ボトムアップ書き換えに基づく最内書き換え到達可能性判定

高橋翔大[1]，青戸等人[1]，外山芳人[1]

[1] 東北大学 電気通信研究所
{takahasi,aoto,toyama}@nue.riec.tohoku.ac.jp

概 要　ボトムアップ書き換えに基づく項書き換えシステムの到達可能性判定法が Durand ら (2007) によって提案されている．本研究では，ボトムアップ項書き換えシステムのクラス (BU) を最内書き換えに変更した最内ボトムアップ項書き換えシステムのクラス (IBU) を提案し，IBU に含まれる項書き換えシステムの最内書き換え到達可能性が判定可能であることを示す．項書き換えシステムが IBU に属するか否かは一般には決定不能である．そこで，IBU の部分クラスである強最内ボトムアップ項書き換えシステムのクラス (SIBU) を提案し，項書き換えシステムが SIBU に属するか否かが決定可能であることを示す．

1　はじめに

項書き換えシステムの到達可能性は，リダクションの正規戦略や合流性の条件の判定などに広く利用される重要な性質であり，いくつかのクラス [8, 10, 11] に関しては木オートマトンによる到達可能性判定手続きが知られている．しかし，これらは書き換え規則に出現する変数の深さを制限するなど，書き換えシステムになんらかの構文的な制限をもうけている．例えば，成長項書き換えシステム [8, 10] では左辺に出現する変数の深さは高々1である．有界経路重なり項書き換えシステム [11] では書き換え規則を節点とする重み付けしたグラフの構造に制限をもうけている．一方，書き換え規則の構文ではなく書き換え系列に制限をもうけた到達可能性判定法として，近年，ボトムアップ書き換え [4, 5] をもちいる手法が提案されている．ボトムアップ書き換えでは内側から優先して書き換えていくことで到達可能性の判定を可能としている．

最も内側のリデックスを書き換える最内書き換えは，プログラミング言語で使われる値呼び評価に対応している．最内書き換えの到達可能性については，書き換えシステムになんらかの構文的な制限をもうけたクラス [6, 9] について研究されている．しかし，書き換え系列に制限をもうけたクラスについてはあまり研究されていない．

本論文では，ボトムアップ項書き換えシステムの概念を最内書き換えに適用した最内ボトムアップ項書き換えシステムを提案する．そして，最内ボトムアップ項書き換えシステムの最内書き換えの到達可能性が判定できること示す．次に，最内ボトムアップ項書き換えシステムの決定可能な部分クラスである強最内ボトムアップ項書き換えシステムを提案し，項書き換えシステムが強最内ボトムアップ項書き換えシステムであることが決定可能であることを示す．

本論文の構成は以下の通りである．第 2 節では，項書き換えシステムと木オートマトンの基本的な定義について説明する．第 3 節では，最内ボトムアップ項書き換えシステムについて提案し，第 4 節では，最内ボトムアップ項書き換えシステムの到達可能性判定法を示す．第 5 節では，強最内ボトムアップ項書き換えシステムを導入する．第 6 節では，既存の最内書き換えの到達可能性に関する研究との比較を行う．第 7 節は，本論文のまとめである．

2　準備

ここでは，本論文でもちいる項書き換えシステムの記法 [1] と木オートマトン [2, 7] について説明する．関数記号の集合を $\mathcal{F} = \{f, g, h, \ldots\}$，変数集合を $\mathcal{V} = \{x, y, z, \ldots\}$，項の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$，基底項の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ と表す．項 t に出現する変数の集合を $Var(t)$ と記す．項 t に 2 回以上出現する変数がないとき t を線形とよぶ．項 t に変数が出現しないとき t を基底項とよぶ．項 t の部分項の位置は正整数の列で表し，項 t の位置集合を $Pos(t)$ と記す．

正整数の列の集合 P が以下の条件を $u \cdot i \in P \Rightarrow u \in P$ かつ $u \cdot (i+1) \in P \Rightarrow u \cdot i \in P$ みたすとき P を木領域をいう．木領域 P'，P が $\forall u \in P, i \in \mathbb{N}.(u \cdot i \in P' \wedge u \cdot (i+1) \in P) \Rightarrow u \cdot (i+1) \in P'$ をみたすとき P' を P の部分領域といい $P' \subseteq P$ と記す．正整数列 u, v が $v \preceq u$ とは $u = vw$ となる w が存在することである．

項 t の位置 u での部分項を t/u と記す．線形な項 t に出現する変数 x の位置を $pos(t, x)$ と記す．項 t の変数の位置の集合を $Pos_{\mathcal{V}}(t)$ と表し，変数でない位置の集合を $Pos_{\mathcal{F}}(t)$ と表す．位置 u に出現する関数記号の深さを u の長さ $|u|$ とする．項 t の深さを $dpt(t) = sup\{|u| \mid u \in Pos_{\mathcal{F}}(t)\}$ と与える．項 t に出現する変数の深さが 0 または 1 のとき t をシャローとよぶ．

代入 θ は変数集合 $\mathcal{V}$ から項の集合 $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ への写像であり，代入 θ による項 t への代入を $t\theta$ で表す．ホールは特別な定数記号 $\Box$ であり，ホールを部分項として含む項を文脈という．文脈 C において位置 p_i のホールを項 t_i で置き換えて得られる項を $C[t_1, t_2, \ldots, t_n]_{p_1, p_2, \ldots, p_n}$ あるいは略して $C[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ で表す．

書き換え規則 $l \rightarrow r$ は，$l \notin \mathcal{V}$ かつ $Var(r) \subseteq Var(l)$ をみたす項 l と r の組であり，項書き換えシステム $\mathcal{R}$ は書き換え規則の集合である．項書き換えシステム $\mathcal{R}$ の両辺を逆にしたものを $\mathcal{R}^{-1} = \{r \rightarrow l \mid l \rightarrow r \in \mathcal{R}\}$ で定義する．任意の書き換え規則 $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$ について l，r が線形のとき $\mathcal{R}$ を線形，l が線形のとき $\mathcal{R}$ を左線形，r が線形のとき $\mathcal{R}$ を右線形とよぶ．任意の書き換え規則 $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$ について l，r が基底項のとき $\mathcal{R}$ を基底とよぶ．任意の書き換え規則 $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$ について l がシャローのとき $\mathcal{R}$ を左シャロー，r がシャローのとき $\mathcal{R}$ を右シャローとよぶ．ある $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$ と文脈 C と代入 θ が存在するとき，項 $s = C[l\theta]_p$ は項 $t = C[r\theta]_p$ に書き換えることができる．この書き換え関係を $s \rightarrow t$ と表し，$\rightarrow$ の反射推移閉包を $\xrightarrow{*}$ と書く．また，項 t の部分項 $l\theta$ をリデックスとよび，$l\theta$ の真部分項にリデックスを含まないとき $l\theta$ を最内リデックスとよぶ．最内リデックスの書き換えを $\underset{i}{\rightarrow}$ と記す．リデックスをもたない項を正規形といい，$\mathcal{R}$ の正規形の集合を $NF_{\mathcal{R}}$ と記す．$s \xrightarrow{*} t \in NF_{\mathcal{R}}$ のとき，t を s の正規形という．

$s \xrightarrow{*} t$ のとき s から t へ到達可能であるという．項書き換えシステム $\mathcal{R}$ と項の集合 T が与えられたとき，T から到達可能な項の集合を $[T](\xrightarrow{*}) = \{t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}) \mid \exists s \in T.s \xrightarrow{*} t\}$，$T$ へ到達可能な項の集合を $(\xrightarrow{*})[T] = \{s \in \mathcal{T}(\mathcal{F}) \mid \exists t \in T.s \xrightarrow{*} t\}$ と定義する．

(ボトムアップ) 木オートマトン A は $(\mathcal{F}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}_f, \Delta)$ の 4 つ組で，$\mathcal{F}$ は関数記号の集合，$\mathcal{Q}$ は状態の集合、$\mathcal{Q}_f$ は終了状態の集合，Δ は遷移規則の集合である．Δ は $\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}$ 上の基底項書き換えシステムとみなすことが出来る．Δ により出来る書き換え関係を $\rightarrow_{\Delta}$ または $\rightarrow_A$ と記す．$\mathcal{L}_q(A) = \{t \mid t \xrightarrow{*}_A q\}(q \in \mathcal{Q})$ と定める．木オートマトン A で受理される項の集合を $\mathcal{L}(A) = \bigcup_{q \in Q_f} \mathcal{L}_q(A)$ と定める．有限木オートマトンとは，状態の集合 $\mathcal{Q}$ が有限となる木オートマトンのことである．項の集合 T に対してある有限木オートマトン A が存在し $T = \mathcal{L}(A)$ となるとき T は認識可能であるという．木オートマトン A が決定的であるとは，任意の関数記号 $f \in \mathcal{F}$，状態 $q_1, \ldots, q_n \in \mathcal{Q}$ に対して $f(q_1, \ldots, q_n) \rightarrow q \in \Delta$ の形をした規則が高々1 つしかないことであり，木オートマトン A が完全であるとは，任意の関数記号 $f \in \mathcal{F}$，状態 $q_1, \ldots, q_n \in \mathcal{Q}$ に対して $f(q_1, \ldots, q_n) \rightarrow q \in \Delta$ の形をした規則が少なくとも 1 つあることである．P を $Pos(t)$ の部分領域とする．このとき $Red_A(t, P)$ を $t \xrightarrow{*}_A t'$ かつ $Pos(t') = P$ をみたす項 $t' \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q})$ のうち，$t \xrightarrow{*}_A t'$ の長さが最小となる項とする．

命題 1 [2, 7] 木オートマトンについて以下の性質が成り立つ．(1) 認識可能集合が和集合，積集合，補集合に関して閉じている．(2) 木オートマトン A に対して，$\mathcal{L}(A) = \emptyset$ か否かは決定可能．

木オートマトンが決定的かつ完全ならば以下の性質は容易に導ける．

補題 1 [4] A を $\mathcal{F}$ 上の決定的かつ完全な木オートマトン，$t, t_1, t_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q})$ とする．$t \xrightarrow{*}_A t_1$，$t \xrightarrow{*}_A t_2$ かつ $Pos_{\mathcal{F}}(t_1) = Pos_{\mathcal{F}}(t_2)$ ならば $t_1 = t_2$ である．

補題 2 [4] A を $\mathcal{F}$ 上の決定的かつ完全な木オートマトン，$t, t_1, t_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q})$ とする．$t \xrightarrow{*}_A t_1$，$t \xrightarrow{*}_A t_2$ かつ $Pos_{\mathcal{F}}(t_1) \supseteq Pos_{\mathcal{F}}(t_2)$ ならば $t_1 \xrightarrow{*}_A t_2$ である．

3 最内ボトムアップ項書き換えシステム

この節では，ボトムアップ項書き換えシステム [4, 5] の概念を最内書き換えに適用した最内ボトムアップ項書き換えシステムを定義する．はじめに，最内ボトムアップ項書き換えシステムの定義に必要なマーク書き換えについて述べる．以下では，項書き換えシステム $\mathcal{R}$ は左線形であるとする．なお，自然数の集合を $\mathbb{N}$ で記す．

定義 1 (マーク付け) マーク付けされた関数記号の集合を $\mathcal{F}^{\mathbb{N}} = \{f^i \mid f \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}\}$ で定義する．ただし，f^0 と f は同一視する．任意の $k \in \mathbb{N}$ について $\mathcal{F}^{\leq k} = \{f^i \mid f \in \mathcal{F}, 0 \leq i \leq k\}$ とする．マーク付けされた項 $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}}, \mathcal{V})$ の根位置 (つまり ε の位置) の関数記号のマークを $m(t)$ で表す．ただし，$t \in \mathcal{V}$ のとき $m(t) = 0$．マーク付けされた項 t に出現するマークの最大値を $mmax(t)$ と記す．

定義 2 (項のマーク付け) 項 $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}}, \mathcal{V})$ のすべての関数記号に $i \in \mathbb{N}$ をマーク付けして得られた項を t^i と記す．このマーク付けを項の集合 S と代入 σ について，それぞれ $S^i = \{t^i \mid t \in S\}$、$\sigma^i : x \mapsto (x\sigma)^i$ と拡張する．項の集合 S に k 以下のマーク付けをした集合 $S^{\leq k}$ を $S^{\leq k} = \{s \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})\} \mid s^0 \in S\}$ により定義する．

以下では $\bar{t}$，$\hat{t}$，$\tilde{t}$ 等で $\bar{t}^0 = \hat{t}^0 = \tilde{t}^0 = t$ となるマーク付けされた項を表すこととする．文脈 C，代入 σ についても同様に $\overline{C}$，$\overline{\sigma}$ 等をもちいる．

例 1 $\bar{t} = f^1(a^2, b^2)$，$\overline{s} = g^0(f^2(b^0, a^1))$ はマーク付けされた項である．マーク 0 は省略できるので $\overline{s} = g(f^2(b, a^1))$ とかける．また，$\bar{t}^0 = t = f(a, b)$，$\bar{t}^1 = f^1(a^1, b^1)$ である．$m(\bar{t}) = 1$，$mmax(\overline{s}) = 2$ である． □

関数記号 $\mathcal{F}$ 上の木オートマトン A についても，マーク付けされた関数記号 $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ 上の木オートマトンへ以下のように拡張する．

定義 3 (木オートマトンのマーク付け) 木オートマトン $A = \{\mathcal{F}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}_f, \Delta\}$ をマーク付けされた関数記号上の木オートマトン $A^{\mathbb{N}}$ を以下で定義する．

$$A^{\mathbb{N}} = (\mathcal{F}^{\mathbb{N}}, \mathcal{Q}^{\mathbb{N}}, \mathcal{Q}_f^{\mathbb{N}}, \Delta^{\mathbb{N}})$$
$$\mathcal{Q}^{\mathbb{N}} = \{q^i \mid q \in \mathcal{Q}, i \in \mathbb{N}\}$$
$$\mathcal{Q}_f^{\mathbb{N}} = \{q^i \mid q \in \mathcal{Q}_f, i \in \mathbb{N}\}$$
$$\Delta^{\mathbb{N}} = \{f^j(q_1^{j_1}, \ldots, q_n^{j_n}) \to q^{j'} \mid f(q_1, \ldots, q_n) \to q \in \Delta, j, j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}, j' = max(j, j_1, \ldots, j_n)\}$$

$n \in \mathbb{N}$ を k 以下に制限した木オートマトンを $A^{\leq k}$ と記す．以下では，A を $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ 上で考える場合は $A^{\mathbb{N}}$，$\mathcal{F}^{\leq k}$ 上で考える場合は $A^{\leq k}$ とみなすこととする．なお，$A^{\mathbb{N}}$ は有限木オートマトンでないので $A^{\mathbb{N}}$ の受理する項の集合は認識可能でないことに注意する．

マーク付けされた木オートマトンについて以下の性質が成り立つ.

補題 3 $\bar{t} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}})$, A を決定的かつ完全な木オートマトンとする. このとき $\bar{t} \xrightarrow{*}_A q^j \Leftrightarrow mmax(\bar{t}) = j$ が成立する.

まず, 項書き換えシステム $\mathcal{R}$ の書き換えをマーク付けされた項の書き換えに拡張するために必要なマーク付け $\odot$ と M を定義する.

定義 4 (マーク付け $\odot$) $\bar{t} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}}, \mathcal{V})$, $n \in \mathbb{N}$ とする. このとき $\bar{t} \odot n$ を以下で定義する.

$$\bar{t} \odot n = \begin{cases} \bar{t} & (\bar{t} \in \mathcal{V} \text{ のとき}) \\ f^{max(i,n)}(\bar{t}_1 \odot n, \ldots, \bar{t}_m \odot n) & (\bar{t} = f^i(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_m) \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, $\bar{t} \odot n$ の定義から以下の補題が成立する.

補題 4 [4] A を $\mathcal{F}$ 上の木オートマトン, $\bar{s}, \bar{t} \in \mathcal{T}((\mathcal{F} \cup \mathcal{Q})^{\mathbb{N}})$, $n \in \mathbb{N}$ とする. このとき $\bar{s} \xrightarrow{*}_A \bar{t}$ ならば $\bar{s} \odot n \xrightarrow{*}_A \bar{t} \odot n$ である.

注意. 上記の補題において, $\bar{s}, \bar{t}$ は $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ 上の項なので $\rightarrow_A$ は $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ 上の二項関係 $\rightarrow_{A^{\mathbb{N}}}$ を表している.

定義 5 任意のマーク付けされた線形項 $\bar{t} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}}, \mathcal{V})$ の根位置から変数 $x \in Var(\bar{t})$ の位置までに出現するマークの最大値 $+1$ を $M(\bar{t}, x)$ で表し, $M(\bar{t}, x)$ を以下で定義する.

$$M(\bar{t}, x) = sup\{m(\bar{t}/u) \mid u \prec pos(\bar{t}, x)\} + 1$$

上で定義した $\odot$ と M を用いて, マーク付けされた項の書き換え (マーク書き換え) を定義する.

定義 6 (マーク書き換え) 書き換え規則 $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$, 文脈 $\overline{C}[\ ]$, 代入 $\overline{\sigma}$ が存在して $\bar{s} = \overline{C}[l\overline{\sigma}]$, $\bar{t} = \overline{C}[r\hat{\sigma}]$, $\hat{\sigma}(x) = \overline{\sigma}(x) \odot M(\overline{C}[\bar{l}], x)$ となるとき, $\bar{s}$ から $\bar{t}$ へマーク書き換え可能であるといい, $\bar{s} \circ\!\!\rightarrow \bar{t}$ と表す. $\bar{l}\sigma$ が最内リデックスのとき最内マーク書き換えとよび $\underset{i}{\circ\!\!\rightarrow}$ で表す.

例 2 以下の項書き換えシステム $\mathcal{R}$ を考える.

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{rcl} f(x) & \rightarrow & g(x) \\ g(h(x)) & \rightarrow & i(x) \\ i(x) & \rightarrow & a \end{array} \right.$$

このとき, 以下のようなマーク書き換えが得られる.

$$f(h(\underline{f(h(a))})) \circ\!\!\rightarrow f(h(\underline{g(h^1(a^1))})) \circ\!\!\rightarrow f(h(\underline{i(a^2)})) \circ\!\!\rightarrow \underline{f(h(a))} \circ\!\!\rightarrow \underline{g(h^1(a^1))} \circ\!\!\rightarrow \underline{i(a^2)} \circ\!\!\rightarrow a$$

□

定義 7 (マーク増加) 任意の位置 $u, v \in Pos(\bar{t})$ について, $u \preceq v \Rightarrow m(\bar{t}/u) \leq m(\bar{t}/v)$ のとき $\bar{t}$ はマーク増加であるという.

例 3 $f^1(g^1(a^3, b^2))$ はマーク増加である. しかし, $f^3(g^1(a^3, b^2))$ は f のマークが g のマークより大きくなっているのでマーク増加ではない. □

定義 8 (弱ボトムアップ) $\bar{s}$ から $\bar{t}$ へのマーク書き換え $\bar{s} = \overline{C}[\bar{l}\overline{\sigma}] \circ\!\!\rightarrow \overline{C}[r\hat{\sigma}] = \bar{t}$ が弱ボトムアップであるとは, $m(\bar{l}) = 0$ となるときである. マーク書き換え系列 $\bar{s}_0 \circ\!\!\rightarrow \bar{s}_1 \circ\!\!\rightarrow \ldots \circ\!\!\rightarrow \bar{s}_n$ が弱ボトムアップであるとは, 各ステップでの書き換えが弱ボトムアップとなっていることである.

補題 5 [4] $\bar{s}, \bar{t} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}}, \mathcal{V})$, $\bar{s} \circ\!\!\rightarrow \bar{t}$ が弱ボトムアップであるとする. このとき $\bar{s}$ がマーク増加ならば $\bar{t}$ もマーク増加である.

次に，最内ボトムアップ項書き換えシステムを定義する．

定義 9 (k-最内ボトムアップ書き換え) マーク付けされた最内書き換え系列 $\overline{s}_0 \underset{i}{\circ\!\!\to} \overline{s}_1 \underset{i}{\circ\!\!\to} \cdots \underset{i}{\circ\!\!\to} \overline{s}_n$ が，弱ボトムアップかつ $\forall i\ (0 \leq i \leq n).\ mmax(\overline{s}_i) \leq k$ ならば，その最内書き換え系列は k-最内ボトムアップであるといい $ibu(k)$ で表す．このとき，$\overline{s}_0 \ {}_{k}\!\underset{i}{\overset{*}{\circ\!\!\to}} \overline{s}_n$ と記す．s から t への k-最内ボトムアップ書き換え系列が存在するとは，s から $\overline{t}$ への k-最内ボトムアップ書き換え系列が存在することをいい，$s \ {}_{k}\!\underset{i}{\overset{*}{\to}} t$ と記す．

定義 10 (最内ボトムアップ項書き換えシステム) $\mathcal{R}$ を項書き換えシステムとする．$s \underset{i}{\overset{*}{\to}} t$ となる任意の $s, t \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ に対して，s から t への k-最内ボトムアップ書き換え系列が存在するとき，$\mathcal{R}$ は k-最内ボトムアップであるといい，$ibu(k)$ と表す．k-最内ボトムアップ項書き換えシステムのクラスを $IBU(k)$ と表し，最内ボトムアップ項書き換えシステムのクラスを $IBU = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} IBU(k)$ とする．

例 4 以下の項書き換えシステム $\mathcal{R}$ を考える．

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{lcl} g(f(x)) & \to & g(g(x)) \\ f(f(x)) & \to & x \end{array} \right.$$

$g(f(f(f(f(f(a))))))$ からの最内書き換えは以下のようになる．

$$g(f(f(f(f(f(a)))))) \underset{i}{\circ\!\!\to} g(f(f(f(a^1)))) \underset{i}{\circ\!\!\to} g(f(a^1)) \underset{i}{\circ\!\!\to} g(g(a^1))$$

この書き換え系列に出現するマークの最大値は 1 である．これ以外の最内書き換えの場合についても出現するマークの上限は 1 であるので，$\mathcal{R} \in IBU(1)$ である． □

4 最内ボトムアップ書き換えに基づく到達可能性判定

この節では，基底項書き換えシステムの到達可能性が決定可能であることを利用して，IBU に含まれる項書き換えシステム $\mathcal{R}$ について，T が認識可能な項集合のとき $({}_{k}\!\overset{*}{\to}_{\mathcal{R}})[T]$ が認識可能であることを示す．基底項書き換えシステムの到達可能性について以下の命題が知られている．

命題 2 [3] $\mathcal{R}$ を基底項書き換えシステム，T を認識可能な項集合とする．このとき $(\overset{*}{\to}_{\mathcal{R}})[T]$ は認識可能である．

以下では，左線形な項書き換えシステム $\mathcal{R}$，項集合 $T \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F})$，$\mathcal{L}(A) = T$ となる木オートマトン $A = (\mathcal{F}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}_f, \Delta)$，ある自然数 k を考える．さらに，左線形な項書き換えシステム $\mathcal{R}$ の正規形の集合 $NF_{\mathcal{R}}$ は認識可能なので [2]，$\mathcal{L}(A_{NF}) = NF_{\mathcal{R}}$ となる木オートマトン $A_{NF} = (\mathcal{F}, \mathcal{Q}_{NF}, \mathcal{Q}_{NFf}, \Delta_{NF})$ を考える．ただし，$\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}_{NF} = \emptyset$ とする．また，A，A_{NF} は一般性を失うことなく決定的かつ完全であると仮定する．整数 d を $d = max\{dpt(l) \mid l \to r \in \mathcal{R}\}$ と定める．

証明のアイディアは，以下で定義するオートマトン A_{in} と基底項書き換えシステム S_{in} をもちいて $\overset{*}{\to}_{S_{in} \cup A_{in}}$ と ${}_{k}\!\underset{i}{\overset{*}{\circ\!\!\to}}$ が相互に模倣することである．

定義 11 $A_{in} = (\mathcal{F}, \mathcal{Q}_{in}, \mathcal{Q}_{inf}, \Delta_{in})$

$\mathcal{Q}_{in} = \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}_{NF}$

$\mathcal{Q}_{inf} = \mathcal{Q}_f \times \mathcal{Q}_{NF}$

$\Delta_{in} = \{f((q_1, q'_1), \ldots, (q_n, q'_n)) \to (q, q') \mid f(q_1, \ldots, q_n) \to q \in \Delta, f(q'_1, \ldots, q'_n) \to q' \in \Delta_{NF}\}$

このとき，A_{in} は決定的かつ完全，$\mathcal{L}(A_{in}) = \mathcal{L}(A)$．また，$q' \in Q_{NFf}$ のとき $\mathcal{L}_{(q,q')}(A_{in}) \subseteq NF_{\mathcal{R}}$ となる．

定義 12 $\mathcal{T}((\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}_{in})^{\leq k})$ 上の基底項書き換えシステム S_{in} を以下の条件をみたす書き換え規則 $\bar{l}\tilde{\tau} \to r\tilde{\tau}$ の集合と定める．

(i). $l \to r \in R$,

(ii). $m(\bar{l}) = 0$ かつ $\bar{l} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k}, \mathcal{V})$,

(iii). $\overline{\tau}, \tilde{\tau} : \mathcal{V} \to \mathcal{T}((\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}_{in})^{\leq k})$,

(iv). 任意の $x \in Var(l)$ について $dpt(x\overline{\tau}) \leq kd$ かつ $x\tilde{\tau} = x\overline{\tau} \odot M(\bar{l}, x)$,

(v). $\bar{l} = f(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n)$ としたとき，$\exists q' \in \mathcal{Q}_{NFf}$. $\overline{t_i}\overline{\tau} \xrightarrow{*}_{A_{in}} (q, q')$.

補題 6 $\overline{s}, \bar{t} \in \mathcal{T}((\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}_{in})^{\leq k})$ とする．このとき，$\overline{s}$ がマーク増加かつ $\overline{s} \to_{S_{in}} \bar{t}$ ならば $\bar{t}$ はマーク増加となる．

証明. $\overline{s} = \overline{C}[\bar{l}\overline{\tau}] \to_{S_{in}} \overline{C}[r\tilde{\tau}] = \bar{t}$ とおける．$\overline{s}$ がマーク増加かつ $m(\bar{l}) = 0$ なので $\overline{C}[\ ]$ のホール $\square$ より上のマークはすべて 0 である．したがって，任意の $x \in Var(l)$ について $x\tilde{\tau}$ がマーク増加であることを示せばよい．任意の位置 $v, w \in Pos(x\overline{\tau})$ について，$v \preceq w$ とすると $\overline{s}$ がマーク増加なので $m(x\overline{\tau}/v) \leq m(x\overline{\tau}/w)$ である．このとき，$m(x\tilde{\tau}/v) = max(m(x\overline{\tau}/v), M(\bar{l}, x))$，$m(x\tilde{\tau}/w) = max(m(x\overline{\tau}/w), M(\bar{l}, x))$ より $m(x\tilde{\tau}/v) = max(m(x\overline{\tau}/v), M(\bar{l}, x)) \leq max(m(x\overline{\tau}/w), M(\bar{l}, x)) = m(x\tilde{\tau}/w)$ である．よって，$\bar{t}$ はマーク増加である． $\square$

まず，$\overline{s}$ から $\bar{t}$ へ $\xrightarrow{*}_{S_{in} \cup A_{in}}$ で到達可能ならば，その書き換えに対応する ${}_{k}\!\circ\!\xrightarrow[i]{*}$ での書き換えが存在することを示す．補題 7 で 1 ステップの場合を示し，補題 8 で複数ステップの場合に拡張する．

補題 7 $\overline{s}, \bar{t} \in \mathcal{T}((\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}_{in})^{\leq k})$，$\overline{s}' \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ とする．このとき，$\overline{s}$ がマーク増加かつ $\overline{s}' \xrightarrow{*}_{A_{in}} \overline{s} \to_{S_{in} \cup A_{in}} \bar{t}$ ならば，$\overline{s}'\ {}_{k}\!\circ\!\xrightarrow[i]{*} \bar{t}'$，$\bar{t}' \xrightarrow{*}_{A_{in}} \bar{t}$ となる $t' \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ が存在する．

証明. 1. $\overline{s} \to_{A_{in}} \bar{t}$ のとき．

$\bar{t}' = \overline{s}'$ とすれば，$\overline{s}'\ {}_{k}\!\circ\!\xrightarrow[i]{*} \bar{t}'$，$\bar{t}' \xrightarrow{*}_{A_{in}} \bar{t}$ をみたす．

2. $\overline{s} \to_{S_{in}} \bar{t}$ のとき．

$\overline{s} \to_{S_{in}} \bar{t}$ なので $\overline{s} = \overline{C}[\bar{l}\overline{\tau}]$，$\bar{t} = \overline{C}[r\tilde{\tau}]$ となる規則 $l \to r \in \mathcal{R}$，文脈 $\overline{C}$，代入 $\overline{\tau}, \tilde{\tau}$ が存在する．$\overline{s}' \xrightarrow{*}_{A_{in}} \overline{s}$ より $\overline{s}' = \overline{C}'[\bar{l}\overline{\sigma}]$ とおけ，$\overline{C}' \xrightarrow{*}_{A_{in}} \overline{C}$，任意の $x \in Var(l)$ について $x\overline{\sigma} \xrightarrow{*}_{A_{in}} x\overline{\tau}$ となる．ここで，$\overline{s}'$ を規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ でマーク書き換えした項を $\bar{t}'$ とすると，$\bar{t}' = \overline{C}'[r\hat{\sigma}]$，$\hat{\sigma}(x) = \overline{\sigma}(x) \odot M(\overline{C}'[\bar{l}], x)$ とおける．このとき，$\bar{l} = f(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n)$ とすると S_{in} の定義 (定義 12) より，$\bar{t}_i\overline{\tau} \xrightarrow{*}_{A_{in}} (q, q')$ $(q' \in \mathcal{Q}_{NFf})$ である．$\overline{\sigma}(x) \xrightarrow{*}_{A_{in}} \overline{\tau}(x)$ より $\bar{t}_i\overline{\sigma} \xrightarrow{*}_{A_{in}} t_i\overline{\tau} \xrightarrow{*}_{A_{in}} (q, q')$ $(q' \in \mathcal{Q}_{NFf})$ となるので，$\bar{t}_i\overline{\sigma} \in NF_{\mathcal{R}}$ である．したがって，$\bar{l}\overline{\sigma}$ は $\overline{s}'$ の最内リデックスなので $\overline{s}'$ から $\bar{t}'$ への書き換えは最内マーク書き換えである．$mmax(\bar{t}) \leq k$ なので，S_{in} の定義 (定義 12) より任意の $x \in Var(l)$ について $mmax(x\tilde{\tau}) = mmax(x\overline{\tau} \odot M(\bar{l}, x)) \leq k$ である．したがって，任意の $x \in Var(l)$ について $M(\bar{l}, x) \leq k$ である．$\overline{s}$ が S_{in} の定義よりマーク増加かつ $m(\bar{l}) = 0$ なので $M(\overline{C}'[\bar{l}], x) = M(\overline{C}[\bar{l}], x) = M(\bar{l}, x)$ である．よって $mmax(\bar{t}') \leq k$ となるので，$\overline{s}'\ {}_{k}\!\circ\!\xrightarrow[i]{} \bar{t}'$ である．

任意の $x \in Var(l)$ について $x\overline{\sigma} \xrightarrow{*}_{A_{in}} x\overline{\tau}$ と補題 4 より $x\hat{\sigma} = x\overline{\sigma} \odot M(\bar{l}, x) \xrightarrow{*}_{A_{in}} x\overline{\tau} \odot M(\bar{l}, x) = x\tilde{\tau}$ である．したがって，$\bar{t}' = \overline{C}'[\bar{l}\hat{\sigma}] \xrightarrow{*}_{A_{in}} \overline{C}[\bar{l}\tilde{\tau}] = \bar{t}$ が成り立つ． $\square$

補題 8 $\overline{s}, \bar{t} \in \mathcal{T}((\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}_{in})^{\leq k})$，$\overline{s}' \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ とする．ただし，$\overline{s}$ はマーク増加．$\overline{s}' \xrightarrow{*}_{A_{in}} \overline{s}$，$\overline{s} \xrightarrow{*}_{S_{in} \cup A_{in}} \bar{t}$ のとき，$\overline{s}'\ {}_{k}\!\circ\!\xrightarrow[i]{*} \bar{t}'$，$\bar{t}' \xrightarrow{*}_{A_{in}} \bar{t}$ となる $\bar{t}' \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ が存在する．

証明. 書き換え系列 $\overline{s} \xrightarrow{*}_{S_{in} \cup A_{in}} \bar{t}$ の長さ n に関する帰納法で示す．

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\overline{s'} \arrow[r, dotted, "{}_{k}\circ\ *", "i"'] \arrow[d, "*", "A_{in}"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I.H.}"] & \overline{u'} \arrow[r, dotted, "{}_{k}\circ\ *", "i"'] \arrow[d, dotted, "*", "A_{in}"'] & \overline{t'} \arrow[d, dotted, "*", "A_{in}"'] \\
\overline{s} \arrow[r, "*", "S_{in}\cup A_{in}"'] & \overline{u} \arrow[r, "S_{in}\cup A_{in}"'] & \overline{t}
\end{tikzcd}$$

図 1. 補題 8

$(B.S.)$ $n=0$ のとき．$\overline{t}'=\overline{s}'$ とすれば，$\overline{s}' \;{}_{k}\!\circ\!\underset{i}{\to} \overline{t}$，$\overline{t}' \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{t}$ をみたす．

$(I.S.)$ $\overline{s} \overset{*}{\to}_{S_{in}\cup A_{in}} \overline{u} \to_{S_{in}\cup A_{in}} \overline{t}$ とする．$\overline{s}'$，$\overline{s}$，$\overline{u}$ について帰納法の仮定より $\overline{s}' \;{}_{k}\!\circ\!\underset{i}{\overset{*}{\to}} \overline{u}' \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{u}$ となる $\overline{u}'$ が存在する．$\overline{u}'$，$\overline{u}$，$\overline{t}$ について補題 7 より $\overline{u}' \;{}_{k}\!\circ\!\underset{i}{\to} \overline{t}' \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{t}$ となる $\overline{t}'$ が存在する．したがって，$\overline{s}' \;{}_{k}\!\circ\!\underset{i}{\to} \overline{t}' \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{t}$ となる $\overline{t}'$ が存在する (図 1)． □

次に，補題 8 とは逆に $\overline{s}$ から $\overline{t}$ へ ${}_{k}\!\circ\!\underset{i}{\overset{*}{\to}}$ で到達可能ならば，その書き換えに対応する $\overset{*}{\to}_{S_{in}\cup A_{in}}$ での書き換えが存在することを示す．まず，証明に必要な Top 項を導入する．

定義 13 (トップ領域) $\overline{t} \in \mathcal{T}((\mathcal{F}\cup\mathcal{Q})^{\leq k}\cup\{\square\})$ とする．このとき，$\overline{t}$ のトップ領域 $Topd(\overline{t})$ を以下の条件をみたす位置 u の最大の集合と定義する．

1. $u \in Pos(\overline{t})$.
2. 任意の $u' \preceq u$ について $m(\overline{t}/u') > 0 \Rightarrow |u| - |u'| \leq (k+1-m(\overline{t}/u'))d$.

定義 14 (トップ項) 任意の $\overline{t} \in \mathcal{T}((\mathcal{F}\cup\mathcal{Q}_{in})^{\leq k}\cup\{\square\})$ ついて $\overline{t}$ のトップ項 $Top(\overline{t})$ を $Top(\overline{t}) = Red_{A_{in}}(\overline{t}, Topd(\overline{t}))$ と定義する．代入 $\overline{\sigma}$ に対する Top を $Top(\overline{\sigma})(x) = Top(\overline{\sigma}(x))$ とする．

例 5 マーク付けされた項を $\overline{t} = f(f^1(f^1(f^2(a^2))))$，木オートマトンを $A = \{\{f,a\},\{q\},\{q\},\{a \to q, f(q) \to q\}\}$，$k=2$，$d=1$ とする．このとき $\overline{t}$ のトップ領域は $Topd(\overline{t}) = \{\epsilon, 1, 1.1, 1.1.1\}$ である．したがって，$Top(\overline{t}) = Red_A(\overline{t}, Topd(\overline{t})) = f(f^1(f^1(q^2)))$ である (図 2).

Top について以下の性質が成り立つ．

補題 9 [5] $\overline{t} \in \mathcal{T}((\mathcal{F}\cup\mathcal{Q}_{in})^{\leq k})$，$\overline{C} \in \mathcal{T}((\mathcal{F}\cup\mathcal{Q}_{in})^{\leq k}\cup\{\square\})$ とする．$\overline{C}/u = \square$ とする．任意の位置 $v \preceq u$ に対して $m(\overline{C}[\;]/v) = 0$ のとき $Top(\overline{C}[\overline{t}]) = Top(\overline{C})[Top(\overline{t})]$.

補題 10 [5] $\overline{t}, \hat{t} \in \mathcal{T}((\mathcal{F}\cup\mathcal{Q})^{\leq k})$ とする．任意の位置 $u \in Pos(t)$ について $m(\overline{t}/u) \leq m(\hat{t}/u)$ ならば $Topd(\overline{t}) \supseteq Topd(\hat{t})$.

補題 11 [5] $l \to r \in \mathcal{R}$，$\overline{l}\overline{\sigma} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ がマーク増加，$m(\overline{l}) = 0$，$\hat{\sigma}(x) = \overline{\sigma}(x) \odot M(\overline{l}, x)$ とする．このとき $Pos_{\mathcal{F}}(Top(\overline{l}\overline{\sigma})) \supseteq Pos_{\mathcal{F}}(\overline{l}Top(\hat{\sigma}))$.

補題 12 $\overline{s}, \overline{t} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ において，$\overline{s}$ がマーク増加かつ $\overline{s} \circ\!\underset{i}{\to} \overline{t}$ が弱ボトムアップならば，$Top(\overline{s}) \overset{*}{\to}_{A_{in}} \to_{S_{in}} Top(\overline{t})$ である．
証明. 付録 A 参照． □

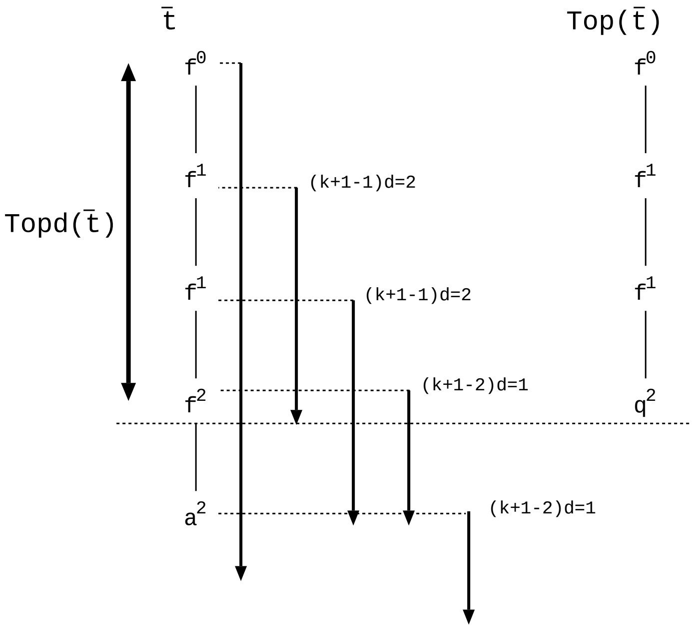

図 2. Top 領域と Top 項

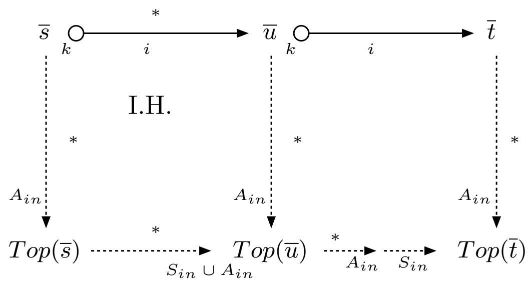

図 3. 補題 13

補題 13 $\bar{s},\bar{t}\in\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\le k})$ とする．$\bar{s}$ がマーク増加かつ $\bar{s}\ {}_{k}{\circ}\!\!\xrightarrow[i]{*}\ \bar{t}$ ならば，$\bar{s}\xrightarrow{*}_{A_{in}}\bar{s}'$，$\bar{s}'\xrightarrow{*}_{S_{in}\cup A_{in}}\bar{t}'$，$\bar{t}\xrightarrow{*}_{A_{in}}\bar{t}'$ となる $\bar{s}',\bar{t}'\in\mathcal{T}((\mathcal{F}\cup\mathcal{Q}_{in})^{\le k})$ が存在する．

証明. $\bar{s}=\bar{s}_0\ {}_{k}{\circ}\!\!\xrightarrow[i]{}\ \bar{s}_1\ {}_{k}{\circ}\!\!\xrightarrow[i]{}\ \cdots\ {}_{k}{\circ}\!\!\xrightarrow[i]{}\ \bar{s}_n=\bar{t}$ とする．任意の i $(0\le i\le n-1)$ について，${}_{k}\!\!\xrightarrow[i]{}$ の定義より弱ボトムアップなので補題 5 より s_i はマーク増加．$\bar{s}_i\ {\circ}\!\!\xrightarrow[i]{}\ \bar{s}_{i+1}$ に補題 12 を使うと $Top(\bar{s}_i)\xrightarrow{*}_{S_{in}\cup A_{in}}Top(\bar{s}_{i+1})$．したがって，$\bar{s}'=Top(\bar{s})$，$\bar{t}'=Top(\bar{t})$ とすれば $\bar{s}\xrightarrow{*}_{A_{in}}\bar{s}'$，$\bar{s}'\xrightarrow{*}_{S_{in}\cup A_{in}}\bar{t}'$，$\bar{t}\xrightarrow{*}_{A_{in}}\bar{t}'$ が成立する (図 3). □

補題 8 と補題 13 をもちいると $\xrightarrow{*}_{S_{in}\cup A_{in}}$ と ${}_{k}{\circ}\!\!\xrightarrow[i]{*}$ が相互に模倣できることが以下のように示される．

補題 14 $\mathcal{L}(A_{in})=T\subseteq\mathcal{T}(\mathcal{F})$ に対して以下が成立する．

$$(\ {}_{k}{\circ}\!\!\xrightarrow[i]{*})[T^{\le k}]\cap\mathcal{T}(\mathcal{F})=(\xrightarrow{*}_{S_{in}\cup A_{in}})[\mathcal{Q}_{inf}^{\le k}]\cap\mathcal{T}(\mathcal{F})$$

証明. $\exists\bar{t}\in T^{\le k}.s\ {}_{k}{\circ}\!\!\xrightarrow[i]{*}\ \bar{t}\Leftrightarrow\exists q^j\in\mathcal{Q}_{inf}^{\le k}.\ s\xrightarrow{*}_{S_{in}\cup A_{in}}q^j$ を示せばよい．

$(\Rightarrow)$ $s=\bar{s}\ {}_{k}{\circ}\!\!\xrightarrow[i]{*}\ \bar{t}$ を仮定する．補題 13 より $\bar{s}\xrightarrow{*}_{A_{in}}\bar{s}'\xrightarrow{*}_{S_{in}\cup A_{in}}\bar{t}'$，$\bar{t}\xrightarrow{*}_{A_{in}}\bar{t}'$ となる $\bar{t}'$ が存在する．

$\bar{t} \in T^{\leq k}$ より $\bar{t} \xrightarrow{*}_{A_{in}} q^j$ となる $q^j \in \mathcal{Q}_{inf}^{\leq k}$ が存在する．補題 2 より $\bar{t} \xrightarrow{*}_{A_{in}} \bar{t}' \xrightarrow{*}_{A_{in}} q^j$．したがって $s = \bar{s} \xrightarrow{*}_{S_{in} \cup A_{in}} q^j$ となる $q^j \in \mathcal{Q}_{inf}^{\leq k}$ が存在する．
$(\Leftarrow)$ $s \xrightarrow{*}_{S_{in} \cup A_{in}} q^j$ を仮定する．補題 8 において $\bar{s} = s$，$\bar{s}' = s$，$\bar{t} = q$ とすると，$s \ {}_{k}{\circ}\!\underset{i}{\xrightarrow{*}} \bar{t}' \xrightarrow{*}_{A_{in}} q^j$ となる $\bar{t}' \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ が存在する．　□

補題 15 $\mathcal{R}$ を $\mathcal{F}$ 上の左線形な項書き換えシステム，$T \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F})$ は認識可能な項集合とする．このとき，任意の $k \geq 0$ に対して $(\ {}_{k}\!\underset{i}{\xrightarrow{*}})[T]$ は認識可能である．

証明. $(\ {}_{k}\!\underset{i}{\xrightarrow{*}})[T] = (\ {}_{k}{\circ}\!\underset{i}{\xrightarrow{*}})[T^{\leq k}]$ は ${}_{k}\!\xrightarrow{*}$ の定義より明らか．補題 14 より $(\ {}_{k}\!\underset{i}{\xrightarrow{*}})[T] = (\ {}_{k}{\circ}\!\underset{i}{\xrightarrow{*}})[T^{\leq k}] = (\xrightarrow{*}_{S_{in} \cup A_{in}})[\mathcal{Q}_{inf}^{\leq k}] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F})$．$S_{in} \cup A_{in}$ は基底項書き換えシステムなので命題 2 より $(\xrightarrow{*}_{S_{in} \cup A_{in}})[\mathcal{Q}_{inf}^{\leq k}]$ は認識可能である．また，$\mathcal{T}(\mathcal{F})$ も認識可能なので $(\xrightarrow{*}_{S_{in} \cup A_{in}})[\mathcal{Q}_{inf}^{\leq k}] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F})$ は認識可能である．したがって，$(\ {}_{k}\!\underset{i}{\xrightarrow{*}})[T]$ も認識可能である．　□

定理 1 $\mathcal{R}$ を左線形な項書き換えシステム，T を認識可能な項集合とする．このとき，$\mathcal{R} \in IBU$ ならば $(\underset{i}{\xrightarrow{*}})[T]$ は認識可能である．

証明. IBU の定義よりある自然数 k が存在して $\underset{i}{\xrightarrow{*}} = {}_{k}\!\underset{i}{\xrightarrow{*}}$ となる．補題 15 より $(\ {}_{k}\!\underset{i}{\xrightarrow{*}})[T]$ は認識可能であるので，$(\underset{i}{\xrightarrow{*}})[T]$ も認識可能である．　□

例 6 以下の項書き換えシステム $\mathcal{R}$ を考える．

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{lcl} g(f(x)) & \to & g(g(x)) \\ f(f(x)) & \to & x \end{array} \right.$$

このとき $T = \{g(t) \mid t \in \mathcal{T}(\{f, a\})\}$ とする．このとき，$({}_{1}\!\underset{i}{\xrightarrow{*}})[T]$ は認識可能であり，$\mathcal{R}$ は $ibu(1)$ なので，任意の s，t について $s \underset{i}{\xrightarrow{*}} t$ ならば，$s \ {}_{1}\!\underset{i}{\xrightarrow{*}} t$ である．よって $(\underset{i}{\xrightarrow{*}})[T] = ({}_{1}\!\underset{i}{\xrightarrow{*}})[T]$ なので $(\underset{i}{\xrightarrow{*}})[T]$ は認識可能である．　□

5　強最内ボトムアップ項書き換えシステム

文献 [4, 5] では，項書き換えシステム $\mathcal{R}$ がボトムアップ項書き換えシステムか否かは決定可能でないことが示されており，さらに決定可能な部分クラスである強ボトムアップ SBU が提案されている．本節では，文献 [4, 5] と同様に，最内ボトムアップ項書き換えシステムの決定可能な部分クラスである強最内ボトムアップ $(SIBU)$ システムを提案する．

定義 15 (強最内ボトムアップ項書き換えシステム) $\mathcal{R}$ を項書き換えシステムとする．$s \underset{i}{\xrightarrow{*}} t$ となる任意の $s, t \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ に対して，s から $\bar{t}$ への弱ボトムアップな最内書き換えが少なくとも 1 つあり，任意の弱ボトムアップな最内書き換えが $ibu(k)$ のとき，$\mathcal{R}$ は k-強最内ボトムアップであるといい，$sibu(k)$ と表す．$sibu(k)$ 項書き換えシステムのクラスを $SIBU(k)$ と表し，強最内ボトムアップ項書き換えシステムのクラスを $SIBU = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} SIBU(k)$ とする．

k-最内ボトムアップのクラスと k-強最内ボトムアップのクラスの包含関係は以下のようになる．

定理 2 $IBU(k) \supset SIBU(k)$

証明. $IBU(k) \supseteq SIBU(k)$ は定義から明らか．よって $IBU(k) \neq SIBU(k)$ を示せばよい．以下の

$ibu(1)$ 項書き換えシステム $\mathcal{R}$ を考える．

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{rcl} f(g(x)) & \to & i(x) \\ f(x) & \to & h(x) \\ h(g(x)) & \to & i(x) \end{array} \right.$$

書き換え規則 $f(g(x)) \to i(x)$ を使うと $f(g(a)) \underset{i}{\circ\!\!\to} i(a^1)$ となる．しかし，書き換え規則 $f(x) \to h(x)$ を使うと $f(g(a)) \underset{i}{\circ\!\!\to} h(g^1(a^1)) \underset{i}{\circ\!\!\to} i(a^2)$ よって，$\mathcal{R}$ は $sibu(1)$ ではない． □

以下では，項書き換えシステム $\mathcal{R}$ が $SIBU(k)$ に含まれるか否かが決定可能であることを示す．

補題 16 $\mathcal{R}$ が左線形な項書き換えシステムとする．このとき，s から t へ最内書き換えで到達可能ならば，s から $\bar{t}$ への弱ボトムアップな最内書き換え系列が存在する．
証明．以下のような最内書き換えを考える．

$$s = s_0 \underset{i}{\to} s_1 \underset{i}{\to} \ldots \underset{i}{\to} s_n = t$$

このとき，以下の最内書き換えが弱ボトムアップになっていることを書き換え系列の長さ n に関する帰納法で示す．

$$s = s_0 \underset{i}{\circ\!\!\to} \bar{s}_1 \underset{i}{\circ\!\!\to} \ldots \underset{i}{\circ\!\!\to} \bar{s}_n = \bar{t}$$

$(B.S.)$ $n = 0$ のときは，$s = t$ なので明らか．
$(I.S.)$ $n \geq 1$ のとき．このとき，$s = s_0 \overset{*}{\underset{i}{\circ\!\!\to}} s_{n-1} \underset{i}{\circ\!\!\to} s_n = t$ とおける．帰納法の仮定より，$s \overset{*}{\underset{i}{\circ\!\!\to}} \bar{s}_{n-1}$ は弱ボトムアップである．ここで，$\bar{s}_{n-1} \underset{i}{\circ\!\!\to} \bar{s}_n$ が弱ボトムアップでないと仮定し矛盾を示す．マーク書き換えの定義より $\bar{s}_{n-1} \underset{i}{\circ\!\!\to} \bar{s}_n$ は，$\bar{s}_{n-1} = \overline{C}_{n-1}[\bar{l}_{n-1}\overline{\sigma}_{n-1}] \underset{i}{\circ\!\!\to} \overline{C}_{n-1}[r_{n-1}\hat{\sigma}_{n-1}] = \bar{s}_n$ とおける．また，弱ボトムアップでないことより $m(\bar{l}_{n-1}) \geq 1$ である．$\bar{s}_0$ のマークがすべて 0 かつ $m(\bar{l}_{n-1}) \geq 1$ なので，ある $i < n-1$ が存在して，$s_i = C_i[l_i\sigma_i] \underset{i}{\circ\!\!\to} C_i[r_i\sigma_i] = s_{i+1}$ かつ $\sigma_i(x)$ が部分項として $l_{n-1}\sigma_{n-1}$ を持つ．このことは，s_i から s_{i+1} への書き換えが最内書き換えであることに矛盾する． □

補題 17 左線形な項書き換えシステム $\mathcal{R}$ が $sibu(k)$ である必要十分条件は以下の条件である．

$$({}_{k+1}\overset{*}{\underset{i}{\circ\!\!\to}})[\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k+1}) \setminus \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F}) = \emptyset$$

証明．$(\Rightarrow)$ $({}_{k+1}\overset{*}{\underset{i}{\circ\!\!\to}})[\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k+1}) \setminus \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ と仮定する．このとき，ある $s \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$, $\bar{t} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k+1}) \setminus \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ が存在して，$s \ {}_{k+1}\overset{*}{\underset{i}{\circ\!\!\to}} \bar{t}$ となる．これは，$\mathcal{R}$ が $sibu(k)$ であることに矛盾する．したがって，$({}_{k+1}\overset{*}{\underset{i}{\circ\!\!\to}})[\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k+1}) \setminus \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F}) = \emptyset$
$(\Leftarrow)$ $\mathcal{R}$ が $sibu(k)$ でないと仮定する．このとき，$sibu(k)$ の定義から s から $\bar{t}$ への弱ボトムアップな最内書き換えが存在しない，あるいは s から $\bar{t}$ への $ibu(k)$ でない弱ボトムアップな最内書き換えが存在する．$\mathcal{R}$ が左線形なので補題 16 より任意の項 s, t に対して，$s \overset{*}{\underset{i}{\to}} t$ ならば s から $\bar{t}$ への弱ボトムアップな最内書き換えが存在する．したがって，ある $\overline{u} \notin \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ が存在して $s \overset{*}{\underset{i}{\circ\!\!\to}} \overline{u} \overset{*}{\underset{i}{\circ\!\!\to}} \bar{t}$ となる．1 回のマーク書き換えでは，出現するマークの最大値は高々1 しか増えない．したがって，s から $\overline{u}$ への書き換え系列の途中にある項 $\overline{u'} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k+1}) \setminus \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ が存在し，$s \ {}_{k+1}\overset{*}{\underset{i}{\circ\!\!\to}} \overline{u'}$ となる．よって，$({}_{k+1}\overset{*}{\underset{i}{\circ\!\!\to}})[\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k+1}) \setminus \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ となる． □

補題 18 $\mathcal{L}(A) = \mathcal{T}(\mathcal{F})$ に対して以下が成立する．

$$({}_{k+1}\overset{*}{\underset{i}{\circ\!\!\to}})[\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k+1}) \setminus \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F}) = (\overset{*}{\to}_{S_{in} \cup A_{in}})[\mathcal{Q}_{inf}^{k+1}] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F})$$

証明．補題 14 と同様に証明できる． □

定理 3 $\mathcal{R}$ を左線形な項書き換えシステムとする．$\mathcal{R}$ が $sibu(k)$ か否かは決定可能である．

証明．補題 17 より $({}_{k+1}{\circ}\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}}_{\mathcal{R}})[\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\le k+1}) \setminus \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\le k})] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F}) = \emptyset$ が決定可能であることを示せばよい．補題 18 より $({}_{k+1}{\circ}\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}})[\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\le k+1}) \setminus \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\le k})] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F}) = (\overset{*}{\rightarrow}_{S_{in} \cup A_{in}})[\mathcal{Q}^{k+1}_{inf}] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F})$ である．$S_{in} \cup A_{in}$ は基底項書き換えシステムなので $(\overset{*}{\rightarrow}_{S_{in} \cup A_{in}})[\mathcal{Q}^{k+1}_{inf}]$ は認識可能である．よって $(\overset{*}{\rightarrow}_{S_{in} \cup A_{in}})[\mathcal{Q}^{k+1}_{inf}] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F})$ も認識可能となり，空集合か否かは決定可能である． □

6 関連研究との比較

本研究では，認識可能な項集合 T が与えられたとき，T へ到達可能な項の集合 $(\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}})[T]$ が認識可能となるクラスを提案した．最内書き換えの到達可能性については，小島ら [9] や Gascon ら [6] の研究が知られている．これらの結果は，認識可能な項集合 T が与えられたとき，T から到達可能な項の集合 $[T](\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}})$ が認識可能か否かを判定している．この節では，T へ到達可能な項の集合 $(\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}})[T]$ と T から到達可能な項の集合 $[T](\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}})$ の結果の違いについて説明する．

T から到達可能な項の集合 $[T](\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}})$ の認識可能性については以下の結果が知られている．

命題 3 [9, 6] 項書き換えシステム $\mathcal{R}$ を線形かつ右シャローとし，T を認識可能な項集合とする．このとき，$[T](\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}})$ は認識可能である．

命題 4 [6] 項書き換えシステム $\mathcal{R}$ を右線形かつ右シャローとし，T を認識可能な項集合とする．このとき，一般には $[T](\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}})$ は認識可能ではない．

次に，T へ到達可能な項の集合 $(\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}})[T]$ の認識可能性について，シャロー性，線形性を用いた条件を示す．

補題 19 項書き換えシステム $\mathcal{R}$ が左線形かつ左シャローとする．このとき，以下の条件をみたすならば書き換え系列 $\overline{s} \circ\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}} \overline{t}$ は $ibu(1)$ となる．(1) $\overline{s}$ がマーク増加かつ $mmax(\overline{s}) \le 1$．(2) 書き換え系列 $\overline{s} \circ\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}} \overline{t}$ が弱ボトムアップ．

証明．書き換え系列 $\overline{s} \circ\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}} \overline{t}$ の長さ n に関する帰納法で示す．

$(B.S.)$ $n = 0$ のとき．$mmax(\overline{s}) \le 1$ より書き換え系列 $s \circ\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}} t$ は $ibu(1)$ であることは明らか．

$(I.S.)$ $n \ge 1$ のとき．書き換え系列 $\overline{s} \circ\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}} \overline{t}$ は $\overline{s} = \overline{s}_0 \circ\underset{i}{\rightarrow} \overline{s}_1 \circ\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}} \overline{s}_n = \overline{t}$ とおける．$\overline{s}_0 \circ\underset{i}{\rightarrow} \overline{s_1}$ よりある書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$，文脈 $C[\ ]$，代入 $\overline{\sigma}$ が存在して，$\overline{s}_0 = C[\overline{l}\overline{\sigma}]$，$\overline{s}_1 = C[r\hat{\sigma}]$ とおける．ただし，$\hat{\sigma}(x) = \overline{\sigma}(x) \odot M(C[\overline{l}], x)$ とする．補題 5 より $\overline{s}_1$ はマーク増加．また，書き換え系列 $\overline{s} \circ\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}} \overline{t}$ が弱ボトムアップであることから，$\overline{s}_1 \circ\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}} \overline{s}_n$ も弱ボトムアップであることがいえる．したがって，$mmax(\overline{s}_1) \le 1$ を示せば，帰納法の仮定より $\overline{s}_1 \circ\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}} \overline{s}_n$ が $ibu(1)$ となるので $\overline{s} \circ\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}} \overline{t}$ が $ibu(1)$ が示せる．書き換え系列 $\overline{s} \circ\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}} \overline{t}$ が弱ボトムアップなので，$m(\overline{l}) = 0$ である．したがって，$\overline{s}$ がマーク増加より，$C[\overline{l}]$ において $\overline{l}$ より上の位置でのマークはすべて 0 である．$\overline{l}$ はシャローであるから，出現する変数の深さは 0 または 1 である．よって，任意の変数 $x \in Var(\overline{l})$ について $M(C[\overline{l}], x) = 1$ となる．$mmax(\overline{s}_0) < 0$ より，$\hat{\sigma}(x) = \overline{\sigma}(x) \odot M(C[\overline{l}], x)$ であることに注意すると $mmax(\overline{s}_1) = mmax(C[r\hat{\sigma}]) \le 1$ となる．

以上より $\overline{s} \circ\overset{*}{\underset{i}{\rightarrow}} \overline{t}$ は $ibu(1)$ であることが示された． □

補題 20 項書き換えシステム $\mathcal{R}$ が左線形かつ左シャローとする．このとき，$\mathcal{R}$ は $ibu(1)$.

証明. s から t への任意の最内書き換え $s \overset{*}{\underset{i}{\to}} t$ について，補題 16 より $s \overset{*}{\underset{i}{\circ\!\!\to}} \bar{t}$ となる弱ボトムアップ書き換えが存在する．$\bar{s}$ はマーク増加かつ $mmax(\bar{s}_0) \leq 1$ なので，補題 19 より $s \overset{*}{\underset{i}{\circ\!\!\to}} \bar{t}$ は $ibu(1)$ である．よって，s から t への任意の最内書き換え $s \overset{*}{\underset{i}{\to}} t$ について，$ibu(1)$ 書き換え系列が存在するので $\mathcal{R}$ は $ibu(1)$ である． □

定理 4 項書き換えシステム $\mathcal{R}$ を左線形かつ左シャローとし，T を認識可能な項集合とする．このとき $(\overset{*}{\underset{i}{\to}})[T]$ は認識可能である．

証明. 補題 20 より $\mathcal{R}$ は $ibu(1)$ である．T が認識可能なので定理 1 より $(\overset{*}{\underset{i}{\to}})[T]$ は認識可能である． □

例 7 以下の左線形かつ左シャローな $\mathcal{R}$，T を考える．

$$\mathcal{R} = \begin{cases} i(x) & \to & f(x,c) \\ h(x) & \to & f(g(x),x) \\ h(x) & \to & h(x) \\ g(a) & \to & a \\ b & \to & a \end{cases}$$
$$T = \{f(f(a,a),c)\}$$

定理 4 より $(\overset{*}{\underset{i}{\to}})[T]$ は認識可能である． □

項集合 T から項書き換えシステム $\mathcal{R}$ で到達可能な項集合 $[T](\overset{*}{\to}_{\mathcal{R}})$ と項集合 T へ項書き換えシステム $\mathcal{R}^{-1}$ で到達可能な項集合 $(\overset{*}{\to}_{\mathcal{R}^{-1}})[T]$ は等しい．したがって，左線形かつ左シャローな項書き換えシステムにおいて $[T](\overset{*}{\to})$ が認識可能であることと，右線形かつ右シャローな項書き換えシステムにおいて $(\overset{*}{\to})[T]$ が認識可能であることは等しい．このため，命題 4 と定理 4 は矛盾するようにみえる．しかし，以下の例に示すように最内書き換えの場合は $[T](\overset{*}{\underset{i}{\to}}_{\mathcal{R}})$ と $(\overset{*}{\underset{i}{\to}}_{\mathcal{R}^{-1}})[T]$ が等しくならない場合がある．このため，命題 4 と定理 4 は矛盾しない．

例 8 以下の右線形かつ右シャローな項書き換えシステム $\mathcal{R}$ と認識可能な項集合 T を考える．

$$\mathcal{R} = \begin{cases} f(x,c) & \to & i(x) \\ f(g(x),x) & \to & h(x) \\ h(x) & \to & h(x) \\ a & \to & g(a) \\ a & \to & b \end{cases}$$
$$T = \{f(f(a,a),c)\}$$

このとき，$\mathcal{R}^{-1}$ は左線形かつ左シャローな項書き換えシステムになっているここで，$i(f(g(b),b)) \notin [T](\overset{*}{\underset{i}{\to}}_{\mathcal{R}})$ からの以下の最内書き換えを考える．

$$i(f(g(b),b)) \underset{i}{\to}_{\mathcal{R}^{-1}} i(f(g(a),b)) \underset{i}{\to}_{\mathcal{R}^{-1}} i(f(g(a),a)) \underset{i}{\to}_{\mathcal{R}^{-1}} i(f(a,a)) \underset{i}{\to}_{\mathcal{R}^{-1}} f(f(a,a),c)$$

よって $i(f(g(b),b)) \in (\overset{*}{\underset{i}{\to}}_{\mathcal{R}^{-1}})[T]$ である．したがって，$(\overset{*}{\underset{i}{\to}}_{\mathcal{R}^{-1}})[T] \neq [T](\overset{*}{\underset{i}{\to}}_{\mathcal{R}})$ である． □

以下では，T が認識可能な場合の $(\overset{*}{\underset{i}{\to}})[T]$，$[T](\overset{*}{\underset{i}{\to}})$ の認識可能性を線形性，シャロー性について整理する．

まず，$[T](\overset{*}{\underset{i}{\to}})$ の場合について考える．右線形かつ右シャローは命題 4，線形かつ右シャローは命題 3 の場合である．左線形かつ右シャロー，線形かつ左シャローの場合は以下の反例が存在する．

表 1. T から到達可能な項集合の認識可能性

	右シャロー	左シャロー
線形	◯[命題 3]	×[例 10]
右線形	×[命題 4]	×[例 10]
左線形	×[例 9]	×[例 10]

例 9 以下の左線形かつ右シャローな $\mathcal{R}$ と認識可能な項集合 T を考える．

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{lcl} f(x) & \to & i(x,x) \end{array} \right.$$
$$T = \{f(g^n(a)) \mid n \geq 0\}$$

このとき，T から最内書き換えで到達可能な項集合 $[T](\xrightarrow[i]{*})$ は以下のようになる．

$$[T](\xrightarrow[i]{*}) = \{i(g^n(a), g^n(a)) \mid n \geq 0\}$$

$\{i(g^n(a), g^n(a)) \mid n \geq 0\}$ は認識可能でない．よって左線形かつ右シャローの場合，一般には $[T](\xrightarrow[i]{*})$ は認識可能でない． □

例 10 以下の線形かつ左シャローな $\mathcal{R}$ と認識可能な項集合 T を考える．

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{lcl} f(x,y) & \to & f(g(x), g(y)) \end{array} \right.$$
$$T = \{f(0,0)\}$$

このとき，T から最内書き換えで到達可能な項の集合 $[T](\xrightarrow[i]{*})$ は以下のようになる．

$$[T](\xrightarrow[i]{*}) = \{f(g^n(0), g^n(0))\}$$

この項集合は認識可能でない．よって，線形かつ左シャローな $\mathcal{R}$ の場合，一般には $[T](\xrightarrow[i]{*})$ は認識可能ではない． □

以上の結果を表 1 にまとめる．

次に $(\xrightarrow[i]{*})[T]$ の場合について考える．左線形かつ左シャローの場合は定理 4 より認識可能である．右線形かつ左シャロー，線形かつ右シャローの場合は以下の反例が存在する．

例 11 以下の右線形かつ左シャローな $\mathcal{R}$ と認識可能な項集合 T を考える．

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{lcl} i(x,x) & \to & f(x) \end{array} \right.$$
$$T = \{f(g^n(a)) \mid n \geq 0\}$$

このとき，T へ最内書き換えで到達可能な項集合 $(\xrightarrow[i]{*})[T]$ は以下のようになる．

$$(\xrightarrow[i]{*})[T] = \{i(g^n(a), g^n(a)) \mid n \geq 0\}$$

$\{i(g^n(a), g^n(a)) \mid n \geq 0\}$ は認識可能でない．よって右線形かつ左シャローの場合，一般には $(\xrightarrow[i]{*})[T]$ は認識可能でない． □

例 12 以下の線形かつ右シャローな $\mathcal{R}$ と認識可能な項集合 T を考える．

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{lcl} f(g(x), g(y)) & \to & f(x,y) \end{array} \right.$$
$$T = \{f(0,0)\}$$

このとき，T へ最内書き換えで到達可能な項の集合 $(\xrightarrow[i]{*})[T]$ は以下のようになる．

$$(\xrightarrow[i]{*})[T] = \{f(g^n(0), g^n(0))\}$$

この項集合は認識可能でない．よって，線形かつ右シャローな $\mathcal{R}$ の場合，一般には $(\xrightarrow[i]{*})[T]$ は認識可能ではない． □

表 2. T へ到達可能な項集合の認識可能性

	右シャロー	左シャロー
線形	×[例 12]	◯[定理 4]
右線形	×[例 12]	×[例 11]
左線形	×[例 12]	◯[定理 4]

以上の結果を表 2 にまとめる．右線形かつ右シャローな項書き換えシステムにおける T からの最内書き換えの結果と，左線形かつ左シャローな項書き換えシステムにおける T への最内書き換えの結果は対応しないことが見てとれる．

7　まとめ

本論文では，ボトムアップ項書き換えシステムにもとづき，最内ボトムアップ項書き換えシステムを提案し，最内ボトムアップ項書き換えシステムの最内書き換えの到達可能性が判定可能であることを示した．最内ボトムアップ項書き換えシステムの部分クラスである強最内ボトムアップシステムを提案し，項書き換えシステムが $SIBU(k)$ であるか否かが決定可能であることを示した．右線形かつ右シャローな項書き換えシステムにおいて，認識可能な項集合 T からの最内書き換えの到達可能性は一般には決定可能でないことはすでに知られている [6]．一方，本論文の結果から左線形かつ左シャローな項書き換えシステムにおいて，認識可能な項集合 T への最内書き換えの到達可能性は決定可能であることが明らかになった．

本論文では，項書き換えシステムが $SIBU(k)$ に含まれるか否かは決定可能であることを示した．しかし，項書き換えシステムが $IBU(k)$，IBU，$SIBU$ にそれぞれ含まれるか否かの決定可能性については明らかになっていない．今後は，項書き換えシステムが $SIBU$ に含まれるか否かの決定可能性について検討していきたい．また，今回使用したマーク付けの方法以外でも同様の結果が得られる．今後の課題としては，他のマーク付けの検討やどのようなマーク付けならば到達可能性の判定が可能になるか明らかにすることなどがある．

謝辞

本論文に貴重なコメントを頂きました査読者に感謝いたします．なお，本研究は一部日本学術復興会科学研究費 22500002，23500002 の補助を受けて行われた．

参考文献

[1] F. Baader and T. Nipkow, *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[2] H. Comon, M. Dauchet, R. Gilleron, C. Löding, F. Jacquemard, D. Lugiez, S. Tison, and M. Tommasi, *Tree Automata Technique and Applications*, http://www.grappa.univ-lille3.fr/tata, 2007.

[3] M. Dauchet, T. Heuillard, P. Lescanne, S. Tison, Decidability of the confluence of finite ground term rewrite systems and of other related term rewrite systems, *Information and Computation*, vol. 88, pp. 187–201, 1990.

[4] I. Durand, G. Senizergues, Bottom-up rewriting is inverse recognizability preserving, *Proceedings of the 18th International Conference on Rewriting Techniques and Applications (RTA 2007), Lecture Notes in Computer Science*, vol. 4533, pp. 107–121, 2007.

[5] I. Durand, G. Senizergues, Bottom-up rewriting for words and terms, http://arXiv.org/abs/0903.2554, 2009.

[6] A. Gascon, G. Godoy, F. Jacquemard, Closure of tree automata languages under innermost rewriting, *Proceedings of the 8th International Workshop on Reduction Strategies in Rewriting and Programming (WRS 2008), Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, vol. 237, pp. 23–38, 2009.

[7] H. Hosoya, *Foundations of XML Processing*, Cambrige University Press, 2011.

[8] F. Jacquemard, Decidable approximations of term rewriting systems, *Proceedings of the 7th International Conference on Rewriting Techniques and Applications (RTA 1996), Lecture Notes in Computer Science*, vol. 1103, pp. 362–376, 1996.

[9] Y. Kojima, M. Sakai, N. Nishida, K. Kusakari, T. Sakabe, Context-sensitive innermost reachability is decidable for linear right-shallow term rewriting systems, *IPSJ Transactions on Programming*, vol. 2, no. 3, pp. 20–32, 2009.

[10] T. Nagaya, Y. Toyama, Decidability for left-linear growing term rewriting systems, *Information and Computation*, vol. 178, pp. 499–514, 2002.

[11] T. Takai, Y. Kaji, H. Seki, Right-linear finite path overlapping rewrite systems effectively preserve recognizability, *Scienticae Mathematicae Japonicae*, vol. 72, no. 2, pp. 127–153, 2010.

付録 A　補題 12 の証明

本付録では 4 節の補題 12 の証明を与える．

証明. $\overline{s} = \overline{C}[\bar{l}\overline{\sigma}]$，$\overline{t} = \overline{C}[r\hat{\sigma}]$，$\forall x \in Var(l).x\hat{\sigma} = x\overline{\sigma} \odot M(\overline{C}[\bar{l}], x)$，$\overline{D} = Top(\overline{C})$，$\tilde{\tau} = Top(\hat{\sigma})$，$\overline{\tau}(x) = Red_{A_{in}}(\overline{\sigma}(x), Pos(\tilde{\tau}(x)))$ とする．このとき $Top(\overline{s}) \xrightarrow{*}_{A_{in}} \overline{D}[\bar{l}\overline{\tau}] \rightarrow_{S_{in}} \overline{D}[r\tilde{\tau}] = Top(\overline{t})$ を示す．

1．$Top(\overline{s}) \xrightarrow{*}_{A_{in}} \overline{D}[\bar{l}\overline{\tau}]$ を示す．

$Pos_{\mathcal{F}}(Top(\overline{s})) \supseteq Pos_{\mathcal{F}}(\overline{D}[\bar{l}\overline{\tau}])$ を示せば補題 2 より成立する．弱ボトムアップより $m(\bar{l}) = 0$ となることと $\overline{s}$ がマーク増加であることから，$\overline{C}$ の □ より上の位置でのマークは 0 である．したがって，補題 9 より以下が成立する．

$$Top(\overline{s}) = Top(\overline{C}[\bar{l}\overline{\sigma}]) = Top(\overline{C})[Top(\bar{l}\overline{\sigma})] \tag{1}$$

また，$\overline{\tau}(x) = Red_{A_{in}}(\overline{\sigma}(x), Pos(\tilde{\tau}(x)))$ より以下が成立する．

$$Pos_{\mathcal{F}}(\overline{D}[\bar{l}\overline{\tau}]) = Pos_{\mathcal{F}}(\overline{D}[\bar{l}\tilde{\tau}]) = Pos_{\mathcal{F}}(\overline{D}[\bar{l}Top(\hat{\sigma})]) \tag{2}$$

一方，補題 11 より $Pos_{\mathcal{F}}(Top(\bar{l}\overline{\sigma})) \supseteq Pos_{\mathcal{F}}(\bar{l}Top(\hat{\sigma}))$ が成り立つ．よって，式 (1), (2)，補題 11 より以下が成立する．

$$Pos_{\mathcal{F}}(Top(\overline{s})) = Pos_{\mathcal{F}}(\overline{D}[Top(\bar{l}\overline{\sigma})]) \supseteq Pos_{\mathcal{F}}(\overline{D}Top([\bar{l}\hat{\sigma})]) = Pos_{\mathcal{F}}(\overline{D}[\bar{l}\overline{\sigma}])$$

よって $Pos_{\mathcal{F}}(Top(\overline{s})) \supseteq Pos_{\mathcal{F}}(\overline{D}[\bar{l}\overline{\sigma}])$ が成立する．

2．$\overline{D}[\bar{l}\overline{\tau}] \rightarrow_{S_{in}} \overline{D}[r\hat{\tau}]$ を示す．

$\overline{s} \underset{i}{{}_k\!\circ\!\!\rightarrow} \overline{t}$ が弱ボトムアップなので $\bar{l}\overline{\tau} \rightarrow r\tilde{\tau}$ は S_{in} の定義 (定義 12) の条件 (i),(ii) はみたす．$\overline{s}, \overline{t} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ なので $\overline{\sigma}, \hat{\sigma} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ である．任意の $x \in Var(l)$ について $x\overline{\sigma} \xrightarrow{*}_{A_{in}} x\overline{\tau}$，$x\hat{\sigma} \xrightarrow{*}_{A_{in}} x\tilde{\tau}$ なので $\overline{\tau}, \tilde{\tau} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}((\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}_{in})^{\leq k}))$．よって，条件 (iii) もみたす．$\overline{C}$ の □ より上の位置でのマークは 0 なので任意の $x \in Var(l)$ について $M(\overline{C}[\bar{l}], x) = M(\bar{l}, x)$ である．よって，$x\hat{\sigma} = x\overline{\sigma} \odot M(\bar{l}, x)$ および $x\tilde{\tau} = x\overline{\tau} \odot M(\bar{l}, x)$ である．また，$M(\bar{l}, x) = max\{m(\bar{l}/v) \mid v \prec u, u \in Pos(\bar{l}, x)\} + 1 \geq 1$ なので $m(xTop(\hat{\sigma})) \geq 1$ である．任意の $x \in Var(l)$ について $dpt(x\overline{\tau}) = dpt(x\tilde{\tau}) = dpt(xTop(\hat{\sigma}))$ なので Top 領域の定義 (定義 13) において u を葉の位置，u' を根位置とすると $dpt(x\overline{\tau}) = dpt(xTop(\hat{\sigma})) = |u| - |u'| \leq (k + 1 - m(xTop(\hat{\sigma})))d \leq kd$．したがって，定義 12 の条件 (iv) をみたす．$\bar{l}\overline{\sigma}$ が $\overline{s}$ の最内リデックスなので $\bar{l} = f(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n)$ とすれば $\bar{t}_i\overline{\sigma} \xrightarrow{*}_{A_{in}} (q, q')$ かつ $q' \in \mathcal{Q}_{NFf}$．任意の $x \in Var(l)$ について $x\overline{\sigma} \xrightarrow{*}_{A_{in}} x\overline{\tau}$ なので，$\bar{t}_i\overline{\sigma} \xrightarrow{*}_{A_{in}} \bar{t}_i\overline{\tau} \xrightarrow{*}_{A_{in}} (q, q')$ かつ $q' \in \mathcal{Q}_{NFf}$ となるので，定義 12 の条件 (v) をみたしている．以上より，$\bar{l}\overline{\tau} \rightarrow r\tilde{\tau}$ は定義 12 のすべての条件をみたすので $\bar{l}\overline{\tau} \rightarrow r\tilde{\tau} \in S_{in}$ となる．

3．$\overline{D}[r\tilde{\tau}] = Top(\overline{t})$ を示す．補題 9 より，$Top(\overline{t}) = Top(\overline{C}[r\hat{\sigma}]) = Top(\overline{C})[Top(r\hat{\sigma})] = \overline{D}[rTop(\hat{\sigma})] = \overline{D}[r\tilde{\tau}]$ とできる． □