal{R}_\sigma$ は $PBCP(\mathcal{R}_\sigma) = \emptyset$ をみたす．また，名目項上の経路順序により $\mathcal{R}_\sigma$ が α モジュロ停止性をもつことを示すことが可能である．さらに，$\mathcal{R}_\sigma$ は次節の一様性と α 安定性の十分条件をみたす (例 4.8) ので，定理 3.22 より α モジュロ CR 性をもつことがいえる． □

4　名目書き換えシステムの一様性と α 安定性の十分条件

本節では，名目書き換えシステムが一様性と α 安定性をもつための十分条件を与える．

例 3.17 で見たように，例 1.2 の書き換え規則 R が α 安定とならない主な原因は，書き換えの前後で自由アトムが自由でなくなる場合が存在することである．書き換え規則の非出現環境に適当な制約を与えることにより，この種の現象は禁ずることができる．この考え方を一般化して，以下では抽象骨格保存という概念を導入する．

まず，名目項の位置における抽象骨格を定義する．直観的には，これは位置 ε からある部分項の位置まで辿りながら抽象のみを残したものである．

定義 4.1 (抽象骨格). 名目項 t，位置 $p \in Pos(t)$ に対して，$skel(p,t)$ を以下のように帰納的に定義する．

$$
\begin{array}{rcl}
skel(\varepsilon, s) & = & s \\
skel(1q, [a]s) & = & [a]skel(q,s) \\
skel(1q, f\ s) & = & skel(q,s) \\
skel(iq, (s_1, \ldots, s_n)) & = & skel(q, s_i)
\end{array}
$$

$skel(p,t)$ を項 t における位置 p の抽象骨格という．$skel(p,t) = [a_n] \ldots [a_1]s$ が単純であるとは，$i \neq j$ ならば $a_i \neq a_j$ となるときをいう．$PosSA_X(t) = \{p \in Pos_X(t) \mid skel(p,t)$ が単純 $\}$ と定義する．

例 4.2. 例 1.2 の名目書き換え規則 $R = \emptyset \vdash f\ X \to [a]X$ の左辺と右辺の葉の位置での抽象骨格は，$skel(1, f\ X) = skel(\epsilon, X) = X$，$skel(1, [a]X) = [a]skel(X) = [a]X$ となる．これらの抽象骨格はともに単純であり，$PosSA_X(f\ X) = \{1\}$，$PosSA_X([a]X) = \{1\}$ となる． □

定義 4.3. 二つの抽象骨格 $skel(q,l) = [a_n] \ldots [a_1]X$ と $skel(p,r) = [b_n] \ldots [b_1]X$ が単純であるとし，$as = \{a_n, \ldots, a_1\}$, $bs = \{b_n, \ldots, b_1\}$ とする．このとき，$\nabla \vdash skel(q,l) \cong skel(p,r)$ は $\forall a \in (as \setminus bs) \cup (bs \setminus as).\ \nabla \vdash a\#X$ が成り立つことと定義する．

例 4.4. 例 4.2 の抽象骨格に対する $\cong$ の例は次のようになる．

$$
\begin{array}{rcl}
\emptyset & \vdash & skel(1, f\ X) \ncong skel(1, [a]X) \\
a\#X & \vdash & skel(1, f\ X) \cong skel(1, [a]X)
\end{array}
$$

$skel(1,[a]X) = [a]X$ に現れるが $skel(1, f\ X) = X$ に現れないアトム a に対しては，下の例のように $a\#X$ が非出現環境に必要となる． □

以上の準備のもとで，抽象骨格保存な書き換え規則および書き換えシステムを定義する．

定義 4.5 (抽象骨格保存). 名目書き換え規則 $\nabla \vdash l \to r$ が以下の条件をみたすとき，抽象骨格保存であるという．

(1) l, r に現れる各保留変数 $\pi \cdot X$ に対して，$\pi = Id$

(2) $FA(r) \subseteq FA(l)$

(3) $\forall p \in Pos_{\mathcal{X}\mathcal{A}}(r).\ skel(p, r)$ は単純

(4) $\forall X \in V(r). \forall p \in Pos_X(r). \exists q \in PosSA_X(l).\ \nabla \vdash skel(q, l) \cong skel(p, r)$

名目書き換えシステム $\mathcal{R}$ が抽象骨格保存であるとは，すべての $R \in \mathcal{R}$ が抽象骨格保存であるときをいう．

名目書き換えシステムが抽象骨格保存であることは，一様性と α 安定性をもつための十分条件となる．すなわち，以下の定理が成り立つ．証明は省略する．

定理 4.6. 名目書き換えシステムが抽象骨格保存ならば一様かつ α 安定である．

例 4.7. 例 4.2 と例 4.4 で示したことを用いると，書き換え規則 $R = a\#X \vdash f\ X \to [a]X$ は抽象骨格保存の条件をみたすことが分かる．この R のみを書き換え規則とする名目書き換えシステム $\mathcal{R}$ は抽象骨格保存であるから，定理 4.6 より一様かつ α 安定である．また，$\mathcal{R}$ は $PBCP(\mathcal{R}) = \emptyset$ をみたす．さらに，$\to_{\mathcal{R}}$ による一回の書き換えで項中の f の数が減り，α 同値な項中の f の数は同じであるから，$\mathcal{R}$ は α モジュロ停止性をもつ．したがって，定理 3.22 により $\mathcal{R}$ は α モジュロ CR 性をもつことがいえる． □

例 4.8. 例 2.6 の名目書き換えシステム $\mathcal{R}_\sigma$ が抽象骨格保存であることを示す．ここでは，書き換え規則 $\sigma_{lam} = b\#Y \vdash sub([a]lam([b]X), Y) \to lam([b]sub([a]X, Y))$ が抽象骨格保存の条件をみたすことを確かめる．条件 (1)，条件 (2) は明らかであり，左辺と右辺の葉の位置での抽象骨格は以下のようになる．

$$
\begin{array}{rcl}
skel(11111, sub([a]lam([b]X), Y)) & = & [a][b]X \\
skel(12, sub([a]lam([b]X), Y)) & = & Y \\
skel(11111, lam([b]sub([a]X, Y))) & = & [b][a]X \\
skel(1112, lam([b]sub([a]X, Y))) & = & [b]Y
\end{array}
$$

これらの抽象骨格はすべて単純であるから，抽象骨格保存の条件 (3) はみたされる．さらに以下が成り立つので，条件 (4) もみたされる．

$$
\begin{array}{l}
b\#Y \ \vdash \ skel(11111, sub([a]lam([b]X), Y)) \ \cong \ skel(11111, lam([b]sub([a]X, Y))) \\
b\#Y \ \vdash \ skel(12, sub([a]lam([b]X), Y)) \ \cong \ skel(1112, lam([b]sub([a]X, Y)))
\end{array}
$$

$\mathcal{R}_\sigma$ の他の規則に対しても同様に抽象骨格保存であることが確かめられる．よって，定理 4.6 より $\mathcal{R}_\sigma$ は一様かつ α 安定である． □

5 まとめ

明示的置換をもつ書き換え関係の形式化を導入し，書き換え規則の有限集合として実際的な構成が可能な名目書き換えシステムを提案した．この精密な形式化に基づき危険対補題を与え，決定可能な合流条件を与えた．さらに，同変かつ根重なりの危険対が α 同値となる α 安定性の概念を与えた．この α 安定な書き換えシステムとなるための十分条件として抽象骨格保存な名目書き換えシステムを与え，本論文で提案する合流条件が具体例に対しても適用可能であることを示した．

提案した真基本危険対の概念を利用し，より適用範囲の広い直交システムを提案してその合流性を示すことや，真基本危険対の交差性判定条件の検討により，停止性をもつ名目書き換えシステムの合流性の決定可能性を示すことは今後の課題である．

謝辞　本論文に丁重なコメントをいただきました査読者に感謝いたします．なお，本研究は一部日本学術振興会科学研究費 25330004，25280025，23500002 の補助を受けて行われた．

参考文献

[1] C. Calvés, M. Fernández, Matching and alpha-equivalence check for nominal terms, *Journal of Computer and System Sciences*, Vol. 76, pp. 283–301, 2010.

[2] J. Cheney, Equivariant unification, *Journal of Automated Reasoning*, Vol. 45, pp. 267-300, 2010.

[3] H. Comon, Completion of rewritie systems with membership constraints. Part I: Deduction Rules, *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 25, pp. 397–419, 1998.

[4] N. G. de Bruijn, Lambda calculus notation with nameless dummies, a tool for automatic formula manipulation, with application to the Church-Rosser theorem, *Indagationes Mathematicae*, Vol. 34, pp. 381–392, 1972.

[5] M. Fernández, M. J. Gabbay, Nominal rewriting, *Information and Computation*, Vol. 205, pp. 917–965, 2007.

[6] M. Fernández, M. J. Gabbay, Closed nominal rewriting and efficiently computable nominal algebra equality, In *Proceedings of the 5th International Workshop on Logical Frameworks and Meta-Languages (LFMTP2010)*, *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, Vol. 34, pp.37–51, 2010.

[7] M. Fernández, A. Rubio, Nominal completion for rewriting systems with binders, *Proceedings of the 39th International Colloquim on Automata, Languages and Programming (ICALP2012)*, *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 7392, pp. 201-213, 2012.

[8] M. J. Gabbay, A. M. Pitts, A new approach to abstract syntax with variable binding, *Formal Aspects of Computing*, Vol. 13, pp. 341–363, 2002.

[9] J. Jounnaud, H. Kirchner, Completion of a set of rules modulo a set of equations, *SIAM Journal on Computing*, Vol. 15, pp. 1155–1194, 1986.

[10] J. Levy, M. Villaret, An efficient nominal unification algorithm, *Proceedings of the 21st International Conference on Rewriting Techniques and Applications*, *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, Vol. 6, pp. 209–226, 2010.

[11] A. M. Pitts, Nominal logic, a first order theory of names and binding, *Information and Computation*, Vol 186, pp.165–193, 2003.

[12] R. Pollack, M. Sato, W. Ricciotti, A canonical locally named representation of binding, *Journal of Automated Reasoning*, Vol. 49, pp. 185–207, 2012.

[13] C. Urban, A. M. Pitts, M. J. Gabbay, Nominal unification, *Theoretical Computer Science*, Vol. 323, pp. 473–497, 2004.

付録　補題の証明

補題 3.4. $\pi \cdot (t\sigma) = t^\pi(\pi \cdot \sigma)$

証明. t の構造に関する帰納法で示す．$t = a$ のとき．$\pi \cdot (a\sigma) = \pi \cdot a = a^\pi(\pi \cdot \sigma)$ より成立．$t = \tau \cdot X$ のとき．$\pi \cdot ((\tau \cdot X)\sigma) = (\pi \circ \tau) \cdot X\sigma = (\pi \circ \tau \circ \pi^{-1} \circ \pi) \cdot X\sigma = (\pi \circ \tau \circ \pi^{-1}) \cdot X(\pi \cdot \sigma) = (\tau \cdot X)^\pi(\pi \cdot \sigma)$ より成立．$t = f\ s$ のとき．帰納法の仮定を用いて，$\pi \cdot ((f\ s)\sigma) = f\ (\pi \cdot s\sigma) = f\ (s^\pi(\pi \cdot \sigma)) = (f\ s^\pi)(\pi \cdot \sigma) = (f\ s)^\pi(\pi \cdot \sigma)$．$t = (t_1, \ldots, t_n)$ のとき．帰納法の仮定を用いて，$\pi \cdot ((t_1, \ldots, t_n)\sigma) = (\pi \cdot t_1\sigma, \ldots, \pi \cdot t_n\sigma) = (t_1^\pi(\pi \cdot \sigma), \ldots, t_n^\pi(\pi \cdot \sigma)) = (t_1^\pi, \ldots, t_n^\pi)(\pi \cdot \sigma) = (t_1, \ldots, t_n)^\pi(\pi \cdot \sigma)$．$t = [a]s$ のとき．帰納法の仮定を用いて，$\pi \cdot (([a]s)\sigma) = [\pi \cdot a]\pi \cdot s\sigma = [\pi \cdot a]s^\pi(\pi \cdot \sigma) = ([a]s)^\pi(\pi \cdot \sigma)$．以上より成立． $\square$

補題 3.5. $\Delta \vdash \nabla\sigma \implies \Delta \vdash \nabla^\pi(\pi \cdot \sigma)$

証明. $\nabla^\pi = \{\pi \cdot a\#X \mid a\#X \in \nabla\}$，および，$\Delta \vdash a\#X\sigma \iff \Delta \vdash \pi \cdot a\#(\pi \cdot X\sigma) \iff \Delta \vdash \pi \cdot a\#X(\pi \cdot \sigma)$ より成立. $\square$

補題 3.6. $\Delta \vdash s \rightarrow_{\langle R,\pi,p,\sigma\rangle} t \implies \Delta \vdash \tau \cdot s \rightarrow_{\langle R,\tau\circ\pi,p,\tau\cdot\sigma\rangle} \tau \cdot t$

証明. $R = \nabla \vdash l \to r$，$s = C[s']_p$ とする．このとき，$\Delta \vdash \nabla^\pi\sigma, s' \approx_\alpha l^\pi\sigma$ かつ $t = C[r^\pi\sigma]$. $\Delta \vdash s' \approx_\alpha l^\pi\sigma$ と命題 2.2(2) より $\Delta \vdash \tau \cdot s' \approx_\alpha \tau \cdot l^\pi\sigma$．このとき，補題 3.4 より $\tau \cdot l^\pi\sigma = l^{\tau\circ\pi}(\tau\cdot\sigma)$ であるから，$\Delta \vdash \tau \cdot s' \approx_\alpha l^{\tau\circ\pi}(\tau\cdot\sigma)$．また，$\Delta \vdash \nabla^\pi\sigma$ から，補題 3.5 より $\Delta \vdash \nabla^{\tau\circ\pi}(\tau\cdot\sigma)$ が成立する．よって，$\Delta \vdash \nabla^{\tau\circ\pi}(\tau\cdot\sigma), \tau\cdot s' \approx_\alpha l^{\tau\circ\pi}(\tau\cdot\sigma)$ より，$\Delta \vdash (\tau\cdot C)[\tau\cdot s']_p \rightarrow_{\langle R,\tau\circ\pi,p,\tau\cdot\sigma\rangle} (\tau\cdot C)[r^{\tau\circ\pi}(\tau\cdot\sigma)]_p$．ここで，補題 3.4 より，$\tau \cdot t = (\tau\cdot C)[r^{\tau\circ\pi}(\tau\cdot\sigma)]$．また，$\tau \cdot s = (\tau\cdot C)[\tau\cdot s']_p$ であるから $\Delta \vdash \tau \cdot s \rightarrow_{\langle R,\tau\circ\pi,p,\tau\cdot\sigma\rangle} \tau \cdot t$．以上より，題意が成立. $\square$