

# 閉包操作に基づく右基底項書き換えシステムの到達可能性判定

四方駿作<sup>1</sup>, 青戸等人<sup>1</sup>, 外山芳人<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 東北大学 電気通信研究所

{shikata,aoto,toyama}@nue.riec.tohoku.ac.jp

**概要** 項書き換えシステムの到達可能性判定問題は一般には決定不能である。しかし、いくつかの部分クラスについては決定可能であり、その判定手続きも提案されている。とくに、基底項書き換えシステムに対しては、単純な閉包操作に基づく効率的な判定手続きが存在する。一方、より広いクラスである右基底項書き換えシステムでは、到達可能性判定問題は決定可能であるにもかかわらず、単純な閉包操作に基づく判定手続きはこれまで報告されていない。本論文では、基底項書き換えシステムに対する従来の閉包操作を拡張することにより、右基底項書き換えシステムに対する単純な閉包操作に基づく到達可能性の判定手続きを提案する。さらにその正当性を証明し、計算量の評価を行う。

## 1 はじめに

項書き換えシステム  $R$  の到達可能性は、与えられた項  $s$  と  $t$  に対して、項  $s$  から項  $t$  へ  $R$  をもちいた書き換えで到達できるかという問題である。項書き換えシステムの到達可能性は、項書き換えシステムの基本的な性質の1つであり、合流性の判定手続きなどでも重要な役割を果たす。このため、到達可能となる条件や判定手続きなどが研究されている [2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14]。

項書き換えシステムの到達可能性は、一般的には決定不能であることが知られている [14]。一方で、右基底項書き換えシステム [10] や有限経路重複項書き換えシステム [12]、ボトムアップ項書き換えシステム [3] などにおいては、決定可能となることが知られている。項書き換えシステムの到達可能性の判定手続きとして、大きく2通りの手法が知られている。1つは、木オートマトンの完備化操作に基づく手法 [6, 8, 12] である。もう1つは、項書き換えシステムの閉包操作に基づく手法 [2, 11, 4, 5] である。前者は広い適用範囲をもつが、線形性をみたさない場合は実際的な判定手続きを実現することは困難である。一方、後者の適用範囲は限られてはいるが、効率のよい実際的な判定手続きが知られている。

基底項書き換えシステムに対する閉包操作に基づく到達可能性判定手続き [2] は非常に簡明である。一方、右基底項書き換えシステムに対する閉包操作に基づく判定手続き [4, 5] は制約付き項書き換えシステムをもちいており、効率的な実装には適していない。そこで、本論文では、基底項書き換えシステムに対する閉包操作を拡張することにより、従来より簡明な右基底項書き換えシステムに対しての閉包操作に基づく到達可能性の判定手続きを提案する。さらに判定手続きの計算量の評価を行い、従来の結果と比較する。

本論文の構成は次のとおりである。第2節では、本論文でもちいる定義や記法について説明する。第3節では、閉包操作に基づく到達可能性判定手続きについて説明する。第4節では、第3節で説明した判定手続きの正当性を証明し、計算量の評価を行う。第5節では、実装および実験結果について説明する。第6節で、本論文の結果と今後の課題についてまとめる。

## 2 準備

ここでは、本論文でもちいる定義および記法を文献 [1, 7] に基づいて紹介する。

関数記号の集合を  $\mathcal{F}$ , 変数記号の集合を  $\mathcal{V}$  とし,  $\mathcal{F}$  と  $\mathcal{V}$  から得られる項の集合を  $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$  と表す. 項  $t$  に現れる変数全体の集合を  $\mathcal{V}(t)$  と表し,  $\mathcal{V}(t) = \emptyset$  となる  $t$  を基底項とよぶ. 基底項の集合を  $\mathcal{T}(\mathcal{F})$  と記す. 関数記号  $f \in \mathcal{F}$  の引数の個数を  $\text{arity}(f)$  で表す. 特に  $\text{arity}(f) = 0$  のとき  $f$  を定数とよぶ. 項  $t$  においてどの変数も高々1回しか現れないとき, 項  $t$  は線形であるという. 非線形項  $t$  において  $\mathcal{V}_{NL}(t)$  は  $t$  に2回以上現れる変数の集合とし,  $t^L$  は非線形変数を異なる新しい変数にそれぞれ置き換えて線形化した項を表す. 例えば  $f(x, x, y)^L = f(z, z', y)$  となる. 項  $t$  の部分項の位置は自然数の有限列で表し,  $t$  に現れる  $x$  の位置の集合を  $\text{Pos}_x(t)$  と, その個数を  $|\text{Pos}_x(t)|$  と表す. 空列を  $\lambda$  と記し, 項の根位置を表す. 項  $t$  の位置  $p$  における部分項を  $t|_p$  と表し, 項  $t$  の位置  $p$  にある部分項を  $s$  に置き換えて得られる項を  $t[s]_p$  と表す. 項  $t$  の部分項の位置の最大の長さを  $t$  の高さとし,  $h(t)$  と表す. 項  $t$  のサイズ  $|t|$  は (1)  $t$  が定数または変数のとき 1, (2)  $t = f(t_1, \dots, t_n)$  のとき  $1 + \sum_{i=1}^n |t_i|$  とする. 代入とは変数集合  $\mathcal{V}$  から項の集合  $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$  への写像であり, 代入  $\theta$  が  $x$  を  $t$  へと置き換えるものである場合  $\theta = \{x \mapsto t\}$  と表す. 代入  $\theta$  による項  $t$  への代入は  $\theta(t)$ , または  $t\theta$  と表す. ホールは特別な定数記号  $\square$  であり, ホールを部分項として含む項を文脈という. 文脈  $C$  において, ホールを項  $t$  で置き換えて得られる項を  $C[t]$  と表す.

項の対  $(l, r)$  が  $l \notin \mathcal{V}$  かつ  $\mathcal{V}(l) \supseteq \mathcal{V}(r)$  をみたすとき, その対を書き換え規則といい,  $l \rightarrow r$  と記す. 項書き換えシステム  $\mathcal{R}$  は書き換え規則の有限集合である. 任意の書き換え規則  $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$  において,  $l$  と  $r$  が基底項 ( $r$  が基底項) のとき,  $\mathcal{R}$  を基底 (右基底) とよぶ. ある書き換え規則  $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$ , 代入  $\theta$  が存在して項  $t$  の部分項  $t|_p = l\theta$  であるとき, 項  $t$  は項  $s = t[r\theta]_p$  へと書き換えることができる. この書き換え関係を  $t \xrightarrow{\mathcal{R}} s$  と表し,  $\mathcal{R}$  が明らかなきとき,  $\xrightarrow{\mathcal{R}}$  を  $\rightarrow$  と略記する.  $\rightarrow$  の根位置での書き換えを  $\rightarrow_\lambda$ , それより深い位置での書き換えを  $\rightarrow_{>\lambda}$  と表す.  $\rightarrow$  の推移閉包, 反射推移閉包をそれぞれ  $\rightarrow^+, \rightarrow^*$  で表す.  $t \rightarrow^* s$  のとき,  $s$  は  $t$  から到達可能であるという. 項  $t_1, t_2, \dots, t_n$  について,  $t_1 \xrightarrow{\mathcal{R}}^* u \wedge t_2 \xrightarrow{\mathcal{R}}^* u \wedge \dots \wedge t_n \xrightarrow{\mathcal{R}}^* u$  となる書き換え列と項  $u$  が存在するとき, 項  $t_1, t_2, \dots, t_n$  は交差するといい  $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \downarrow_{\mathcal{R}}$  と表す. 以下では  $\mathcal{R}$  が明らかなきとき,  $\downarrow_{\mathcal{R}}$  は  $\downarrow$  と略記する.

関係  $s \rightarrow^* t$  をみたす書き換え系列  $\delta: s = s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_n = t$  を  $\delta: s \rightarrow^* t$  と記し, この書き換え系列のサイズを  $|\delta: s \rightarrow^* t| = n$  と定める. 同様に  $\{s_1, \dots, s_n\} \downarrow$  をみたす次のような書き換え系列  $\eta$  を考える.  $\eta: s_1 = s_{1,0} \rightarrow s_{1,1} \rightarrow \dots \rightarrow s_{1,m_1} = u, s_2 = s_{2,0} \rightarrow s_{2,1} \rightarrow \dots \rightarrow s_{2,m_2} = u, \dots, s_n = s_{n,0} \rightarrow s_{n,1} \rightarrow \dots \rightarrow s_{n,m_n} = u$  このとき,  $\eta: \{s_1, \dots, s_n\} \downarrow$  と記し, この書き換え系列のサイズを  $|\eta: \{s_1, \dots, s_n\} \downarrow| = \sum_{i=1}^n m_i$  と定める. 以下では, 書き換え系列  $\delta, \eta$  をとくに明示する必要がない場合には,  $|\delta: s \rightarrow^* t|, |\eta: \{s_1, \dots, s_n\} \downarrow|$  をそれぞれ  $|s \rightarrow^* t|, |\{s_1, \dots, s_n\} \downarrow|$  と略記する.

### 3 閉包操作に基づく到達可能性判定手続き

本節では, 右基底項書き換えシステム  $\mathcal{R}$  のもとで基底項  $t$  から基底項  $s$  へ到達可能かを判定する手続きを示す. 手続きの正当性は次節で証明する. 手続きの概要は以下ようになる. まず,  $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \{t \rightarrow t, s \rightarrow s\}$  から, 右辺の基底項をすべて対応する定数に置き換えたような項書き換えシステム  $\mathcal{R}_0$  を構成することで  $t \xrightarrow{\mathcal{R}_0}^* s$  の判定問題を  $t$  と  $s$  に対応する定数  $c_t, c_s$  に対する到達可能性判定問題  $c_t \xrightarrow{\mathcal{R}_0}^* c_s$  に帰着する (3.1 節). さらに, この  $\mathcal{R}_0$  に対して閉包操作を行うことで  $\mathcal{R}_\infty$  を構成し, 到達可能性判定問題  $c_t \xrightarrow{\mathcal{R}_0}^* c_s$  を  $c_t \rightarrow c_s \in \mathcal{R}_\infty$  か否かという問題に帰着する (3.2 節). 最後に  $c_t \rightarrow c_s \in \mathcal{R}_\infty$  を判定することにより,  $t \xrightarrow{\mathcal{R}}^* s$  を判定する.

#### 3.1 基底項の定数化

以下ではまず, 右基底項書き換えシステム  $\mathcal{R}$  の到達可能性を保存しつつ, 以下の性質 (1), (2) をみたす右基底項書き換えシステム  $\mathcal{R}_0$  へ変換する手続きを文献 [2] をもとに与える.

- (1) 左辺が定数でなければ右辺は定数 .
- (2) 左辺が定数ならば右辺は高さ 1 以下 .

$u$  を基底項,  $c$  を定数とすると,  $\Phi_u^c(s)$  を項  $s$  に表れるすべての基底部分項  $u$  を  $c$  に置き換えた項を表す. また, 書き換え規則  $l \rightarrow r$  や項書き換えシステム  $\mathcal{R}$  に対する  $\Phi_u^c$  を以下で定義する .

$$\begin{aligned}\Phi_u^c(l \rightarrow r) &= \Phi_u^c(l) \rightarrow \Phi_u^c(r) \\ \Phi_u^c(\mathcal{R}) &= \{\Phi_u^c(l \rightarrow r) \mid l \rightarrow r \in \mathcal{R}\}\end{aligned}$$

この変換  $\Phi_u^c$  をもちいて,  $\mathcal{R}_0$  の構成手続きを与える .

### 手続き 1 ( $\mathcal{R}_0$ 構成手続き)

- 入力: 右基底項書き換えシステム  $\mathcal{R}$ ,
  - 出力:  $\mathcal{R}_0$
1.  $i := 0, S_0 := \mathcal{R}$  とおく .
  2. もし,  $(h(l) > 0 \wedge h(r) > 0) \vee (h(r) > 1)$  をみたす  $l \rightarrow r \in S_i$  が存在するならば,  $r$  の高さ 1 の基底部分項  $u$  をひとつ選び  $S_{i+1} = \Phi_u^c(S_i) \cup \{c \rightarrow u, u \rightarrow c\}$  とおく . ただし,  $c$  は新しい定数とする . そのような  $l \rightarrow r \in S_i$  と  $u$  が存在しなければ,  $\mathcal{R}_0 := S_i$  を出力して終了 .
  3.  $i := i + 1$  として, 2 に戻る .

例 1 以下の項書き換えシステム  $\mathcal{R}$  に対して  $\mathcal{R}_0$  を構成する .

$$\mathcal{R} = \begin{cases} g(b) & \rightarrow g(a) \\ b & \rightarrow g(g(g(b))) \\ f(x, x) & \rightarrow f(g(c), g(c)) \end{cases}$$

$g(a)$  を  $c_{g(a)}$  へ置き換え, 書き換え規則を追加した  $S_1$  は以下のようにになる .

$$S_1 = \begin{cases} g(b) & \rightarrow c_{g(a)} \\ b & \rightarrow g(g(g(b))) \\ f(x, x) & \rightarrow f(g(c), g(c)) \\ c_{g(a)} & \rightarrow g(a) \\ g(a) & \rightarrow c_{g(a)} \end{cases}$$

同様に手続きを行なっていくと,  $S_5$  は以下のようにになる .

$$S_5 = \begin{cases} c_{g(b)} & \rightarrow c_{g(a)} \\ b & \rightarrow g(c_{g(c_{g(b)})}) \\ f(x, x) & \rightarrow c_{f(c_{g(c)}, c_{g(c)})} \\ c_{g(a)} & \rightarrow g(a) \\ g(a) & \rightarrow c_{g(a)} \\ c_{g(b)} & \rightarrow g(b) \\ g(b) & \rightarrow c_{g(b)} \\ c_{g(c)} & \rightarrow g(c) \\ g(c) & \rightarrow c_{g(c)} \\ c_{g(c_{g(b)})} & \rightarrow g(c_{g(b)}) \\ g(c_{g(b)}) & \rightarrow c_{g(c_{g(b)})} \\ c_{f(c_{g(c)}, c_{g(c)})} & \rightarrow f(c_{g(c)}, c_{g(c)}) \\ f(c_{g(c)}, c_{g(c)}) & \rightarrow c_{f(c_{g(c)}, c_{g(c)})} \end{cases}$$

これ以上変換は行えないので  $\mathcal{R}_0 = S_5$  .

到達可能性判定手続きを与えるのに必要な  $\mathcal{R}_0$  の性質を示す .

補題 1  $\mathcal{R}_0$  は有限集合かつ実効的な手続きで構成可能 .

証明  $S_0, S_1, \dots$  の無限列が存在しないことを示せば十分 .

$$k_i = \sum \{|l| + |r| \mid l \rightarrow r \in S_i, (h(l) > 0 \wedge h(r) > 0) \vee (h(r) > 1)\}$$

とおく . 手続き 1 で追加される規則  $c \rightarrow f(c_1, \dots, c_n), f(c_1, \dots, c_n) \rightarrow c$  は条件  $(h(l) > 0 \wedge h(r) > 0) \vee (h(r) > 1)$  をみたさない . また , 手続き 1 で ,  $S_i$  には ,  $f(c_1, \dots, c_n)$  を部分項として含む書き換え規則が含まれていることから ,  $\Phi_{f(c_1, \dots, c_n)}^c$  により , 最低 1 つの  $f(c_1, \dots, c_n)$  は  $c$  に置き換えられる . よって ,  $k_i > k_{i+1}$  が成立する . 以上より ,  $k_0 > k_1 > \dots$  となるが ,  $k_i$  は自然数なのでこれは無限に続くことはない . また ,  $\mathcal{R}$  の有限性より  $S_0$  は有限であることと ,  $|S_{i+1}| \leq |S_i| + 2$  であることから , 任意の  $i \geq 0$  について ,  $S_i$  は有限 . よって , ある  $i$  について  $\mathcal{R}_0 = S_i$  であることから ,  $\mathcal{R}_0$  は有限 . したがって  $\mathcal{R}_0$  は有限集合かつ実効的な手続きで構成可能 .  $\square$

補題 2 基底項  $s$  について  $s \rightarrow s \in \mathcal{R}$  とするとき ,  $c_s \xrightarrow[\mathcal{R}_0]^* s, s \xrightarrow[\mathcal{R}_0]^* c_s$  なる定数  $c_s$  が存在する .

証明  $s \rightarrow s \in S_i$  ( $s$  は基底項 ,  $i \geq 0$ ) とするとき ,  $c_s \xrightarrow[\mathcal{R}_0]^* s, s \xrightarrow[\mathcal{R}_0]^* c_s$  となる定数  $c_s$  が存在することを ,  $s$  のサイズに関する帰納法で示す .

(B.S.)  $|s| = 1$  のときは  $c_s := s$  ととればよいので自明 .

(I.S.)  $|s| > 1$  のとき .

このとき ,  $h(s) > 0$  かつ  $s$  には高さ 1 の基底部分項が存在する . よって ,  $S_i, S_{i+1}, \dots, \mathcal{R}_0$  のなかで必ず  $s$  の基底部分項の置き換えが起こる .  $s$  の基底部分項の置き換えが起こる最初のステップを  $j$  ( $\geq i$ ) とする . すると ,  $s$  の基底部分項  $f(c_1, \dots, c_n)$  と新しい定数  $c$  について ,  $S_{j+1} = \Phi_{f(c_1, \dots, c_n)}^c(S_j)$  となる . このとき ,  $t = \Phi_{f(c_1, \dots, c_n)}^c(s)$  とすると ,  $t \rightarrow t \in S_{j+1}$  かつ  $|t| < |s|$  . また ,  $f(c_1, \dots, c_n) \rightarrow c, c \rightarrow f(c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{R}_0$  となるので ,  $t \xrightarrow[\mathcal{R}_0]^* s, s \xrightarrow[\mathcal{R}_0]^* t$  が成立する . また , 帰納法の仮定より ,  $c_t \xrightarrow[\mathcal{R}_0]^* t, t \xrightarrow[\mathcal{R}_0]^* c_t$  となる定数  $c_t$  が存在する . 以上より ,  $c_t \xrightarrow[\mathcal{R}_0]^* t \xrightarrow[\mathcal{R}_0]^* s, s \xrightarrow[\mathcal{R}_0]^* t \xrightarrow[\mathcal{R}_0]^* c_t$  . よって題意が成り立つ .  $\square$

### 3.2 閉包操作と到達可能性判定

以下では , まず  $\mathcal{R}_0$  から  $\mathcal{R}_\infty$  を構成するための閉包操作を与え , その後 , 到達可能性の判定手続きを与える . 最初に以下で使用する記法を約束する .  $\mathcal{F}, \mathcal{F}_0$  をそれぞれ  $\mathcal{R}_0$  の関数記号の集合 ,  $\mathcal{R}_0$  の定数の集合とする .  $\mathcal{R}_0$  の左辺に現れる非線形変数の繰り返し現れる回数の最大値を  $w = \max\{|Pos_x(l)| \mid x \in \mathcal{V}_{NL}(l), l \rightarrow r \in \mathcal{R}_0\}$  とする . 非線形変数が存在しないとき ,  $w = 0$  とする . 高さ 1 以下の基底項の集合を  $\mathcal{T}^{\leq 1} = \{t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}) \mid h(t) \leq 1\}$  とする . 以下で使用する項の組  $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$  は  $n = w$  となるもののみを考える . また ,  $T = \{t_1, \dots, t_n\}, n \leq w$  のとき  $\langle t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_w \rangle$  (ただし ,  $t_n = t_{n+1} = \dots = t_w$ ) なる組を  $\langle T \rangle$  と表す . また ,  $J_0 = \{\langle s, \dots, s \rangle \mid s \in \mathcal{T}^{\leq 1}\}$  と定める .

例 2  $w = 2$  であり  $\mathcal{F} = \{a, b, g, f\}$  で  $\{a, b\} = \mathcal{F}_0$  ,  $arity(g) = 1$  ,  $arity(f) = 2$  のとき ,  $J_0$  は以下のようなになる .

$$J_0 = \left\{ \begin{array}{l} \langle a, a \rangle \\ \langle b, b \rangle \\ \langle g(a), g(a) \rangle \\ \langle g(b), g(b) \rangle \\ \langle f(a, a), f(a, a) \rangle \\ \langle f(a, b), f(a, b) \rangle \\ \langle f(b, a), f(b, a) \rangle \\ \langle f(b, b), f(b, b) \rangle \end{array} \right.$$

次に，閉包操作のアイデアを簡単に説明する．以下では  $a, b, c, \dots$  を定数とする． $\text{LHS}(\mathcal{R}_0) = \{t \mid t \rightarrow s \in \mathcal{R}_0\}$  とし， $l \in \text{LHS}(\mathcal{R}_0) \setminus \mathcal{F}_0$  とする．このとき， $\mathcal{R}_0$  の書き換え規則は，以下のような定数から定数への書き換え，定数から高さ 1 の項への書き換え， $\mathcal{R}$  の左辺から定数への書き換えという形の 3 つのタイプに分けることができる．

$$a \rightarrow b \quad \dots \quad (\text{I})$$

$$a \rightarrow f(b_1, \dots, b_n) \quad \dots \quad (\text{II})$$

$$l \rightarrow b \quad \dots \quad (\text{III})$$

$\mathcal{R}$  が基底項書き換えシステムるときは上記の (III) の  $l$  が高さ 1 となる  $\mathcal{R}_0$  を構成したとき，以下のような閉包操作をもちいることで到達可能性を判定する項書き換えシステムが得られる [2] ．

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{i+1} = & \mathcal{R}_i \\ & \cup \{a \rightarrow c \mid a \xrightarrow{i} b \xrightarrow{i} c\} \\ & \cup \{a \rightarrow f(b_1, \dots, b_n) \mid a \xrightarrow{i} b \xrightarrow{i} f(b_1, \dots, b_n)\} \\ & \cup \{f(b_1, \dots, b_n) \rightarrow c \mid f(b_1, \dots, b_n) \xrightarrow{i} b \xrightarrow{i} c\} \\ & \cup \{a \rightarrow f(b_1, \dots, c, \dots, b_n) \mid a \xrightarrow{i} f(b_1, \dots, b, \dots, b_n), b \xrightarrow{i} c\} \\ & \cup \{a \rightarrow b \mid a \xrightarrow{i} f(b_1, \dots, b_n), f(b_1, \dots, b_n) \xrightarrow{i} b\} \end{aligned}$$

一方で右基底項書き換えシステムの場合は左辺に変数が現れる．そして， $a \rightarrow^* l\theta, l\theta \rightarrow b$  から  $a \rightarrow b$  を追加するという閉包操作が必要となるが，一般にはこのような  $l\theta$  をすべて考えるのは困難である．上記の閉包操作を右基底項書き換えシステムへと拡張するためのアイデアは主に以下の 3 点である．

- (1)  $a \rightarrow^* l\theta$  の書き換えはタイプ (II) の書き換え規則に帰着する．
- (2)  $a \rightarrow^* l\theta$  の代入  $\theta$  は変数から定数への写像に帰着する．
- (3)  $\mathcal{R}_i$  で交差する高さ 1 以下の項の組の集合である  $J_i$  を同時に構成する．

以下に  $\mathcal{R}_0$  と  $J_0$  から  $\mathcal{R}_i, J_i (i \geq 0)$  を構成する手続きを与える．構成手続きでは， $\mathcal{R}_0$  と  $J_0$  から  $J_1$  を構成し， $\mathcal{R}_0, J_1$  から  $\mathcal{R}_1$  を構成し， $\dots$  というように  $\mathcal{R}_i$  と  $J_i$  を交互に構成していく．また，このとき  $\mathcal{R}_{i+1}$  は  $\mathcal{R}_i$  にタイプ (I), (II), (III) の形の書き換え規則を追加することにより構成され， $J_{i+1}$  は  $J_i$  に  $S$  の  $w$  個の要素の組を追加することにより構成される．

以下では  $\mathcal{R}_i$  の部分集合でタイプ (II) の規則の全体からなる集合を  $\mathcal{R}_i^<$  と表す．さらに， $s \xrightarrow{\mathcal{R}_i} t$ ， $s \xrightarrow{\mathcal{R}_i^<} t, \{t_1, t_2, \dots, t_n\} \downarrow_{\mathcal{R}_i^<} \langle s_1, \dots, s_w \rangle \in J_i$  をそれぞれ  $s \xrightarrow{i} t, s \xrightarrow{i} t, \{t_1, t_2, \dots, t_n\} \downarrow_i^<, \langle s_1, \dots, s_w \rangle_i$  と表す．また，代入  $\sigma$  は変数から定数への写像とする．

**定義 1**  $\mathcal{R}_i, J_i$  から  $J_{i+1}$  を構成するステップ 1 と  $\mathcal{R}_i, J_{i+1}$  から  $\mathcal{R}_{i+1}$  を構成するステップ 2 を以下のように定義する ( $i \geq 0$ ) ．

**ステップ 1**  $J_i, \mathcal{R}_i$  から  $J_{i+1}$  を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} J_{i+1} = & J_i \\ & \cup \{\langle \dots, a, \dots \rangle \mid a \xrightarrow{i} f(b_1, \dots, b_n), \langle \dots, f(b_1, \dots, b_n), \dots \rangle_i\} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \cup \{\langle f(a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, f(a_{1w}, \dots, a_{nw}) \rangle \mid \langle a_{11}, \dots, a_{1w} \rangle_i, \dots, \langle a_{n1}, \dots, a_{nw} \rangle_i, \\ & \quad \text{arity}(f) = n\} \end{aligned} \quad (2)$$

ステップ 2  $J_{i+1}, \mathcal{R}_i$  から  $\mathcal{R}_{i+1}$  を以下のように定義する .

$$\mathcal{R}_{i+1} = \mathcal{R}_i \cup \{a \rightarrow c \mid a \xrightarrow{i} b \xrightarrow{i} c\} \quad (3)$$

$$\cup \{a \rightarrow f(b_1, \dots, b_n) \mid a \xrightarrow{i} b \xrightarrow{i} f(b_1, \dots, b_n)\} \quad (4)$$

$$\cup \{l \rightarrow c \mid l \xrightarrow{i} b \xrightarrow{i} c\} \quad (5)$$

$$\cup \{a \rightarrow f(b_1, \dots, c, \dots, b_n) \mid a \xrightarrow{i} f(b_1, \dots, b, \dots, b_n), b \xrightarrow{i} c\} \quad (6)$$

$$\cup \{a \rightarrow b \mid a \xrightarrow{i} {}^*l^L\sigma, l \xrightarrow{i} b, \langle \{\sigma(l^L|_p) \mid l|_p = x_1\} \rangle_{i+1}, \dots, \langle \{\sigma(l^L|_p) \mid l|_p = x_k\} \rangle_{i+1}, \mathcal{V}_{NL}(l) = \{x_1, \dots, x_k\}\} \quad (7)$$

ここで (7) は,  $l^L\sigma$  において  $l$  の共通の非線形変数の位置の定数がすべて  $J_i$  に含まれている場合,  $a \rightarrow b$  を  $\mathcal{R}_{i+1}$  に追加することを示している . 例えば  $a \xrightarrow{i} {}^*f(c, d)$ ,  $f(x, x) \xrightarrow{i} b$ ,  $\langle c, d \rangle_{i+1}$  のとき,  $a \rightarrow b$  を  $\mathcal{R}_{i+1}$  に追加する .

補題 3 任意の  $i$  において  $\mathcal{R}_i$  の推論規則は (I), (II), (III) の 3 種類のいずれかである .

証明 手続き 1 より,  $\mathcal{R}_0$  の推論規則は (I), (II), (III) の 3 種類のいずれかであり, また定義 1 のステップ 2 より  $\mathcal{R}_i$  から  $\mathcal{R}_{i+1}$  に追加される推論規則は (I), (II), (III) の 3 種類である . よって, 題意は成り立つ .  $\square$

補題 4  $a$  と  $l$  と  $\mathcal{R}_i$  から  $\{\sigma: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{F}_0 \mid a \xrightarrow{i} {}^*l^L\sigma\}$  は構成可能 .

証明  $a \xrightarrow{i} {}^*l^L\sigma$  において高さが大きくなる書き換えのみをもちいており,  $\sigma$  が変数から定数への代入であるため,  $l$  より高さが大きくなる書き換え列は考える必要がない . したがって有限の書き換え列だけでとり得る  $l^L\sigma$  はすべて求めることができるので題意は成り立つ .  $\square$

以下では,  $\mathcal{R}_\infty, J_\infty$  をそれぞれ  $\mathcal{R}_\infty = \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{R}_i, J_\infty = \bigcup_{i \geq 0} J_i$  と定義し,  $a \rightarrow b \in \mathcal{R}_\infty, \{t_1, \dots, t_n\} \downarrow_{\mathcal{R}_\infty}, \langle s_1, \dots, s_w \rangle \in J_\infty$  をそれぞれ  $a \rightarrow b, \{t_1, \dots, t_n\} \downarrow_\infty, \langle s_1, \dots, s_w \rangle_\infty$  と表す .

例 3 以下の右基底項書き換えシステム  $\mathcal{R}$  を考える .

$$\mathcal{R} = \begin{cases} f(x, x) & \rightarrow d \\ e & \rightarrow f(a, b) \\ a & \rightarrow g(a) \\ b & \rightarrow g(g(a)) \end{cases}$$

手続き 1 と,  $J_0$  の定義にしたがって  $\mathcal{R}_0, J_0$  を作ると以下ようになる .

$$\mathcal{R}_0 = \begin{cases} f(x, x) & \rightarrow d \\ e & \rightarrow f(a, b) \\ a & \rightarrow g(a) \\ b & \rightarrow g(c_g) \\ c_g & \rightarrow g(a) \\ g(a) & \rightarrow c_g \end{cases}$$

$$J_0 = \begin{cases} \langle a, a \rangle \\ \langle b, b \rangle \\ \vdots \\ \text{(中略)} \\ \vdots \\ \langle f(c_g, c_g), f(c_g, c_g) \rangle \end{cases}$$

ここでは  $c_{g(a)}$  を省略して  $c_g$  と表している．定義 1 にしたがって  $J_1$  を構成すると以下が得られる．

$$J_1 = J_0 \cup \left\{ \begin{array}{l} \langle e, f(a, b) \rangle \\ \langle f(a, b), e \rangle \\ \vdots \\ \text{(中略)} \\ \vdots \\ \langle c_g, g(a) \rangle \end{array} \right.$$

またこれをもちいて  $\mathcal{R}_1$  を構成すると以下が得られる．

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_0 \cup \left\{ a \rightarrow c_g \right.$$

となる．さらにここから  $J_2, \mathcal{R}_2, J_3$  を構成すると以下が得られる．

$$J_2 = J_1 \cup \left\{ \begin{array}{l} \langle a, c_g \rangle \\ \langle c_g, a \rangle \end{array} \right.$$

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cup \left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow g(c_g) \\ e \rightarrow f(c_g, b) \\ c_g \rightarrow g(c_g) \end{array} \right.$$

$$J_3 = J_2 \cup \left\{ \begin{array}{l} \langle a, b \rangle \\ \langle b, a \rangle \\ \vdots \\ \text{(中略)} \\ \vdots \\ \langle f(a, a), f(c_g, c_g) \rangle \end{array} \right.$$

$e \xrightarrow{\leq} f(a, b), f(x, x) \rightarrow d, \langle a, b \rangle_3$  より,  $\mathcal{R}_3$  は以下ようになる．

$$\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_2 \cup \left\{ e \rightarrow d \right.$$

さらにステップを繰り返していくと  $J_6, \mathcal{R}_6$  は以下ようになる．

$$J_6 = J_5 \cup \left\{ \begin{array}{l} \langle e, f(c_g, a) \rangle \\ \langle f(c_g, a), e \rangle \\ \vdots \\ \text{(中略)} \\ \vdots \\ \langle f(c_g, b), e \rangle \end{array} \right.$$

$$\mathcal{R}_6 = \mathcal{R}_3$$

$J_6, \mathcal{R}_3$  にはこれ以上新しい要素は追加されないので  $J_\infty = J_6, \mathcal{R}_\infty = \mathcal{R}_3$  となる． □

**補題 5** 任意の自然数  $i$  について,  $\mathcal{R}_i, J_i$  は有限集合かつ実効的な手続きで構成可能．また,  $\mathcal{R}_\infty, J_\infty$  は有限集合かつ実効的な手続きで構成可能．

**証明** 任意の  $i$  において  $\mathcal{R}_i \subseteq (\text{LHS}(\mathcal{R}_0) \times \mathcal{F}_0) \cup (\mathcal{F}_0 \times \mathcal{T}^{\leq 1})$ ,  $J_i \subseteq (\mathcal{T}^{\leq 1})^w$ ．よって  $(\text{LHS}(\mathcal{R}_0) \times \mathcal{F}_0) \cup (\mathcal{F}_0 \times \mathcal{T}^{\leq 1})$  および  $(\mathcal{T}^{\leq 1})^w$  が有限なので  $\mathcal{R}_i, J_i$  は有限集合．したがって, ステップ 1, 2 は有限個の要素を追加しているだけである．このことから, ステップ 1 とステップ 2 の (3), (4), (5), (6) の要素については構成可能．また, 補題 4 より,  $a \xrightarrow{\leq} *l^L \sigma$  となる  $\sigma$  がすべて構成可能なのでステップ 2 の

(7)の要素についても構成可能．このことから任意の自然数  $i$  について， $\mathcal{R}_i, J_i$  は有限集合かつ実効的な手続きで構成可能．また，任意の  $i$  において  $\mathcal{R}_i \subseteq (\text{LHS}(\mathcal{R}_0) \times \mathcal{F}_0) \cup (\mathcal{F}_0 \times \mathcal{T}^{\leq 1})$ ， $J_i \subseteq (\mathcal{T}^{\leq 1})^w$  なのでステップ 1, 2 で追加される要素には上限があり， $\mathcal{R}_j = \mathcal{R}_{j+1} = \dots$ ， $J_k = J_{k+1} = \dots$  となる  $\mathcal{R}_j, J_k$  が存在する．このとき  $\mathcal{R}_j = \mathcal{R}_\infty$ ， $J_k = J_\infty$  である．任意の自然数  $i$  について， $\mathcal{R}_i, J_i$  は有限集合かつ実効的な手続きで構成可能であることから， $\mathcal{R}_j, J_k$  は有限集合かつ実効的な手続きで構成可能．よって  $\mathcal{R}_\infty, J_\infty$  は有限集合かつ実効的な手続きで構成可能．  $\square$

最後に，定数化および閉包操作をもちいて，右基底項書き換えシステムの到達可能性判定手続きを以下のように与える．

手続き 2 (右基底項書き換えシステムの到達可能性判定手続き) 基底項  $t, s$  と右基底項書き換えシステム  $\mathcal{R}$  のもとで  $t \xrightarrow[\mathcal{R}]{}^* s$  を判定する．

- 入力: 項書き換えシステム  $\mathcal{R}$ ，基底項  $t, s$
  - 出力: 判定結果 (TRUE または FALSE)
1.  $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \{t \rightarrow t, s \rightarrow s\}$  を構成する．
  2.  $\hat{\mathcal{R}}$  から手続き 1,  $J_0$  の定義に基づき  $\mathcal{R}_0, J_0$  を構成する．このとき，定数  $c_t, c_s$  を補題 2 より得られる  $t \xrightarrow[0]{}^* c_t \wedge c_t \xrightarrow[0]{}^* t, s \xrightarrow[0]{}^* c_s \wedge c_s \xrightarrow[0]{}^* s$  となる定数とおく．
  3. 定義 1 で与えた手続きに基づき  $\mathcal{R}_\infty, J_\infty$  を構成する．
  4.  $c_t \rightarrow c_s \in \mathcal{R}_\infty$  なら TRUE，そうでないならば FALSE を出力する．

定理 1 右基底項書き換えシステムの到達可能性判定手続きは実効的かつ停止する．

証明 手続きの 1. については停止性は明らか．2. については補題 1 より  $\mathcal{R}_0$  は実効的に構成可能なため  $\mathcal{R}_0$  の構成手続きは停止する．また  $\mathcal{T}^{\leq 1}$  は有限であるため  $J_0$  の構成手続きも停止する．3. については補題 5 より  $\mathcal{R}_\infty, J_\infty$  は実効的に構成可能なので構成手続きは停止する．4. については補題 5 より  $\mathcal{R}_\infty$  は有限集合なので  $c_t \rightarrow c_s \in \mathcal{R}_\infty$  かどうかの判定判定手続きは停止する．よって右基底項書き換えシステムの到達可能性判定手続きは停止する．なお，この手続きが実効的であることは補題 1, 5 等より明らか．  $\square$

## 4 閉包操作に基づく到達可能性判定手続きの正当性

この節では閉包操作に基づく到達可能性判定手続きの正当性の証明を行う．まず  $\mathcal{R}$  と  $\mathcal{R}_0$  の関係について考察し， $t \rightarrow t, s \rightarrow s \in \mathcal{R}$  なる基底項  $t, s$  について， $c_t, c_s$  を補題 2 より得られる  $c_t \xrightarrow[0]{}^* t, t \xrightarrow[0]{}^* c_t, c_s \xrightarrow[0]{}^* s, s \xrightarrow[0]{}^* c_s$  となる定数とすると， $t \xrightarrow[\mathcal{R}]{}^* s \iff c_t \xrightarrow[0]{}^* c_s$  が成立することを示す．次に  $\mathcal{R}_\infty$  と  $J_\infty$  の性質を示し，それをもちいて  $\mathcal{R}_i$  と  $\mathcal{R}_0$  の関係について考察する．最後にこれらから  $t \xrightarrow[\mathcal{R}]{}^* s \iff c_t \xrightarrow[0]{}^* c_s \iff c_t \rightarrow c_s \in \mathcal{R}_\infty$  を示し，手続きの正当性を証明する．

### 4.1 定数化された項書き換えシステムの性質

以下では  $\mathcal{R}$  と  $\mathcal{R}_0$  の関係について考察する．まず，定数化変換  $\Phi_u^c$  の性質を示し，次に逆変換  $(\Phi_u^c)^{-1}$  の性質を示す．最後に，定数化変換で導入された定数を含まない項上で  $\xrightarrow[\mathcal{R}]{}^*$  と  $\xrightarrow[\mathcal{R}_0]{}^*$  が等価となることを示す．



補題 6  $U = \{c \rightarrow u, u \rightarrow c\}$  とする . このとき ,  $\Phi_u^c(s) \xrightarrow{U^*} s$  かつ  $s \xrightarrow{U^*} \Phi_u^c(s)$  .

証明  $\Phi_u^c$  の定義から明らか . □

補題 7  $S$  を項書き換えシステム ,  $U = \{c \rightarrow u, u \rightarrow c\}$  とする .  $S' = \Phi_u^c(S)$  とするとき ,  $s \xrightarrow{S} t$  ならば  $s \xrightarrow{S' \cup U}^* t$  が成立する .

証明  $l \rightarrow r \in S$  ならば  $l \xrightarrow{S' \cup U}^* r$  となることを示し , それをもちいて題意を示す .

$l \rightarrow r \in S$  と仮定すると , 定義より ,  $\Phi_u^c(l) \rightarrow \Phi_u^c(r) \in S'$  . 補題 6 より ,  $l \xrightarrow{U^*} \Phi_u^c(l)$  ,  $\Phi_u^c(r) \xrightarrow{U^*} r$  なので ,  $l \xrightarrow{U^*} \Phi_u^c(l) \xrightarrow{S'} \Phi_u^c(r) \xrightarrow{U^*} r$  . よって ,  $l \xrightarrow{S' \cup U}^* r$  . 次に ,  $s \xrightarrow{S} t$  とする . このとき , ある文脈  $C$  , 代入  $\theta$  ,  $l \rightarrow r \in S$  について ,  $s = C[l\theta] \xrightarrow{S} C[r\theta] = t$  .  $l \rightarrow r \in S$  ならば  $l \xrightarrow{S' \cup U}^* r$  が成立するため  $s = C[l\theta] \xrightarrow{S' \cup U}^* C[r\theta] = t$  . □

次に ,  $\Phi_u^c$  の逆変換  $(\Phi_u^c)^{-1}$  を定義し , その性質を示す .  $u$  を基底項 ,  $c$  を定数とすると ,  $(\Phi_u^c)^{-1}(s)$  を項  $s$  に現れるすべての定数  $c$  を  $u$  に置き換えた項を表す . また , 文脈  $C$  や代入  $\theta$  に対する  $(\Phi_u^c)^{-1}$  を以下のように定義する .

$$\begin{aligned} (\Phi_u^c)^{-1}(C) &= (\Phi_u^c)^{-1}(C[\square]) \\ (\Phi_u^c)^{-1}(\theta) &= \{x \mapsto (\Phi_u^c)^{-1}(t) \mid x \mapsto t \in \theta\} \end{aligned}$$

補題 8  $C$  ,  $\theta$  をそれぞれ任意の文脈 , 代入としたとき , 以下が成立する .

- (1)  $(\Phi_u^c)^{-1}(C[s\theta]) = (\Phi_u^c)^{-1}(C)[(\Phi_u^c)^{-1}(s)(\Phi_u^c)^{-1}(\theta)]$  .
- (2)  $c$  を  $s$  に出現しない定数とすると ,  $(\Phi_u^c)^{-1}(\Phi_u^c(s)) = s$  .
- (3)  $c$  を  $s$  に出現しない定数とすると ,  $(\Phi_u^c)^{-1}(s) = s$  .

証明 (1)  $(\Phi_u^c)^{-1}$  の定義から明らか .

(2) 仮定および  $(\Phi_u^c)^{-1}$  の定義から明らか .

(3)  $(\Phi_u^c)^{-1}$  の定義から明らか . □

補題 9  $S$  を項書き換えシステム ,  $c$  を基底項  $u$  および任意の  $S$  の書き換え規則に出現しない定数とする . また ,  $U = \{c \rightarrow u, u \rightarrow c\}$  ,  $S' = \Phi_u^c(S)$  とおく . このとき , 以下が成立する .

- (1)  $l' \rightarrow r' \in U$  ならば  $(\Phi_u^c)^{-1}(l') = (\Phi_u^c)^{-1}(r')$  .
- (2)  $l' \rightarrow r' \in S'$  ならば  $(\Phi_u^c)^{-1}(l') \rightarrow (\Phi_u^c)^{-1}(r') \in S$  .
- (3)  $s \xrightarrow{S' \cup U} t$  ならば  $(\Phi_u^c)^{-1}(s) \xrightarrow{S}^* (\Phi_u^c)^{-1}(t)$  .

証明 (1)  $(\Phi_u^c)^{-1}$  の定義から  $(\Phi_u^c)^{-1}(c) = u$  . また ,  $c$  が  $u$  に出現しないことから  $(\Phi_u^c)^{-1}(u) = u$  . よって成立する .

(2)  $l' \rightarrow r' \in S'$  とする .  $S' = \Phi_u^c(S)$  から , ある  $l \rightarrow r \in S$  が存在して ,  $l' = \Phi_u^c(l)$  ,  $r' = \Phi_u^c(r)$  . 仮定から  $c$  は  $l$  にも  $r$  にも出現しないので , 補題 8 の (2) より , 以下が成立する .  $(\Phi_u^c)^{-1}(l') = (\Phi_u^c)^{-1}(\Phi_u^c(l)) = l$  ,  $(\Phi_u^c)^{-1}(r') = (\Phi_u^c)^{-1}(\Phi_u^c(r)) = r$  .

(3)  $s \xrightarrow{S' \cup U} t$  とする . このとき , ある文脈  $C$  , 代入  $\theta$  ,  $l' \rightarrow r' \in S' \cup U$  が存在して ,  $s = C[l'\theta]$  かつ  $t = C[r'\theta]$  . 補題 8 の (1) および (1),(2) から , 以下が成立する .  $(\Phi_u^c)^{-1}(s) = (\Phi_u^c)^{-1}(C[l'\theta]) = (\Phi_u^c)^{-1}(C)[(\Phi_u^c)^{-1}(l')(\Phi_u^c)^{-1}(\theta)] \xrightarrow{S}^* (\Phi_u^c)^{-1}(C)[(\Phi_u^c)^{-1}(r')(\Phi_u^c)^{-1}(\theta)] = (\Phi_u^c)^{-1}(C[r'\theta]) = (\Phi_u^c)^{-1}(t)$  . □

以上の結果をもちいて ,  $\mathcal{R}$  と  $\mathcal{R}_0$  の関係について示す .

補題 10  $\mathcal{R}$  の関数記号を  $\mathcal{G}$  とする . 任意の基底項  $s, t \in \mathcal{T}(\mathcal{G})$  について ,  $s \xrightarrow{\mathcal{R}}^* t \iff s \xrightarrow{0}^* t$  .

証明 (⇒)  $\mathcal{R}_0$  の定義から, 任意の  $i \geq 0$  について,  $s \xrightarrow{\mathcal{R}} t$  ならば  $s \xrightarrow{S_i}^* t$  となることを示せば十分.  $i$  に関する帰納法で証明する.

(B.S.)  $i = 0$  のとき,  $S_0 = \mathcal{R}$  から自明.

(I.S.)  $s \xrightarrow{\mathcal{R}} t$  とする. このとき, 帰納法の仮定から,  $s \xrightarrow{S_{i-1}}^* t$ . また, 補題 7 から, 任意の  $v, w$  について,  $v \xrightarrow{S_{i-1}} w$  ならば  $v \xrightarrow{S_i}^* w$  が成立する. よって,  $s \xrightarrow{S_i}^* t$ .

(⇐)  $\mathcal{R}_0$  の定義から, 任意の  $i \geq 0$  について,  $s \xrightarrow{S_i} t$  ならば  $s \xrightarrow{\mathcal{R}} t$  となることを示せば十分.  $i$  に関する帰納法で証明する.

(B.S.)  $i = 0$  のとき,  $S_0 = \mathcal{R}$  から自明.

(I.S.)  $s \xrightarrow{S_i} t, S_i = \Phi_{f(c_1, \dots, c_n)}^c(S_{i-1}) \cup \{c \rightarrow f(c_1, \dots, c_n), f(c_1, \dots, c_n) \rightarrow c\}$  とする. このとき, 定義から  $c$  は  $f(c_1, \dots, c_n)$  および  $S_{i-1}$  に出現しない定数なので, 補題 9 の (3) より,  $(\Phi_u^c)^{-1}(s) \xrightarrow{S_{i-1}}^*$

$(\Phi_u^c)^{-1}(t)$  が成立する. また,  $s, t \in \mathcal{T}(\mathcal{G})$  より,  $c$  は  $s, t$  に出現しない. よって, 補題 8 の (3) より,  $(\Phi_u^c)^{-1}(s) = s, (\Phi_u^c)^{-1}(t) = t$ . よって,  $s \xrightarrow{S_{i-1}}^* t$ . 従って, 帰納法の仮定より,  $s \xrightarrow{\mathcal{R}}^* t$  となる.  $\square$

以下の補題を判定手続きの正当性の証明にもちいる.

補題 11  $t \rightarrow t, s \rightarrow s \in \mathcal{R}$  なる基底項  $t, s$  について,  $c_t, c_s$  を補題 2 より得られる  $c_t \xrightarrow{0}^* t, t \xrightarrow{0}^* c_t, c_s \xrightarrow{0}^* s, s \xrightarrow{0}^* c_s$  となる定数とすると, 以下が成立する.

$$t \xrightarrow{\mathcal{R}}^* s \iff c_t \xrightarrow{0}^* c_s$$

証明 (⇒) 仮定から  $c_t \xrightarrow{0}^* t \xrightarrow{\mathcal{R}}^* s \xrightarrow{0}^* c_s$ . 補題 10 から,  $c_t \xrightarrow{0}^* t \xrightarrow{0}^* s \xrightarrow{0}^* c_s$  より  $c_t \xrightarrow{0}^* c_s$ .

(⇐) 仮定から  $t \xrightarrow{0}^* c_t \xrightarrow{0}^* c_s \xrightarrow{0}^* s$  より  $t \xrightarrow{0}^* s$ . よって補題 10 から  $t \xrightarrow{\mathcal{R}}^* s$ .  $\square$

## 4.2 判定手続きの正当性

以下では, 最初に  $\mathcal{R}_\infty, J_\infty$  の性質を示し, 次に, 書き換え  $\xrightarrow{\infty}$  の性質を示す. 最後に, 3つの命題  $A(k), B(k), C(k)$  をもちいた主補題を与え, 判定手続きの正当性を示す.

補題 12  $\mathcal{R}_\infty, J_\infty$  に対して以下が成立する.

(1)  $a \xrightarrow{\infty} f(b_1, \dots, b_n)$  かつ  $\langle \dots, f(b_1, \dots, b_n), \dots \rangle_\infty$  ならば  $\langle \dots, a, \dots \rangle_\infty$ .

(2)  $\langle a_{m1}, \dots, a_{mw} \rangle_\infty$  ( $m = 1, \dots, n$ ) かつ  $\text{arity}(f) = n$  ならば  $\langle f(a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, f(a_{1w}, \dots, a_{nw}) \rangle_\infty$ .

(3)  $a \xrightarrow{\infty} b \xrightarrow{\infty} s \in S$  ならば  $a \xrightarrow{\infty} s$ .

(4)  $a \xrightarrow{\infty} f(a_1, \dots, a_n)$  かつ  $a_m \xrightarrow{\infty} b_m \vee a_m = b_m$  ( $m = 1, \dots, n$ ) ならば  $a \xrightarrow{\infty} f(b_1, \dots, b_n)$ .

(5)  $a \xrightarrow{\infty}^* l^L \sigma$  かつ  $l \xrightarrow{\infty} b$  かつ任意の  $x \in \mathcal{V}_{NL}(l)$  について  $\langle \{\sigma(l^L|_p) \mid l|_p = x\} \rangle_\infty$  ならば  $a \xrightarrow{\infty} b$ .

証明 (1)  $a \xrightarrow{\infty} f(b_1, \dots, b_n) \wedge \langle \dots, f(b_1, \dots, b_n), \dots \rangle_\infty$  なので  $\exists i, j. a \xrightarrow{i} f(b_1, \dots, b_n) \wedge \langle \dots, f(b_1, \dots, b_n), \dots \rangle_j$ .  $m = \max(i, j)$  とすると, ステップ 1 の (1) の定義より  $\langle \dots, a, \dots \rangle_{m+1}$ .  $J_{m+1} \subseteq J_\infty$  より  $\langle \dots, a, \dots \rangle_\infty$ .

(2)  $\langle a_{11}, \dots, a_{1w} \rangle_\infty \wedge \dots \wedge \langle a_{n1}, \dots, a_{nw} \rangle_\infty$  より  $\exists i_1, \dots, i_n. \langle a_{11}, \dots, a_{1w} \rangle_{i_1} \wedge \dots \wedge \langle a_{n1}, \dots, a_{nw} \rangle_{i_n}$ .  $m = \max(i_1, \dots, i_n)$  とすると, ステップ 1 の (2) の定義より  $\langle f(a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, f(a_{1w}, \dots, a_{nw}) \rangle_{m+1}$ .  $J_{m+1} \subseteq J_\infty$  より  $\langle f(a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, f(a_{1w}, \dots, a_{nw}) \rangle_\infty$ .

(3)  $a \xrightarrow{\infty} b \xrightarrow{\infty} s$  より  $\exists i, j. a \xrightarrow{i} b \xrightarrow{j} s$ .  $m = \max(i, j)$  とすると,  $s \in \mathcal{F}_0$  ならステップ 2 の (3) の

定義より,  $s \notin \mathcal{F}_0$  ならステップ 2 の (4) の定義より,  $a \xrightarrow[m+1]{\infty} s \cdot \mathcal{R}_{m+1} \subseteq \mathcal{R}_\infty$  より  $a \xrightarrow{\infty} s$ .

(4)  $a \xrightarrow{\infty} f(a_1, \dots, a_n) \wedge (a_1 \xrightarrow{\infty} b_1 \vee a_1 = b_1)$  から  $a_1 = b_1$  のとき  $a \xrightarrow{\infty} f(b_1, a_2, \dots, a_n) \cdot a_1 \neq b_1$  のとき  $\exists i, j. a \xrightarrow{i} f(a_1, \dots, a_n) \wedge a_1 \xrightarrow{j} b_1$ .  $m = \max(i, j)$  とすると, ステップ 2 の (6) の定義より,  $a \xrightarrow[m+1]{\infty} f(b_1, a_2, \dots, a_n) \cdot \mathcal{R}_{m+1} \subseteq \mathcal{R}_\infty$  より  $a \xrightarrow{\infty} f(b_1, a_2, \dots, a_n) \cdot a \xrightarrow{\infty} f(b_1, a_2, \dots, a_n) \wedge (a_2 \xrightarrow{\infty} b_2 \vee a_2 = b_2)$  から同様に  $a \xrightarrow{\infty} f(b_1, b_2, a_3, \dots, a_n)$ . 以降,  $a \xrightarrow{\infty} f(b_1, b_2, a_3, \dots, a_n) \wedge (a_3 \xrightarrow{\infty} b_3 \vee a_3 = b_3) \wedge \dots \wedge (a_n \xrightarrow{\infty} b_n \vee a_n = b_n)$  に対しても同様な操作を繰り返して  $a \xrightarrow{\infty} f(b_1, \dots, b_n)$  が得られる.

(5)  $\mathcal{V}_{NL}(l) = \{x_1, \dots, x_n\}$  としたとき  $\exists i, j, k_1, \dots, k_n. a \xrightarrow{i} *l^L \sigma \wedge l \xrightarrow{j} b \wedge \{\{\sigma(l^L|_p) \mid l|_p = x_1\}\}_{k_1} \wedge \dots \wedge \{\{\sigma(l^L|_p) \mid l|_p = x_n\}\}_{k_n}$  が成り立つ.  $m = \max(i, j, k_1, \dots, k_n)$  とすると, ステップ 2 の (7) の定義より  $a \xrightarrow[m+1]{\infty} b \cdot \mathcal{R}_{m+1} \subseteq \mathcal{R}_\infty$  より  $a \xrightarrow{\infty} b$ .  $\square$

$\mathcal{R}_i^<(\mathcal{R}_\infty^<)$  と  $J_i(J_\infty)$  の関係について以下の補題を示す.

補題 13 任意の  $s_1, \dots, s_w \in \mathcal{T}^{\leq 1}$  と  $i \geq 0$  について  $\langle s_1, \dots, s_w \rangle_i \Rightarrow \{s_1, \dots, s_w\} \downarrow_i^<$  が成立する.

証明  $i$  に関する帰納法で示す.

(B.S.)  $i = 0$  のとき,  $J_0$  の定義より自明.

(I.S.)(i)  $\langle s_1, \dots, s_w \rangle \in J_{i-1}$  のとき, 帰納法の仮定より成り立つ.

(ii)  $\langle s_1, \dots, s_w \rangle \notin J_{i-1}$  のとき.

(ii-a)  $\langle s_1, \dots, s_w \rangle$  がステップ 1 の (1) の要素に含まれているとき.

$\langle s_1, \dots, s_w \rangle_i = \langle s_1, \dots, a, \dots, s_w \rangle_i$  として  $a \xrightarrow[i-1]{\infty} f(b_1, \dots, b_n)$ ,  $\langle s_1, \dots, f(b_1, \dots, b_n), \dots, s_w \rangle_{i-1}$  が

成立する. 帰納法の仮定より,  $\{s_1, \dots, f(b_1, \dots, b_n), \dots, s_w\} \downarrow_{i-1}^< \cdot a \xrightarrow[i-1]{\infty} f(b_1, \dots, b_n)$  なので,

$\{s_1, \dots, a, \dots, s_w\} \downarrow_{i-1}^< \cdot \mathcal{R}_{i-1} \subseteq \mathcal{R}_i$  なので  $\{s_1, \dots, a, \dots, s_w\} \downarrow_i^<$ .

(ii-b)  $\langle s_1, \dots, s_w \rangle$  がステップ 1 の (2) の要素に含まれているとき.

$s_1 = f(a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, s_w = f(a_{1w}, \dots, a_{nw})$  として  $\langle a_{11}, \dots, a_{1w} \rangle_{i-1}, \dots, \langle a_{n1}, \dots, a_{nw} \rangle_{i-1}$  が成立する. 帰納法の仮定より,  $\{a_{11}, \dots, a_{1w}\} \downarrow_{i-1}^<, \dots, \{a_{n1}, \dots, a_{nw}\} \downarrow_{i-1}^<$ . したがって,  $\{s_1, \dots, s_w\} \downarrow_{i-1}^< \cdot \mathcal{R}_{i-1} \subseteq \mathcal{R}_i$  なので  $\{s_1, \dots, s_w\} \downarrow_i^<$ .  $\square$

補題 14 任意の  $s_1, \dots, s_m \in \mathcal{T}^{\leq 1}$  ( $m \leq w$ ) について  $\langle \{s_1, \dots, s_m\} \rangle_\infty \Leftrightarrow \{s_1, \dots, s_m\} \downarrow_\infty^<$  が成立する.

証明 ( $\Rightarrow$ )  $\langle \{s_1, \dots, s_m\} \rangle_\infty \Leftrightarrow \exists i \geq 0. \langle \{s_1, \dots, s_m\} \rangle_i$  が成立する. ここで  $\langle \{s_1, \dots, s_m\} \rangle_i = \langle s_1, \dots, s_m, s_{m+1}, \dots, s_w \rangle_i \wedge (s_m = s_{m+1} = \dots = s_w)$ . よって補題 13 より  $\exists i \geq 0. \{s_1, \dots, s_m\} \downarrow_i^<$ . よって  $\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{R}_\infty$  より  $\{s_1, \dots, s_m\} \downarrow_\infty^<$ .

( $\Leftarrow$ )  $m \leq w$ ,  $s_m = s_{m+1} = \dots = s_w$  のとき  $\{s_1, \dots, s_m\} \downarrow_\infty^<$  ならば  $\{s_1, \dots, s_m, s_{m+1}, \dots, s_w\} \downarrow_\infty^<$ .

また,  $\langle s_1, \dots, s_m, s_{m+1}, \dots, s_w \rangle_\infty$  ならば  $\langle \{s_1, \dots, s_m\} \rangle_\infty$  が成立する. よって  $\forall s_1, \dots, s_w \in S.$

$\{s_1, \dots, s_w\} \downarrow_\infty^< \Rightarrow \langle s_1, \dots, s_w \rangle_\infty$  を示せば,  $\{s_1, \dots, s_m\} \downarrow_\infty^< \Rightarrow \langle \{s_1, \dots, s_m\} \rangle_\infty$  が導かれる.

$s_1, \dots, s_w \in \mathcal{T}^{\leq 1}$  とし,  $\exists u. s_1 \xrightarrow{\infty} *u, \dots, s_w \xrightarrow{\infty} *u$  と仮定する. このとき  $|s_1 \xrightarrow{\infty} *u| = k_1, \dots, |s_w \xrightarrow{\infty} *u| = k_w$  として  $\langle \sum k_p, \sum |s_p| \rangle$  の辞書式順序に関する帰納法で  $\langle s_1, \dots, s_w \rangle_\infty$  を示す.

(B.S.)  $\sum_{p=1}^w k_p = 0$  のときは  $s_1 = \dots = s_w = u$  より,  $\langle u, \dots, u \rangle \in J_0 \subseteq J_\infty$ .

(I.S.)(i)  $s_1 \xrightarrow{\infty} *u, \dots, s_w \xrightarrow{\infty} *u$  中に根位置での書き換えが存在するとき.

一般性を失うことなく  $s_1 \xrightarrow{\infty} *u$  中に根位置での書き換えが存在すると仮定する.  $\text{LHS}(\mathcal{R}_\infty^<) \subseteq \mathcal{F}_0$  より根位置の書き換え規則は  $a \rightarrow f(b_1, \dots, b_n)$  の形のみ可能なので  $s_1 \xrightarrow{\infty} *a \xrightarrow{\infty} f(b_1, \dots, b_n) \xrightarrow{\infty} *u$ .

ここで  $\mathcal{R}_\infty^<$  の定義と  $s_1 \xrightarrow{\infty} *a$  より  $s_1 = a$ . よって  $s_1 = a \xrightarrow{\infty} f(b_1, \dots, b_n) \xrightarrow{\infty} *u$  と表せる. ここで

$f(b_1, \dots, b_n) \in \mathcal{T}^{\leq 1}$  .よって  $(\sum_{p>1} k_p + (k_1 - 1)) < \sum k_p$  であることと  $\{f(b_1, \dots, b_n), s_2, \dots, s_w\} \downarrow_{\infty}^<$  から帰納法の仮定より  $\langle f(b_1, \dots, b_n), s_2, \dots, s_w \rangle_{\infty}$  なので, 補題 12 の (1) より  $\langle s_1, \dots, s_w \rangle_{\infty}$  .

(ii)  $s_1 \xrightarrow{\infty}^* u, \dots, s_w \xrightarrow{\infty}^* u$  中に根位置での書き換えが存在しないとき .

(ii - a)  $s_i = a \in \mathcal{F}_0$  となる  $i$  が存在するとき, 根位置の書き換えがないので  $s_i = a = u$  .  $s_p \xrightarrow{\infty}^* u$  より,  $\forall p \in \{1, \dots, w\}$ .  $s_p = u$  . よって  $\sum_{p=1}^w k_p = 0$  なので, (B.S.) に帰着される .

(ii - b)  $s_i = a \in \mathcal{F}_0$  となる  $i$  が存在しないとき .

$s_i = f(a_1, \dots, a_n), s_j = g(b_1, \dots, b_m), f \neq g$  とすると,  $s_i \xrightarrow{\infty}^* u$  より  $u = f(u_1, \dots, u_n)$  .

$s_j \xrightarrow{\infty}^* u$  より  $u = g(v_1, \dots, v_m)$  となり矛盾する . よって  $s_1 = f(a_{11}, \dots, a_{n1}), s_2 = f(a_{12}, \dots, a_{n2}),$

$\dots, s_w = f(a_{1w}, \dots, a_{nw}), u = f(u_1, \dots, u_n)$  と表せる . このとき  $\forall p \in \{1, \dots, w\}, \forall q \in \{1, \dots, n\}$ .

$a_{qp} \xrightarrow{\infty}^* u_q$  が成り立つ . ここで  $|a_{qp} \xrightarrow{\infty}^* u_q| = k'_{qp}$  とする .  $j \in \{1, \dots, n\}$  としたとき,  $a_{j1} \xrightarrow{\infty}^* u_j, \dots,$

$a_{jw} \xrightarrow{\infty}^* u_j$  より  $\{a_{j1}, \dots, a_{jw}\} \downarrow_{\infty}^<$  . ここで,  $\sum_{p=1}^w k_p = \sum_{p=1}^w \sum_{q=1}^n k'_{qp}$  より  $\sum_{p=1}^w k_p \geq \sum_{p=1}^w k'_{jp}$  .

また,  $\sum_{p=1}^w |s_p| > \sum_{p=1}^w |a_{jp}|$  より帰納法の仮定から  $\langle a_{j1}, \dots, a_{jw} \rangle_{\infty}$  . よって補題 12 の (2) より  $\langle s_1, \dots, s_w \rangle_{\infty}$  .  $\square$

$\mathcal{R}_i$  と  $\mathcal{R}_0$  の関係について示す . 以下では代入  $\theta$  は変数から基底項への写像とする .

補題 15 任意の  $i$  と  $(s, t) \in (\text{LHS}(\mathcal{R}_0) \times \mathcal{F}_0) \cup (\mathcal{F}_0 \times \mathcal{T}(\mathcal{F}))$  について  $(s \rightarrow t \in \mathcal{R}_i \vee s \xrightarrow{i}^* t) \Rightarrow s \xrightarrow{0}^* t$  が成立する .

証明  $i$  に関する帰納法で示す .

(B.S.)  $i = 0$  のとき, 自明 .

(I.S.)  $i > 0$  のとき .

(1)  $s \rightarrow t \in \mathcal{R}_i \Rightarrow s \xrightarrow{0}^* t$  を示す .

(i)  $s \rightarrow t \in \mathcal{R}_{i-1}$  のとき, 帰納法の仮定より  $s \xrightarrow{0}^* t$  なので成り立つ .

(ii)  $s \rightarrow t \notin \mathcal{R}_{i-1}$  のとき .

(ii - a)  $s \rightarrow t$  がステップ 2 の (3), (4), (5) の要素に含まれるとき .

$s \rightarrow s', s' \rightarrow t \in \mathcal{R}_{i-1}$  なる項  $s'$  が存在し, 帰納法の仮定より,  $s \xrightarrow{0}^* s' \xrightarrow{0}^* t$  となるので成り立つ .

(ii - b)  $s \rightarrow t$  がステップ 2 の (6) の要素に含まれるとき .

$t = f(b_1, \dots, c, \dots, b_n)$  としたとき  $s \rightarrow f(b_1, \dots, a, \dots, b_n), a \rightarrow c \in \mathcal{R}_{i-1}$  となる項  $f(b_1, \dots, a, \dots, b_n)$

が存在する . 帰納法の仮定より  $s \xrightarrow{0}^* f(b_1, \dots, a, \dots, b_n), a \xrightarrow{0}^* c$  . したがって  $s \xrightarrow{0}^* f(b_1, \dots, a, \dots, b_n) \xrightarrow{0}^* f(b_1, \dots, c, \dots, b_n) = t$  より成り立つ .

(ii - c)  $s \rightarrow t$  がステップ 2 の (7) の要素に含まれるとき .

$s, t \in \mathcal{F}_0$  かつ  $s \xrightarrow{i-1}^* l^L \sigma, l \rightarrow t \in \mathcal{R}_{i-1}$  となる  $l^L \sigma$  が存在し,  $\forall x \in \mathcal{V}_{NL}(l). \langle \{\sigma(l^L|_p) \mid l|_p = x\} \rangle_{i-1}$  .

補題 13 より  $\forall x \in \mathcal{V}_{NL}(l). \exists u_x. \forall p \in \{p \mid l|_p = x\}. [\sigma(l^L|_p) \xrightarrow{i-1}^* u_x]. \sigma(l^L|_p) \in \mathcal{F}_0$  に注意

すると, 帰納法の仮定より  $\forall x \in \mathcal{V}_{NL}(l). \exists u_x. \forall p \in \{p \mid l|_p = x\}. [\sigma(l^L|_p) \xrightarrow{0}^* u_x]$  . よって

$\theta = \{x \mapsto u_x \mid x \in \mathcal{V}_{NL}(l)\}$  とすると  $l^L \sigma \xrightarrow{0}^* l \theta$  . よって  $s \xrightarrow{i-1}^* l^L \sigma, l \rightarrow t \in \mathcal{R}_{i-1}$  から帰納法の仮

定より  $s \xrightarrow{0}^* l^L \sigma, l \xrightarrow{0}^* t$  . したがって  $s \xrightarrow{0}^* l^L \sigma \xrightarrow{0}^* l \theta \xrightarrow{0}^* t$  より成り立つ .

(2)  $s \xrightarrow{i}^* t \Rightarrow s \xrightarrow{0}^* t$  を  $|s \xrightarrow{i}^* t| = k$  として  $k$  に関する帰納法で示す .

(B.S.)(i)  $k = 0$  のとき,  $s = t$  より自明 .

(ii)  $k = 1$  のとき,  $s \in \mathcal{F}_0$  となるので  $s \rightarrow t \in \mathcal{R}_i^<$  であり, (1) より成立する .

(I.S.)  $k \geq 2$  のとき,  $s \in \mathcal{F}_0$  に注意すると,  $\mathcal{R}_i^<$  の性質より,  $s \xrightarrow{i}^* f(a_1, \dots, a_n) \xrightarrow{i}^* f(u_1, \dots, u_n) =$

$t$  と表せる . ここで  $\forall j. a_j \xrightarrow{i}^* u_j$  であり,  $\forall j. |a_j \xrightarrow{i}^* u_j| < k$  なので帰納法の仮定から  $\forall j. a_j \xrightarrow{0}^* u_j$  .

よって  $f(a_1, \dots, a_n) \xrightarrow{0}^* f(u_1, \dots, u_n)$  . また,  $k \geq 2$  より  $|s \xrightarrow{i} f(a_1, \dots, a_n)| < k$  なので, 帰納法の仮定から  $s \xrightarrow{0}^* f(a_1, \dots, a_n)$  . したがって,  $s \xrightarrow{0}^* f(a_1, \dots, a_n) \xrightarrow{0}^* f(u_1, \dots, u_n) = t$  より成り立つ .  $\square$

最後に, 以上の準備をもちいて正当性証明の主補題を与える . このために  $k$  を自然数として, 以下の命題  $A(k), B(k), C(k)$  を考える .

$$\begin{aligned} A(k) &\stackrel{\text{def}}{\iff} \delta : a \xrightarrow{0}^* b \wedge |\delta| \leq k \Rightarrow a = b \vee a \xrightarrow{\infty} b \\ B(k) &\stackrel{\text{def}}{\iff} \delta : a \xrightarrow{0}^* s \notin \mathcal{F}_0 \wedge |\delta| \leq k \Rightarrow \xi : a \xrightarrow{\infty}^* s \wedge |\xi| \leq |\delta| \\ C(k) &\stackrel{\text{def}}{\iff} \delta : \{c_1, \dots, c_n\} \downarrow_0 \wedge |\delta| \leq k \Rightarrow (\exists a. ((c_1 = a \vee c_1 \xrightarrow{\infty} a) \wedge \dots \wedge (c_n = a \vee c_n \xrightarrow{\infty} a)) \\ &\quad \vee (\xi : \{c_1, \dots, c_n\} \downarrow_{\infty} \wedge |\xi| \leq |\delta|)) \end{aligned}$$

**補題 16** 任意の  $k$  について  $A(k) \wedge B(k) \wedge C(k)$  が成立する .

**証明**  $k$  に関する帰納法で

$A(k) \wedge (A(k) \Rightarrow B(k)) \wedge (A(k) \wedge B(k) \Rightarrow C(k))$  を示す . 帰納法の仮定より,  $k' < k$  について  $A(k'), A(k') \Rightarrow B(k'), A(k') \wedge B(k') \Rightarrow C(k')$  が成り立つと仮定する . このとき,  $A(k'), B(k'), C(k')$  が成り立つことに注意する .

1.  $A(k)$  を示す .  $a \xrightarrow{0}^* b$  と仮定する .  $a \xrightarrow{0}^* b$  の形で以下の4通りに場合分けする .

(i)  $a = b$  のとき, 自明 .

(ii)  $a \xrightarrow{0} b$  のとき,  $\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}_{\infty}$  より  $a \xrightarrow{\infty} b$  .

(iii)  $|a \xrightarrow{0}^* b| \geq 2$  かつ  $a \xrightarrow{0}^+ c \xrightarrow{0}^+ b$  なる定数  $c$  が存在するとき .

$|a \xrightarrow{0}^+ c|, |c \xrightarrow{0}^+ b| < \delta$  なので帰納法の仮定より  $a \xrightarrow{\infty} c \xrightarrow{\infty} b$  なので補題 12 の (3) より  $a \xrightarrow{\infty} b$  .

(iv)  $|a \xrightarrow{0}^* b| \geq 2$  かつ  $a \xrightarrow{0}^+ c \xrightarrow{0}^+ b$  なる定数  $c$  が存在しないとき .

このとき,  $\exists l \rightarrow b \in \mathcal{R}_0$ .  $a \xrightarrow{0}^+ l \theta \xrightarrow{0} b$  と表せる .  $|a \xrightarrow{0}^+ l \theta| < \delta$  なので,  $B(k)$  の帰納法の仮定より

$(a \xrightarrow{\infty}^* l \theta) \wedge (|a \xrightarrow{0}^* l \theta| \geq |a \xrightarrow{\infty}^* l \theta|)$ ,  $\mathcal{R}^<$  の性質から,  $a \xrightarrow{\infty}^* l^L \sigma \xrightarrow{\infty}^* l \theta \wedge \forall x \in \mathcal{V}_{NL}(l). \{\sigma(l^L|_p) \mid l|_p = x\} \downarrow_{\infty}$  . 補題 14 より,  $\forall x \in \mathcal{V}_{NL}(l). \{\sigma(l^L|_p) \mid l|_p = x\}_{\infty}$  . これらと  $l \rightarrow b \in \mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}_{\infty}$  および補題 12 の (5) より  $a \xrightarrow{\infty} b$  .

2.  $A(k) \Rightarrow B(k)$  を示す .  $a \xrightarrow{0}^* s \notin \mathcal{F}_0$  と仮定し,  $s = f(s_1, \dots, s_n)$  とする .  $a \xrightarrow{0}^* s$  の形で場合分けする .

(i)  $a \xrightarrow{0}^+ c \xrightarrow{0}^* s$  なる定数  $c$  が出現するとき .

一般性を失うことなく  $c$  を最後に出現する定数とおくと,  $a \xrightarrow{0}^+ c \xrightarrow{0} f(b_1, \dots, b_n) \xrightarrow{0}^* s$  と表せる .

$a \xrightarrow{0}^+ c$  について  $A(k)$  より  $a \xrightarrow{\infty} c$  . また,  $|c \xrightarrow{0}^* s| < \delta$  から, 帰納法の仮定より  $c \xrightarrow{\infty}^* s$  . よって

$\mathcal{R}^<$  の性質から  $c \xrightarrow{\infty} f(b_1, \dots, b_n) \xrightarrow{\infty}^* s$  . これより,  $a \xrightarrow{\infty} c \xrightarrow{\infty} f(b_1, \dots, b_n) \xrightarrow{\infty}^* s$  . 補題 12 の (3)

より  $a \xrightarrow{\infty} f(b_1, \dots, b_n) \xrightarrow{\infty}^* s$  .

(ii)  $a \xrightarrow{0}^+ c \xrightarrow{0}^* s$  なる定数  $c$  が出現しないとき .

$a \xrightarrow{0} f(a_1, \dots, a_n) \xrightarrow{0}^* f(s_1, \dots, s_n) = s$ ,  $a_1 \xrightarrow{0}^* s_1, \dots, a_n \xrightarrow{0}^* s_n$  と表せる .  $|a_1 \xrightarrow{0}^* s_1|, \dots, |a_n \xrightarrow{0}^* s_n| < \delta$  なので  $B(k)$  の帰納法の仮定および  $A(k)$  より  $m \in \{1, \dots, n\}$  に対して以下が成立する .

$$\begin{cases} s_m \in \mathcal{F}_0 \Rightarrow a_m = s_m \vee a_m \xrightarrow{\infty} s_m \\ s_m \notin \mathcal{F}_0 \Rightarrow a_m \xrightarrow{\infty}^* s_m \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} \tilde{a}_m = s_m & (s_m \in \mathcal{F}_0) \\ \tilde{a}_m = a_m & (s_m \notin \mathcal{F}_0) \end{cases}$$

とすると,  $a \xrightarrow[0]{\rightarrow} f(a_1, \dots, a_n) \xrightarrow[\infty]{\rightarrow^*} f(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) \xrightarrow[\infty]{\xrightarrow{>\lambda}}^* f(s_1, \dots, s_n)$  と表せる.  $\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}_\infty$  なので, 補題 12 の (4) より  $a \xrightarrow[0]{\rightarrow} f(a_1, \dots, a_n) \xrightarrow[\infty]{\rightarrow^*} f(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)$  から  $a \xrightarrow[\infty]{\rightarrow} f(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)$  が成り立つ. したがって,  $a \xrightarrow[\infty]{\xrightarrow{>\lambda}}^* f(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n) \xrightarrow[\infty]{\xrightarrow{>\lambda}}^* f(s_1, \dots, s_n)$  より  $a \xrightarrow[\infty]{\xrightarrow{>\lambda}}^* f(s_1, \dots, s_n)$  となる.

3.  $(A(k) \wedge B(k)) \Rightarrow C(k)$  を示す.  $\{c_1, \dots, c_n\} \downarrow_0$  と仮定すると,  $\exists s. c_1 \xrightarrow[0]{\rightarrow^*} s \wedge \dots \wedge c_n \xrightarrow[0]{\rightarrow^*} s$ .

(i)  $s \in \mathcal{F}_0$  のとき,  $A(k)$  より,  $\exists s \in \mathcal{F}_0. (c_1 = s \vee c_1 \xrightarrow[\infty]{\rightarrow} s) \wedge \dots \wedge (c_n = s \vee c_n \xrightarrow[\infty]{\rightarrow} s)$ . よって成り立つ.

(ii)  $s \notin \mathcal{F}_0$  のとき,  $B(k)$  より,  $c_1 \xrightarrow[\infty]{\xrightarrow{>\lambda}}^* s \wedge \dots \wedge c_n \xrightarrow[\infty]{\xrightarrow{>\lambda}}^* s \wedge \forall m. |c_m \xrightarrow[0]{\rightarrow^*} s| \geq |c_m \xrightarrow[\infty]{\xrightarrow{>\lambda}}^* s|$ .

したがって  $\{c_1, \dots, c_n\} \downarrow_\infty \wedge |\{c_1, \dots, c_n\} \downarrow_0| \geq |\{c_1, \dots, c_n\} \downarrow_\infty|$  より成り立つ.

1. 2. 3. より  $A(k) \wedge B(k) \wedge C(k)$  は成り立つ.  $\square$

**定理 2** 基底項  $t, s$  と右基底項書き換えシステム  $\mathcal{R}$  が与えられたとき,  $t \xrightarrow[\mathcal{R}]{\rightarrow^*} s$  は右基底項書き換えシステムの到達可能性判定手続き (手続き 2) で判定可能.

**証明**  $s = t$  のとき, 判定可能なのは明らかなので, 以下では一般性を失うことなく  $s \neq t$  である場合を考える.  $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \{t \rightarrow t, s \rightarrow s\}$ ,  $c_t, c_s$  を補題 2 より得られる  $t \xrightarrow[0]{\rightarrow^*} c_t \wedge c_t \xrightarrow[0]{\rightarrow^*} t, s \xrightarrow[0]{\rightarrow^*} c_s \wedge c_s \xrightarrow[0]{\rightarrow^*} s$  となる定数とすると, 補題 11 より  $t \xrightarrow[\hat{\mathcal{R}}]{\rightarrow^*} s \iff c_t \xrightarrow[0]{\rightarrow^*} c_s$ . また, 補題 15 より  $c_t \rightarrow c_s \in \mathcal{R}_\infty \Rightarrow c_t \xrightarrow[0]{\rightarrow^*} c_s$ , 補題 16 の性質  $A(k)$  より  $c_t \xrightarrow[0]{\rightarrow^*} c_s \wedge c_t \neq c_s \Rightarrow c_t \rightarrow c_s \in \mathcal{R}_\infty$ . したがって以下が成立する.

$$t \xrightarrow[\mathcal{R}]{\rightarrow^*} s \iff t \xrightarrow[\hat{\mathcal{R}}]{\rightarrow^*} s \iff c_t \xrightarrow[0]{\rightarrow^*} c_s \iff c_t \rightarrow c_s \in \mathcal{R}_\infty$$

ここで,  $c_t \rightarrow c_s \in \mathcal{R}_\infty$  は手続き 2 で判定可能.  $\square$

Godoy ら [4, 5] の研究においても閉包操作に基づく右基底項書き換えシステムの到達可能性判定法が提案されている. これらの手法は閉包操作の対象となる規則に特殊な書き換え規則である制約付き書き換え規則をもちいている. 一方, 本論文で提案した手続きにおける閉包操作は, 通常の書き換え規則のみをもちいている. なお, 基底項の定数化や, 書き換え規則のタイプ分けといった手法は共通している.

Godoy ら [4, 5] の手法の正当性の証明には, 簡約化順序や制約付き項書き換えシステム  $\mathcal{R}, S$  に基づく書き換え  $\xrightarrow[\mathcal{R}/S]{\rightarrow}$  が必要となるが, 本論文で提案した手続きの正当性の証明にはそのような概念を利用する必要はない.

### 4.3 判定手続きの計算量

右基底項書き換えシステムの到達可能性判定手続き (手続き 2) の計算量の評価を行った. 以下では, 項書き換えシステムのサイズを  $\|\mathcal{R}\| = \sum_{l \rightarrow r \in \mathcal{R}} (|l| + |r|)$  により定義する.

**定理 3** 書き換え規則の左辺のサイズの最大値を  $L$ , 関数記号の引数の最大値を  $p$ , 定数以外の関数記号の数を  $k$  とし,  $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \{t \rightarrow t, s \rightarrow s\}$  とすると, 到達可能性判定手続き (手続き 2) の時間計算量は  $O(\|\hat{\mathcal{R}}\|^{L * p + L + p^3 + 2 * p^2 + p + 4} * (k + 2)^{L + p^2 + 3 * p + 2} * (p + 5))$  である.

定理 3 より以下の系が成立する.

**系 1** 右基底項書き換えシステムにおける到達可能性判定問題は, 入力した項と項書き換えシステムのサイズに対する指数関数時間で判定可能.

系 2 右基底項書き換えシステムにおける到達可能性判定問題は，左辺のサイズおよび関数記号の引数の個数が定数以下となる場合，入力した項と項書き換えシステムのサイズに対する多項式時間で判定可能．

項書き換えシステムの到達可能性の判定可能性の計算量については既に以下のような結果が知られている．

命題 1 [2] 基底項書き換えシステムにおける到達可能性判定問題は，入力した項と項書き換えシステムのサイズに対する多項式時間で判定可能．

命題 2 [13] 左線形右基底項書き換えシステムにおける到達可能性判定問題は，関数記号の引数の個数が定数以下ならば，入力した項と項書き換えシステムのサイズに対する多項式時間で判定可能．

命題 3 [5] 右基底項書き換えシステムにおける到達可能性判定問題は，入力した項と項書き換えシステムのサイズ  $n$  に対する指数関数時間 ( $O(n^{n+1})$ ) で判定可能．

計算量の下界については以下のような結果が知られている．

命題 4 [5] 右基底項書き換えシステムの到達可能性判定問題は  $\mathcal{F}$  が固定でも指数時間困難．

命題 2 と比較して，系 2 では左辺のサイズが定数以下という制約はあるが，左非線形規則にも適用できるよう適用範囲が拡張されている．また， $\mathcal{F}$  を固定すれば関数記号の引数の個数は定数以下となるから，命題 4 より系 2 の左辺のサイズが定数以下という条件は除去できないことがわかる．

定理 3 は命題 3 とは異なる乗数パラメータをもちいているが，命題 4 より，指数関数時間より効率よくできないことがわかる．

## 5 実装と実験

提案した右基底項書き換えシステムの到達可能性判定手続き (定義 2) を SML/NJ により実装した (約 500 行) ．

例 4 以下の基底項  $t, s$ ，項書き換えシステム  $\mathcal{R}$  を与え， $t$  から  $s$  への到達可能性を到達可能性判定手続きをもちいて判定する．

$$\begin{aligned} t &= f(g(g(c)), f(g(c)), c) \\ s &= g(a) \\ \mathcal{R} &= \begin{cases} f(g(x), x) & \rightarrow g(a) \\ g(b) & \rightarrow f(g(c), b) \\ c & \rightarrow b \end{cases} \end{aligned}$$

到達可能性判定手続きの実行結果を図 1 に示す．ここで，reachable 関数は入力として基底項  $t$  と  $s$ ，項書き換えシステム  $\mathcal{R}$  を受け取り， $\mathcal{R}_0$  のサイズと  $\mathcal{R}_\infty$  のサイズおよび到達可能性判定結果 true か false を出力する．この結果より， $t$  から  $s$  へは  $\mathcal{R}$  で到達可能であることが判定できた．実際， $t = f(g(g(c)), f(g(c)), c) \xrightarrow{\mathcal{R}} f(g(g(b)), f(g(c)), c) \xrightarrow{\mathcal{R}} f(g(g(b)), f(g(c)), b) \xrightarrow{\mathcal{R}} f(g(f(g(c)), b), f(g(c)), b) \xrightarrow{\mathcal{R}} g(a) = s$  となるので，この判定結果は正しい (下線で書き換え位置を示す) ．

```

- IO.prterm t;
F(G(G(C)), F(G(C), C))val it = () : unit
- IO.prterm s;
G(A)val it = () : unit
- IO.prrules r;
[ F(G(x), x) -> G(A),
  G(B) -> F(G(C), B),
  C -> B ]
val it = () : unit
- reachable t s r;
size of R0 = 23
size of R_inf = 112
val it = true : bool

```

図 1. 到達可能性判定手続きの実行結果

例 5 正則言語  $L_i = \{(f \circ g^i)^+(a)\}$  に対して  $\bigcap_{i=0}^n L_i = \emptyset$  が成立するか否かを  $a \xrightarrow{\mathcal{R}^n}^* b$  が成立するか否かにより判定する右基底項書き換えシステム  $\mathcal{R}^n$  を考える .

$$\mathcal{R}^1 = \left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow h(q0, q1) \\ h(x, x) \rightarrow b \\ q0 \rightarrow f(a) \\ q0 \rightarrow f(q0) \\ q11 \rightarrow g(a) \\ q1 \rightarrow f(q11) \\ q11 \rightarrow g(q1) \end{array} \right. , \quad \mathcal{R}^2 = \left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow h(q0, h(q1, q2)) \\ h(x, h(x, x)) \rightarrow b \\ q0 \rightarrow f(a) \\ q0 \rightarrow f(q0) \\ q11 \rightarrow g(a) \\ q1 \rightarrow f(q11) \\ q11 \rightarrow g(q1) \\ \vdots \end{array} \right. \dots$$

また , 以下のような正則言語  $L'_i$  に対して  $L'_0 \cap L'_n = \emptyset$  が成立するか否かを  $a \xrightarrow{S^n}^* b$  が成立するか否かにより判定する右基底項書き換えシステム  $S^n$  を考える .

$$L'_i = \begin{cases} f^+(a) & (i = 0 \text{ のとき}) \\ (f \circ g^+)^i(a) & (i \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$S^1 = \left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow h(q0, q0') \\ h(x, x) \rightarrow b \\ q0 \rightarrow f(a) \\ q0 \rightarrow f(q0) \\ q0' \rightarrow f(q1') \\ q1' \rightarrow g(q1') \\ q1' \rightarrow g(q2') \\ q2' \rightarrow a \end{array} \right. , \quad S^2 = \left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow h(q0, q0') \\ h(x, x) \rightarrow b \\ q0 \rightarrow f(a) \\ q0 \rightarrow f(q0) \\ q0' \rightarrow f(q1') \\ q1' \rightarrow g(q1') \\ q1' \rightarrow g(q2') \\ q2' \rightarrow f(q3') \\ \vdots \end{array} \right. \dots$$

ここで ,  $\mathcal{R}^n$  は  $n$  が増大するとともに問題のサイズも左辺のサイズも増大する項書き換えシステムとなっており ,  $S^n$  は問題のサイズは増大するが , 左辺のサイズと関数記号の引数の数が 3 以下で抑えられる項書き換えシステムとなっている .

$\mathcal{R}^n$  と  $S^n$  の問題のサイズと実行時間の関係をグラフにしたものを図 2 に示す . 図 2 より ,  $\mathcal{R}^n$  で



は問題のサイズが増加するにつれ計算時間が指数関数的に増大している一方で、 $S^n$  では、計算時間の増加量がほぼ一定であることが確認できた。

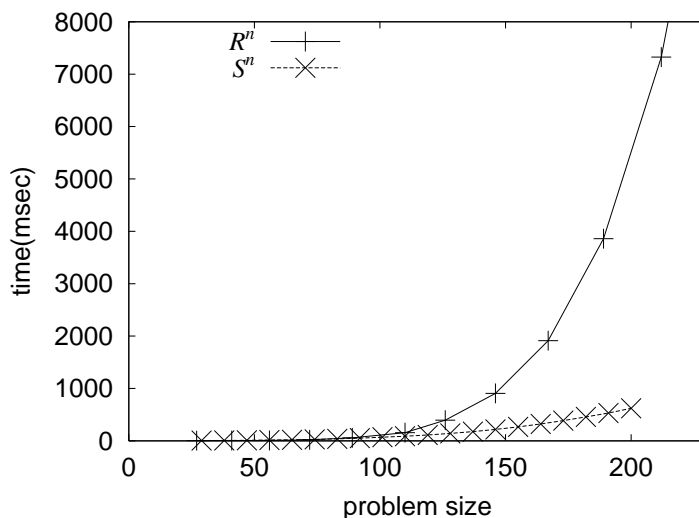


図 2. 実行時間の比較

## 6 まとめと今後の課題

本論文では、右基底項書き換えシステム  $\mathcal{R}$  のもとで基底項  $t$  から基底項  $s$  へ到達可能かどうかを判定する閉包操作手続きを提案した。この手続きは、まず  $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \{t \rightarrow t, s \rightarrow s\}$  から、右辺の基底項をすべて対応する定数に置き換えたような項書き換えシステム  $\mathcal{R}_0$  を構成して  $t, s$  を定数  $c_t, c_s$  へと置き換え、定数から定数への到達可能性判定問題へと帰着させる。そして、この  $\mathcal{R}_0$  に対して閉包操作を行うことで  $\mathcal{R}_\infty$  を構成し、到達可能性判定問題を  $c_t \rightarrow c_s \in \mathcal{R}_\infty$  か否かという問題に帰着させる。最後に  $c_t \rightarrow c_s \in \mathcal{R}_\infty$  を判定することにより、 $t \xrightarrow[\mathcal{R}]{}^* s$  を判定する。提案手法には制約付き書き換えを使用していない点で文献 [4, 5] の判定手法より簡明である。

次に、本論文で提案した到達可能性判定手続きの正当性を証明した。また、その計算量を評価し、入力した項と右基底項書き換えシステムのサイズに関する指数関数時間で判定が可能であることを示した。さらに、左辺の最大のサイズ、関数記号の引数の最大値が定数以下ならば、入力した項、項書き換えシステムのサイズに関する多項式時間で判定が可能であることを示した。また、この到達可能性判定手続きを実装し、実験をとおして手続きの実行可能性を確認するとともに計算時間の調査を行った。

より多くの実験をとおして到達可能性判定手続きの有効性を調査することは今後の課題である。また、右基底項書き換えシステムよりも一般的なクラス、例えば、 $l \rightarrow x (x \in \mathcal{V})$  となるような書き換え規則が含まれる項書き換えシステムなど、右辺に変数が出現する項書き換えシステムでも閉包操作に基づき到達可能性を判定できるよう手続きを改良することも残された課題である。

## 謝辞

本論文に大変貴重なコメントをいただきました査読者に深く感謝いたします。なお、本研究は一部日本学術振興会科学研究費 25330004, 25280025, 23500002 の補助を受けて行われた。

## 参考文献

- [1] Aoto, T., Yoshida, J. and Toyama, Y.: Proving confluence of term rewriting systems automatically, *In Proc. of 20th RTA*, LNCS 5595, pp. 93–102, 2009.
- [2] Comon, H., Godoy, G. and Nieuwenhuis, R.: The confluence of ground term rewrite systems is decidable in polynomial time, *In Proc. of 42nd FOCS*, pp. 298–307, 2001.
- [3] Durand, I. and Senizergues, G.: Bottom-up rewriting is inverse recognizability preserving, *In Proc. of 18th RTA*, LNCS 4533, pp. 107–121, 2007.
- [4] Godoy, G. and Tiwari, A.: Deciding fundamental properties of right-(ground or variable) rewrite systems by rewrite closure, *In Proc. of 2nd IJCAR*, LNAI 3097, pp. 91–106, 2004.
- [5] Godoy, G., Tiwari, A. and Verma, R.: Characterizing confluence by rewrite closure and right ground term rewrite systems, *In Proc. of 15th AAECC*, pp. 13–36, 2004.
- [6] Jacquemard, F.: Decidable approximations of term rewriting systems, *In Proc. of 7th RTA*, LNCS 1103, pp. 362–376, 1996.
- [7] Kaiser, L.: Confluence of right ground term rewriting systems is decidable, *In Proc. of 8th FOSSACS*, LNCS 3441, pp. 470–489, 2005.
- [8] Nagaya, T. and Toyama, Y.: Decidability for left-linear growing term rewriting systems, *Information and Computation* 178(2), pp. 499–514, 2002.
- [9] Oyamaguchi, M.: The Church-Rosser property for ground term-rewriting systems is decidable, *Theoretical Computer Science* 49, pp. 43–79, 1987.
- [10] Oyamaguchi, M.: The reachability and joinability problems for right-ground term-rewriting systems, *Journal of Information Processing* 13(3), pp. 347–354, 1990.
- [11] Plaisted, D.: Polynomial time termination and constraint satisfaction tests, *In Proc. of 5th RTA*, LNCS 690, pp. 405–420, 1993.
- [12] Takai, T., Kaji, Y. and Seki, H.: Right-linear finite path overlapping term rewriting systems effectively preserve recognizability, *In Proc. of 11th RTA*, LNCS 1833, pp. 246–260, 2000.
- [13] Tiwari, A.: Deciding confluence of certain term rewriting systems in polynomial time, *In Proc. of 17th IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pp. 447–456, 2002.
- [14] 富樫敦, 野口正一 : 項書き換え系に関する決定問題とその時間計算量, *電子通信学会論文誌*, Vol.J66-D No.10, pp. 1177–1184, 1983.