書き換え帰納法に基づく帰納的定理の決定可能性

中嶋 辰成 [1], 青戸 等人 [1], 外山 芳人 [1]

[1] 東北大学 電気通信研究所

{nakazima, aoto, toyama}@nue.riec.tohoku.ac.jp

概 要　等式論理において，自然数やリストなどのデータ構造上で成立する等式を帰納的定理とよぶ．等式が帰納的定理であるか否かは一般的には決定不能であるが，いくつかの部分クラスに対する決定手続きが知られている．Giesl ら (2001,2003) の行なった被覆集合帰納法に基づく決定手続きをもとに，Falke ら (2006) は書き換え帰納法に基づく決定手続きを提案した．また，外山 (2002) は，書き換え帰納法に基づき帰納的定理の判定問題を抽象的なリダクションシステムの等価性判定問題としてとらえることで，等式が帰納的定理であるか否かを決定可能にする十分条件を示した．しかし，両者が保証している決定可能な帰納的定理のクラス間には包含関係がない．そこで，本論文では Falke らの手法をもとに外山の結果を拡張することで，従来よりも広い決定可能な帰納的定理のクラスを示す．

1　はじめに

等式論理における帰納的定理とは，自然数やリストなどの帰納的なデータ構造上で成立する等式のことをいう．一般に等式論理を固定したとき与えられた等式が帰納的定理か否かは決定不能である．しかし，帰納的定理か否か決定可能となるための等式論理と等式の条件がいくつか知られている．Giesl ら [2, 3] は項書き換えシステムに基づく被覆集合帰納法をもちいて，完備かつ十分完全な書き換えシステムに対して単純な等式が帰納的定理か否か決定可能となることを示した．さらに，Falke ら [5] は被覆集合帰納法のかわりに書き換え帰納法 [6] に基づいて，等式に非線形変数が出現したり，書き換え規則が相互再帰で定義されている場合についての帰納的定理か否か決定可能となる十分条件を示した．一方，外山 [7] は書き換え帰納法に基づいて，帰納的定理か否かを決定する抽象的な条件を与え，等式が単純な場合に決定可能であることを示した．

Falke ら [5] の手法では，書き換え規則の右辺で定義関数記号が入れ子になることを禁止しているので，書き換え規則に対する制限が必要となっている．一方，外山 [7] の手法は，書き換え規則に対する制限は不要であるが，等式が単純でなければならないため，扱うことができる等式に制限がある．したがって，それぞれの手法で保証される決定可能な帰納的定理の集合間には包含関係がない．本論文では，この両者の手法を組み合わせることにより，等式については Falke ら [5] の条件，書き換え規則については外山 [7] の条件をもちいることで，従来よりも広い決定可能な帰納的定理のクラスを示す．

本論文の構成は以下の通りである．第 2 節では，項書き換えシステムや帰納的定理について基本的な用語や概念を説明する．第 3 節では帰納的定理が決定可能となるための抽象条件について述べ，第 4 節では Falke らの十分条件で用いられている概念を使って，帰納的定理が決定可能となるための具体的な十分条件を示す．第 5 節では第 4 節で示した十分条件をもとに等式が帰納的定理か決定可能かを判定する手続きを示す．第 6 節では手続きの実装と実験結果について報告する．最後に第 7 節でまとめと今後の課題について述べる．

2　準備

本節では，項書き換えシステムおよび帰納的定理に関する基本的な定義と記法を説明する．

関数記号の集合 $\mathcal{F}$，変数の集合 $\mathcal{V}$ 上の項の集合を $T(\mathcal{F}, V)$ で表す．また，項 t に現れる変数の集合を $Var(t)$，関数記号の集合を $Fun(t)$ と記す．$Var(t) = \emptyset$ なる項 t を基底項といい，その集合を $T(\mathcal{F})$ で表す．定義関数記号の集合を $\mathcal{D}$，構成子記号の集合を $\mathcal{C}$ と表し，$\mathcal{F} = \mathcal{D} \cup \mathcal{C}$ かつ $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ とする．項 t が構成子項であるとは，$t \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ となることである．以下では，自明な場合を除くために基底構成思考は 2 個以上あるものと仮定する．項 t の部分項が s であることを $s \trianglelefteq t$ と表す．項 $f(t_1, \ldots, t_n)$ について，$f \in \mathcal{D}, t_i \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ $(i = 1, \ldots, n)$ となるとき $f(t_1, \ldots, t_n)$ を基本項という．部分項が基本項であるとき，基本部分項という．代入 σ は $\mathcal{V}$ から $T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ への写像で，$dom(\sigma) = \{x \mid \sigma(x) \neq x\}$ が有限であるものをいう．また，$ran(\sigma) = \{\sigma(x) \mid x \in dom(\sigma)\}$ とする．ここで，$dom(\sigma) = \{x_1, \ldots, x_n\}, \sigma(x_i) = t_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ のとき，$\sigma = [x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n]$ のように表記する．項 s に σ を適用して得られる項を $s\sigma$ と記す．$ran(\theta_g) \subseteq T(\mathcal{F}), ran(\theta_{gc}) \subseteq T(\mathcal{C})$ なる代入 θ_g, θ_{gc} を基底代入，基底構成子代入という．このとき，$s\theta_g$ と記した場合には $Var(s) \subseteq dom(\theta_g)$ と約束する ($s\theta_{gc}$ も同様)．$s\sigma = t\sigma$ となる代入 σ が存在するとき，s と t は単一化可能であるといい，σ を単一化子という．とくに任意の $s\sigma' = t\sigma'$ となる σ' について，$\sigma' = \sigma'' \circ \sigma$ なる代入 σ'' が存在するとき，単一化子 σ を項 s と t の最汎単一化子といい，$mgu(s, t)$ と記す．

書き換え規則 $l \to r$ は，$l \notin \mathcal{V}$ かつ $Var(r) \subseteq Var(l)$ をみたす項 l と r の組であり，項書き換えシステム R は書き換え規則の有限集合である．項書き換えシステムが構成子システムであるとは，すべての書き換え規則の左辺が基本項となることである．$l \to r \in R$ と文脈 C と代入 θ が存在するとき，項 $s = C[l\theta]$ は $t = C[r\theta]$ に書き換えることができる．この書き換え関係を $s \to_R t$ あるいは単に $s \to t$ と記す．R をもちいてそれ以上書き換えることができない項を R の正規形といい，正規形の集合を NF と記す．$\stackrel{*}{\to}, \stackrel{*}{\leftrightarrow}$ をそれぞれ $\to$ の反射推移閉包，$\to$ の等価閉包とする．無限書き換え $s_0 \to s_1 \to \cdots$ が存在しないとき，R は停止性をもつという．また，R が $\forall s, t, u.[s \stackrel{*}{\to} t \wedge s \stackrel{*}{\to} u \Rightarrow \exists v.\, t \stackrel{*}{\to} v \wedge u \stackrel{*}{\to} v]$ をみたすとき，R は合流性をもつという．R が十分完全とは $\forall s \in T(\mathcal{F}).\exists t \in T(\mathcal{C}).[s \stackrel{*}{\to} t]$ が成立することである．以降では，項書き換えシステム R を**合流性，停止性，十分完全性をみたす構成子システム**とする．

等式 $s \approx t$ が項書き換えシステム R における定理であるとは，$s \stackrel{*}{\leftrightarrow} t$ をみたすことである．また，等式 $s \approx t$ が R における帰納的定理であるとは，s と t が任意の基底代入 $\theta_g : \mathcal{V} \to T(\mathcal{F})$ に対して $s\theta_g \stackrel{*}{\leftrightarrow} t\theta_g$ をみたすことである．例えば，次の項書き換えシステム R について考える．

$$R : \begin{cases} 0 + y \to y \\ S(x) + y \to S(x + y) \end{cases}$$

このとき，等式 $0 + x \approx x$ は R の定理となる．また，$x + 0 \approx x$ は定理でないが，帰納的定理である．これは，基底項の構造に関する帰納法をもちいて $\forall\theta_g.[(x + 0)\theta_g \stackrel{*}{\leftrightarrow} x\theta_g]$ が示せるためである．

3　帰納的定理決定性の基本条件

本節では，帰納的定理か否か決定するための基本条件を文献 [7] に基づいて与える．ただし，被覆代入集合に基づいて与えた文献 [7] の基本条件に対して，本条件は最汎単一化子に基づいたより使いやすい形で与えられており，複数の書き換え規則が追加されても判定できるように拡張されている．

$T(\mathcal{F})^2$ は $T(\mathcal{F}) \times T(\mathcal{F})$ を表すものとすると，項書き換えシステム R に対して以下の補題が成立する．

補題 3.1. 項書き換えシステム R に対して以下が成立する．

$$(\leftrightarrow \cap\, T(\mathcal{F})^2)^* = \stackrel{*}{\leftrightarrow} \cap\, T(\mathcal{F})^2$$

証明. まず，$(\leftrightarrow \cap T(\mathcal{F})^2)^* \subseteq \overset{*}{\leftrightarrow} \cap T(\mathcal{F})^2$ を示す．$s_0 \leftrightarrow s_1 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow s_n(s_i \in T(\mathcal{F}), 0 \leq i \leq n)$ なる項の列を考える．このとき，$s_0, s_n \in T(\mathcal{F})$ なので成立する．次に，$(\leftrightarrow \cap T(\mathcal{F})^2)^* \supseteq \overset{*}{\leftrightarrow} \cap T(\mathcal{F})^2$ を示す．$s_0 \leftrightarrow s_1 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow s_n(s_0, s_n \in T(\mathcal{F}))$ なる項の列を考える．ここで，$W = \bigcup_i Var(s_i)$ とおき，$\theta_g(x) = u$(ただし，$u \in T(\mathcal{F}), x \in W$) なる代入 θ_g をとる．このとき，$s_0 = s_0\theta_g \leftrightarrow s_1\theta_g \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow s_n\theta_g = s_n$ となるので成立する． □

文献 [7] の補題 1 を参考に以下の補題を示す.

補題 3.2. 項書き換えシステム R_1, R_2 が以下の条件をみたしているとする.

(i) $R_1 \subseteq R_2$.

(ii) R_2 は停止性をみたす.

このとき，以下が成立する.

$$\forall s,t \in T(\mathcal{F}).[s \to_{R_2} t \Rightarrow \exists u.\ s \to_{R_1} \overset{*}{\to}_{R_2} u \overset{*}{\leftarrow}_{R_2} t] \Rightarrow \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} \cap T(\mathcal{F})^2 = \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_2} \cap T(\mathcal{F})^2 \qquad (1)$$

証明. $\overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} \cap T(\mathcal{F})^2 \subseteq \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_2} \cap T(\mathcal{F})^2$ は (i) より明らか．次に $\overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} \cap T(\mathcal{F})^2 \supseteq \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_2} \cap T(\mathcal{F})^2$ を示す．まず，$\overset{*}{\to}_{R_2} \cap T(\mathcal{F})^2 \subseteq \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} \cap T(\mathcal{F})^2$ を示す．(ii) より R_2 は停止性をみたすので，$s \overset{*}{\to}_{R_2} t\ (s, t \in T(\mathcal{F}))$ なら $s \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} t$ となることを，s に関する $\to_{R_2}$ についての整礎帰納法で証明する．$s \in NF_{R_2}$ のときは $s = t$ より成立．$s \to_{R_2} u \overset{*}{\to}_{R_2} t$ について，(1) の前提部分より，$\exists u', s'[s \to_{R_1} s' \overset{*}{\to}_{R_2} u' \overset{*}{\leftarrow}_{R_2} u]$(図 1)．ここで，(i) より $s \to_{R_2} s'$．また，$s', u', u \in T(\mathcal{F})$ に注意すると，帰納法の仮定より $s' \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} u', u' \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} u, u \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} t$ となり，$s \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} t$ が得られる．よって，$\overset{*}{\to}_{R_2} \cap T(\mathcal{F})^2 \subseteq \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} \cap T(\mathcal{F})^2$ が示された．これから，$\to_{R_2} \cap T(\mathcal{F})^2 \subseteq \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} \cap T(\mathcal{F})^2$ となるので $\leftrightarrow_{R_2} \cap T(\mathcal{F})^2 \subseteq \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} \cap T(\mathcal{F})^2$．よって，補題 3.1 から，$\overset{*}{\leftrightarrow}_{R_2} \cap T(\mathcal{F})^2 = (\leftrightarrow_{R_2} \cap T(\mathcal{F})^2)^* \subseteq (\overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} \cap T(\mathcal{F})^2)^* = \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} \cap T(\mathcal{F})^2$． □

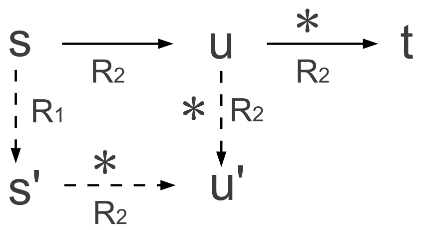

図 1. 補題 3.2 の証明

補題 3.3. $R_2 = R_1 \cup \{s \to t\}$ とする．このとき，以下が成立する．

$$\forall \theta_g . s\theta_g \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} t\theta_g \iff \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} \cap T(\mathcal{F})^2 = \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_2} \cap T(\mathcal{F})^2$$

証明. $(\Leftarrow)$ $s \to t \in R_2$ だから，任意の θ_g について $s\theta_g \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_2} t\theta_g$．よって，仮定より任意の θ_g について $s\theta_g \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} t\theta_g$.

$(\Rightarrow)$ $C_g[s\theta_g] \to_{R_2} C_g[t\theta_g]$(ただし，$C_g[s\theta_g], C_g[t\theta_g] \in T(\mathcal{F})$) を考えると，仮定より $C_g[s\theta_g] \overset{*}{\leftrightarrow}_1 C_g[t\theta_g]$ となる．それ以外の場合，任意の項 s', t' について $R_2 = R_1 \cup \{s \to t\}$ より $s' \to_{R_2} t' \Rightarrow s' \to_{R_1} t'$ となる．よって，以下が成立する．

$$\leftrightarrow_{R_2} \cap T(\mathcal{F})^2 \subseteq \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} \cap T(\mathcal{F})^2 \subseteq \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_2} \cap T(\mathcal{F})^2 \qquad (2)$$

ここで，(2) のそれぞれの反射推移閉包をとると，補題 3.1 より

$$(\leftrightarrow_{R_2} \cap T(\mathcal{F})^2)^* = \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_2} \cap T(\mathcal{F})^2$$
$$\subseteq (\overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} \cap T(\mathcal{F})^2)^* = \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} \cap T(\mathcal{F})^2$$
$$\subseteq (\overset{*}{\leftrightarrow}_{R_2} \cap T(\mathcal{F})^2)^* = \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_2} \cap T(\mathcal{F})^2$$

となる．以上より $\overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} \cap T(\mathcal{F})^2 = \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_2} \cap T(\mathcal{F})^2$. □

補題 3.4. R を十分完全な構成子システム，s を基本項とする．このとき，以下が成立する．

$$\forall \theta_{gc}.\exists l \to r \in R.\exists \sigma[mgu(s,l) = \sigma \wedge \exists \theta'_{gc}.s\theta_{gc} = s\sigma\theta'_{gc} = l\sigma\theta'_{gc}]$$

証明. R の十分完全性より，$s\theta_{gc} = l\theta$ なる $l \to r \in R$ と θ が存在する．このとき，l は任意に名前変えしてよいから s と l は単一化可能であり s と l の最汎単一化子 σ が存在する．ここで，$\theta_{gc} = \theta'_{gc} \circ \sigma$ なる代入 θ'_{gc} を考えると，$s\theta_{gc} = s\sigma\theta'_{gc} = l\sigma\theta'_{gc}$ となる． □

補題 3.5. R を十分完全な構成子システムとする．このとき，任意の基底代入 θ_g について $s\theta_g \overset{*}{\to}_R s\theta_{gc}$ なる基底構成子代入 θ_{gc} が存在する．

証明. R の十分完全性より任意の $x \in dom(\theta_g)$ について $x\theta_g \overset{*}{\to}_R t_x$ なる項 $t_x \in T(\mathcal{C})$ が存在する．よって，$\theta_{gc}(x) = t_x$(ただし，$x \in dom(\theta_g)$) となるよう θ_{gc} を定めればよい． □

補題 3.6. R_1 を合流性と十分完全性をみたす構成子システムとし，$R_2 = R_1 \cup \{s \to t\}$ とする．また，s は基本項，R_2 は停止性をみたすものとする．さらに，以下の条件を仮定する．

$$\forall l \to r \in R_1.\forall \sigma.[mgu(s,l) = \sigma \Rightarrow \exists p_\sigma, q_\sigma \in T(\mathcal{C},\mathcal{V}).s\sigma \to_{R_1} \overset{*}{\to}_{R_2} p_\sigma \wedge t\sigma \overset{*}{\to}_{R_2} q_\sigma] \tag{3}$$

このとき，以下が成立する．

$$\forall \sigma.p_\sigma = q_\sigma \iff \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} \cap T(\mathcal{F})^2 = \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_2} \cap T(\mathcal{F})^2 \tag{4}$$

証明. ($\Rightarrow$) 補題 3.2 より，以下を示せば十分である (図 2).

$$\forall u, v \in T(\mathcal{F}).[u \to_{R_2} v \Rightarrow \exists u'.\ u \to_{R_1} \overset{*}{\to}_{R_2} u' \overset{*}{\leftarrow}_{R_2} v] \tag{5}$$

$u = C_g[s\theta_g] \to_{R_2} v = C_g[t\theta_g]$ を考える．このとき，補題 3.4 と補題 3.5 および仮定 (3) をもちいて $C_g[s\theta_g] \overset{*}{\to}_{R_1} C_g[s\theta_{gc}] = C_g[s\sigma\theta'_{gc}] \to_{R_1} \overset{*}{\to}_{R_2} C_g[p_\sigma\sigma\theta'_{gc}]$ および $C_g[t\theta_g] \overset{*}{\to}_{R_1} C_g[t\theta_{gc}] = C_g[t\sigma\theta'_{gc}] \overset{*}{\to}_{R_2} C_g[q_\sigma\sigma\theta'_{gc}]$ が得られる．よって，(4) の前提部分から $C_g[p_\sigma\sigma\theta'_{gc}] = C_g[q_\sigma\sigma\theta'_{gc}]$ より (5) をみたす (図 3).

($\Leftarrow$) 以下の対偶を示す．

$$\exists \sigma.p_\sigma \neq q_\sigma \Longrightarrow \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} \cap\ T(\mathcal{F})^2 \neq \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_2} \cap\ T(\mathcal{F})^2 \tag{6}$$

$p_\sigma \neq q_\sigma$ とすると，$|T(\mathcal{C})| \geq 2$ より以下をみたす基底構成子代入 θ'_{gc} が存在する (図 4).

$$s\sigma\theta'_{gc} \to_{R_2} t\sigma\theta'_{gc} \wedge s\sigma\theta'_{gc} \to_{R_1} \overset{*}{\to}_{R_2} p_\sigma\theta'_{gc} \wedge t\sigma\theta'_{gc} \overset{*}{\to}_{R_2} q_\sigma\theta'_{gc} \wedge p_\sigma\theta'_{gc} \neq q_\sigma\theta'_{gc} \tag{7}$$

ここで，$R_1 \subseteq R_2$ より，(7) から $p_\sigma\theta'_{gc} \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_2} q_\sigma\theta'_{gc}$ となるが，$p_\sigma\theta'_{gc}, q_\sigma\theta'_{gc} \in T(\mathcal{C})$ よりこれらが R_1 の正規形であることと R_1 の合流性より $p_\sigma\theta'_{gc} \not\overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} q_\sigma\theta'_{gc}$ となる． □

以上の補題から以下の定理が成り立つ．

定理 3.7. R_1 を合流性と十分完全性をみたす構成子システムとし，$R_2 = R_1 \cup \{s \to t\}$ とする．また，s は基本項，R_2 は停止性をみたすものとする．さらに，以下の条件を仮定する．

$$\forall l \to r \in R_1.\forall \sigma.[mgu(s,l) = \sigma \Rightarrow \exists p_\sigma, q_\sigma \in T(\mathcal{C},\mathcal{V}).s\sigma \to_{R_1} \overset{*}{\to}_{R_2} p_\sigma \wedge t\sigma \overset{*}{\to}_{R_2} q_\sigma] \tag{8}$$

このとき，以下が成立する．

$$\forall \sigma.p_\sigma = q_\sigma \iff \forall \theta_g.s\theta_g \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} t\theta_g$$

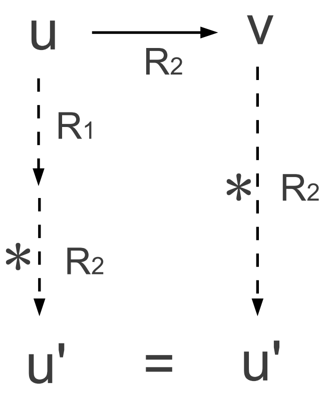

図 2. 補題 3.6 の証明 (1)

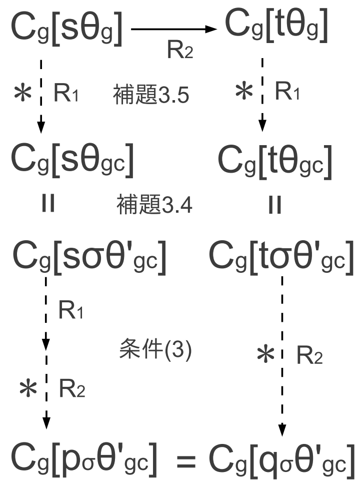

図 3. 補題 3.6 の証明 (2)

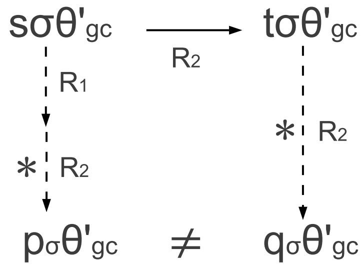

図 4. 補題 3.6 の証明 (3)

証明. 補題 3.6 および補題 3.3 より成立. □

補題 3.6 と定理 3.7 は以下のように一般化できる.

補題 3.8. R_1 を合流性と十分完全性をみたす構成子システムとし，$R_2 = R_1 \cup \{s_i \to t_i\}_i$ とする．また，s_i は基本項，R_2 は停止性をみたすものとする．このとき，以下の条件を仮定する．

$$\forall s_i.\forall l \to r \in R_1.\forall \sigma.[mgu(s_i, l) = \sigma \Rightarrow \exists p^i_\sigma, q^i_\sigma \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V}).s\sigma \to_{R_1} \xrightarrow{*}_{R_2} p^i_\sigma \wedge t\sigma \xrightarrow{*}_{R_2} q^i_\sigma]$$

このとき，以下が成立する．

$$\forall i.\forall \sigma.p^i_\sigma = q^i_\sigma \iff \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} \cap T(\mathcal{F})^2 = \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_2} \cap T(\mathcal{F})^2$$

証明. 補題 3.6 と同様に証明できる． □

定理 3.9. R_1 を合流性と十分完全性をみたす構成子システムとし，$R_2 = R_1 \cup \{s_i \to t_i\}_i$ とする．また，s_i は基本項，R_2 は停止性をみたすものとする．このとき，以下の条件を仮定する．

$$\forall s_i.\forall l \to r \in R_1.\forall \sigma.[mgu(s_i, l) = \sigma \Rightarrow \exists p^i_\sigma, q^i_\sigma \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V}).s\sigma \to_{R_1} \xrightarrow{*}_{R_2} p^i_\sigma \wedge t\sigma \xrightarrow{*}_{R_2} q^i_\sigma]$$

このとき，以下が成立する．

$$\forall i.\forall \sigma.p^i_\sigma = q^i_\sigma \iff \forall i.\forall \theta_g.s_i\theta_g \overset{*}{\leftrightarrow}_{R_1} t_i\theta_g$$

証明. 定理 3.7 と同様に証明できる． □

4 帰納的定理決定可能性の十分条件

以下では第 3 節で与えた基本条件をもちいて，書き換え帰納法に基づく帰納的定理決定可能性のより具体的な条件を与える．4.1 節では帰納的位置と非帰納的位置をもちいて基本的な条件を与える．4.2 節ではこれを非線形な変数出現がある等式へ，4.3 節では与えられた規則が相互再帰であった場合へ拡張する．

4.1 帰納的位置に基づく十分条件

外山 [7] や Giesl ら [2, 3] の条件は等式の左辺を $f(x_1,\ldots,x_n)$ の形に限定していた．それに対して，Falke らは $f(x_1,\ldots,x_n)$ の形以外の基本項を取り扱うために帰納的位置，非帰納的位置の概念を導入した．

定義 4.1. (帰納的位置 [5]) f を定義関数記号とする．以下の条件をみたす f の引数位置 i を f の非帰納的位置とよぶ．

任意の $f(l_1,\ldots,l_n) \to r \in R$ について，

1. $l_i \in \mathcal{V}$，かつ
2. $\forall f(r_1,\ldots,r_n) \trianglelefteq r.\ l_i = r_i$.

i が非帰納的位置でないとき，i は帰納的位置であるという．また，$Ind(f)$, $\overline{Ind}(f)$ はそれぞれ f の帰納的位置の集合，非帰納的位置の集合を表す．

例 4.2. 次の項書き換えシステム R を考える．

$$R : \begin{cases} f(0,y) \to y \\ f(S(x),y) \to f(f(x,y),y) \end{cases}$$

このとき，$Ind(f) = \{1\}$, $\overline{Ind}(f) = \{2\}$ となる．

以下では，一般性を失うことなく，$f(l_1,\ldots,l_k) \to r \in R$ において $k = m+n, Ind(f) = \{1,\ldots,m\}, \overline{Ind}(f) = \{m+1,\ldots,m+n\}$ とおく．このとき，非帰納的位置の条件 1 より $l_{m+1},\ldots,l_k$ は変数となるので $f(l_1,\ldots,l_k) \to r$ は $f(l_1,\ldots,l_m,y_1,\ldots,y_n) \to r$ と表すことができる．このとき，同じく非帰納的位置の条件 2 より任意の r の部分項 $r' = f(r_1,\ldots,r_k)$ について，$r_{m+i} = y_i (1 \le i \le n)$ なので，$r' = f(r_1,\ldots,r_m,y_1,\ldots,y_n)$ となることに注意する．

帰納的位置の概念をもちいて，以下の定理を示す．

定理 4.3. R を合流性，停止性，十分完全性をみたす構成子システムで，$\mathcal{D} = \{f\}$ とする．以下の条件をみたすとき，等式 $f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n) \approx t$ が R の帰納的定理か否かは決定可能である．

(i) $R' = R \cup \{f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n) \to t\}$ は停止性をもつ．

(ii) $x_1,\ldots,x_m$ は相異なる変数．

(iii) $s_1,\ldots,s_n,t \in T(\mathcal{C},\mathcal{V})$.

(iv) $x_i \notin Var(s_j)$ $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$.

証明. R の十分完全性より書き換え規則 $f(l_1,\ldots,l_m,y_1,\ldots,y_n) \to r \in R$ と $\sigma = mgu(f(x_1,\ldots,x_m, s_1,\ldots,s_n), f(l_1,\ldots,l_m,y_1,\ldots,y_n))$ なる代入 σ が存在して，$f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n)\sigma = f(l_1,\ldots,l_m, y_1,\ldots,y_n)\sigma \to_R r\sigma$ が成立する．このとき，$s_1,\ldots,s_n \in T(\mathcal{C},\mathcal{V})$ および R が構成子システムであることから，$ran(\sigma) \subseteq T(\mathcal{C},\mathcal{V})$ となることに注意する．

以下では，$r\sigma \xrightarrow{*}_{\{f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n)\to t\}} u \in T(\mathcal{C},\mathcal{V})$ となる u が存在することを示す．この性質を一般化して得られる性質

$$\forall r' \trianglelefteq r. \exists u'.\ r'\sigma \xrightarrow{*}_{\{f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n)\to t\}} u' \in T(\mathcal{C},\mathcal{V}) \tag{9}$$

を r' の構造に関する帰納法で証明する．

(Case 1)$r' = x \in \mathcal{V}$ のとき．$ran(\sigma) \subseteq T(\mathcal{C},\mathcal{V})$ より $r'\sigma = x\sigma \in T(\mathcal{C},\mathcal{V})$.

(Case 2)$r' = f(r_1,\ldots,r_m,y_1,\ldots,y_n)$ のとき．帰納法の仮定より，$r_i\sigma \xrightarrow{*}_{\{f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n)\to t\}} u_i \in T(\mathcal{C},\mathcal{V}) (1 \le i \le m)$ となる $u_1,\ldots,u_m$ が存在する．また，$\sigma = mgu(f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n), f(l_1,\ldots, l_m,y_1,\ldots,y_n))$ であることから $y_j\sigma = s_j\sigma (1 \le j \le n)$ となる．よって，$r'\sigma = f(r_1\sigma,\ldots,r_m\sigma,y_1\sigma,\ldots,$

$y_n\sigma) = f(r_1\sigma, \ldots, r_m\sigma, s_1\sigma, \ldots, s_n\sigma) \xrightarrow{*}_{\{f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n)\to t\}} f(u_1, \ldots, u_m, s_1\sigma, \ldots, s_n\sigma)$．ここで，代入 θ を

$$\theta(x) = \begin{cases} u_i & (x = x_i\text{のとき}) \\ x\sigma & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とおく．すると，条件 (ii) より $x_i\theta = u_i (1 \leq i \leq m)$，条件 (iv) より $s_j\theta = s_j\sigma (1 \leq j \leq n)$ が成立する．したがって，$f(u_1, \ldots, u_m, s_1\sigma, \ldots, s_n\sigma) = f(x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_n)\theta \to_{\{f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n)\to t\}} t\theta$．ここで，$\theta$ の定義から $ran(\theta) \subseteq T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ であるから，$t \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ より $t\theta \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$．

(Case 3) それ以外のとき．仮定より，$\mathcal{D} = \{f\}$ であるから，$r' = g(r_1, \ldots, r_l), g \in \mathcal{C}$ とおける．帰納法の仮定より $r_i\sigma \xrightarrow{*}_{\{f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n)\to t\}} u_i \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V}) (1 \leq i \leq l)$ となる．よって，$r'\sigma = g(r_1\sigma, \ldots, r_l\sigma) \xrightarrow{*}_{\{f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n)\to t\}} g(u_1, \ldots, u_l) \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$．

以上より，性質 (9) が示された．よって，$r\sigma \xrightarrow{*}_{R'} u \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ なる u が存在する．ここで，$t\sigma \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ であることに注意すると，定理 3.7 より，等式 $f(x_1, \ldots, x_m, s_1, \ldots, s_n) \approx t$ が帰納的定理か否かは決定可能となる． □

例 4.4. 次の項書き換えシステム R を考える．

$$R : \begin{cases} f(0, y, z) \to z \\ f(S(x), y, z) \to S(f(x, f(x, y, z), z)) \end{cases}$$

このとき，定理 4.3 をもちいて等式 $f(x', y', S(0)) \approx S(x')$ が帰納的定理か否か決定可能かを判定する．条件 (i) について，$R' = R \cup \{f(x', y', S(0)) \to S(x')\}$ の停止性は辞書式経路順序 [1] をもちいて容易に示せる．条件 (ii) から (iv) について判定するために f の帰納的位置と非帰納的位置を求めると，$Ind(f) = \{1, 2\}, \overline{Ind}(f) = \{3\}$ となる．条件 (ii) について，等式の帰納的位置 $\{1, 2\}$ にある項 x', y' は相異なる変数なので条件をみたす．条件 (iii) について，$f \in \mathcal{D}$ であり，非帰納的位置 $\{3\}$ にある項 $S(0)$ および等式右辺 $S(x')$ は構成子項なので条件をみたす．条件 (iv) について，等式の非帰納的位置にある項 $S(0)$ には帰納的位置にある項 x', y' が出現していないため，条件をみたしている．以上より，定理 4.3 の条件がすべてみたされたので，帰納的定理か否かは決定可能である．

実際に，定理 3.7 をもちいて帰納的定理か否か調べる．$f(0, y, z) \to z \in R$ について $\sigma = mgu(f(x', y', S(0)), f(0, y, z)) = [x' := 0, y' := y, z := S(0)]$ とおくと，$f(x', y', S(0))\sigma = \underline{f(0, y, S(0))} \to_R S(0) = S(x')\sigma$ となる．また，$f(S(x), y, z) \to S(f(x, f(x, y, z), z)) \in R$ について $\sigma = mgu(f(x', y', S(0)), f(S(x), y, z)) = [x' := S(x), y' := y, z := S(0)]$ とおくと，$f(x', y', S(0))\sigma = \underline{f(S(x), y, S(0))} \to_R S(f(x, \underline{f(x, y, S(0))}, S(0))) \to_{R'} S(\underline{f(x, S(x), S(0))}) \to_{R'} S(S(x)) = S(x')\sigma$ となる．よって，この等式は帰納的定理である． □

次に，定理 4.3 を外山 [7] の条件及び Falke ら [5] の条件と比較する．外山 [7] の条件は以下の系で表せる．

系 4.5. (外山 [7] の定理 2) R を合流性，停止性，十分完全性をみたす構成子システムで，$\mathcal{D} = \{f\}$ とする．以下の条件をみたすとき，等式 $f(x_1, \ldots, x_m) \approx t$ が R の帰納的定理か否かは決定可能である．

(i) $R' = R \cup \{f(x_1, \ldots, x_m) \to t\}$ は停止性をもつ．

(ii) $x_1, \ldots, x_m$ は相異なる変数．

(iii) $t \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$．

例 4.4 は定理 4.3 をもちいると，帰納的定理か否か決定可能である．しかし，例 4.4 の等式の左辺 $f(x', y', S(0))$ に変数でない項 $S(0)$ が出現しているため，外山の条件 (系 4.5) を適用することが

できない．また，書き換え規則 $f(S(x), y, z) \to f(x, f(x, y, z), z)$ の右辺に定義関数 f が入れ子状に出現しているため，後で示す Falke らの条件 (系 4.9) も適用することができない．以上のことから，定理 4.3 は外山の条件と Falke らの条件の真の拡張となっていることがわかる．

4.2 等式左辺に非線形な変数が出現する場合の条件

4.1 節で与えた条件では等式の左辺は相異なる変数 $x_1, \ldots, x_m$ に対して $f(x_1, \ldots, x_m, s_1, \ldots, s_n)$ の形であることが必要であった．本節では，$x_i = x_j$ なる場合 (このような x_i, x_j を非線形変数という) でも判定可能となるように前節の定理を拡張する．

定義 4.6. 等式 $f(x_1, \ldots, x_m, s_1, \ldots, s_n) \approx t$ について，$Ind(f) = \{1, \ldots, m\}$ 上の同値関係 $\sim$ を以下のように定義する．

$$i \sim j \Leftrightarrow x_i = x_j$$

この同値関係 $\sim$ をもちいて，非線形な変数をもつ等式について帰納的定理か否か決定可能となる条件を以下で与える．

定理 4.7. R を合流性，停止性，十分完全性をみたす構成子システム，$\mathcal{D} = \{f\}$ とする．以下の条件をみたすとき，等式 $f(x_1, \ldots, x_m, s_1, \ldots, s_n) \approx t$ が R の帰納的定理か否かは決定可能である．

(i) $R' = R \cup \{f(x_1, \ldots, x_m, s_1, \ldots, s_n) \to t\}$ は停止性をもつ．

(ii) $x_1, \ldots, x_m \in \mathcal{V}, s_1, \ldots, s_n, t \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$.

(iii) $f(l_1, \ldots, l_m, y_1, \ldots, y_n) \to r \in R, f(r_1, \ldots, r_m, y_1, \ldots, y_n) \trianglelefteq r$ に対して，$i \sim j$ かつ $l_i\sigma = l_j\sigma$ ならば，$r_i\sigma = r_j\sigma$.

(iv) $x_i \notin Var(s_j)$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$.

変数 $x_1, \ldots, x_m$ がすべて相異なるとき，$i \sim j \Leftrightarrow i = j$ より条件 (iii) が成立するのは明らかである．つまり，定理 4.7 は定理 4.3 を一般化している．

証明. R の十分完全性より書き換え規則 $f(l_1, \ldots, l_m, y_1, \ldots, y_n) \to r \in R$ と $\sigma = mgu(f(x_1, \ldots, x_m, s_1, \ldots, s_n), f(l_1, \ldots, l_m, y_1, \ldots, y_n))$ なる代入 σ が存在して，$f(x_1, \ldots, x_m, s_1, \ldots, s_n)\sigma = f(l_1, \ldots, l_m, y_1, \ldots, y_n)\sigma \to_R r\sigma$ が成立する．このとき，$s_1, \ldots, s_n \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ および R が構成子システムであることから，$ran(\sigma) \subseteq T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ となることに注意する．

以下では，$r\sigma \xrightarrow{*}_{\{f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n)\to t\}} u \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ となるような u が存在することを示す．この性質を一般化して得られる性質

$$\forall r' \trianglelefteq r. \exists u'.\ r'\sigma \xrightarrow{*}_{\{f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n)\to t\}} u' \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V}) \tag{10}$$

を r' の構造に関する帰納法で証明する．

(Case 1)$r' = x \in \mathcal{V}$ のとき．$ran(\sigma) \subseteq T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ より $r'\sigma = x\sigma \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$.

(Case 2)$r' = f(r_1, \ldots, r_m, y_1, \ldots, y_n), f \in \mathcal{D}$ のとき．帰納法の仮定より，$r_i\sigma \xrightarrow{*}_{\{f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n)\to t\}} u_i \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})(1 \leq i \leq m)$ なる $u_1, \ldots, u_m$ が存在する．ここで，$r_i\sigma = r_j\sigma$ ならば $u_i = u_j$ をみたすように $u_1, \ldots, u_m$ を定める．また，$\sigma = mgu(f(x_1, \ldots, x_m, s_1, \ldots, s_n), f(l_1, \ldots, l_m, y_1, \ldots, y_n))$ であることから，$x_i\sigma = l_i\sigma, y_j\sigma = s_j\sigma(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ となる．これより，$r'\sigma = f(r_1\sigma, \ldots, r_m\sigma, y_1\sigma, \ldots, y_n\sigma) = f(r_1\sigma, \ldots, r_m\sigma, s_1\sigma, \ldots, s_n\sigma) \xrightarrow{*}_{\{f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n)\to t\}} f(u_1, \ldots, u_m, s_1\sigma, \ldots, s_n\sigma)$．ここで，$i \sim j$ をみたす i, j を考えると，$x_i\sigma = x_j\sigma$ より $l_i\sigma = l_j\sigma$ となる．よって，条件 (iii) より $r_i\sigma = r_j\sigma$ が得られるので，$i \sim j$ ならば $u_i = u_j$ が成立する．ここで，代入 θ を

$$\theta(x) = \begin{cases} u_i & (x = x_i\text{のとき}) \\ x\sigma & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とおく．すると，$i \sim j$ となる i, j について $u_i = u_j$ となるため代入 θ は矛盾なく定義されている．また，条件 (iv) より $s_i\theta = s_i\sigma$ とおけるので，$f(u_1, \ldots, u_m, s_1\sigma, \ldots, s_n\sigma) = f(x_1, \ldots, x_m, s_1, \ldots, s_n)\theta$ $\to_{\{f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n)\to t\}}$ $t\theta$ となる．ここで，θ の定義から $ran(\theta) \subseteq T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ となることと $t \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ より，$t\theta \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ となる．

(Case 3) それ以外のとき．仮定 $\mathcal{D} = \{f\}$ より $r' = g(r_1, \ldots, r_l), g \in \mathcal{C}$ となる．帰納法の仮定より $r_i\sigma \xrightarrow{*}_{\{f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n)\to t\}} u_i \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})(1 \leq i \leq l)$ となる．よって，$r'\sigma = g(r_1\sigma, \ldots, r_l\sigma)$ $\xrightarrow{*}_{\{f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n)\to t\}} g(u_1, \ldots, u_l) \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$.

以上より，性質 (10) が示された．よって，$r\sigma \xrightarrow{*}_{R'} u \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ が得られる．ここで，$t\sigma \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ であることに注意すると，定理 3.7 より，等式 $f(x_1, \ldots, x_m, s_1, \ldots, s_n) \approx t$ が帰納的定理か否かは決定可能となる． □

例 4.8. 次の項書き換えシステム R を考える．

$$R : \begin{cases} f(S(x), S(y), S(z), w) \to f(x, f(x, y, z, w), f(x, y, z, w), w) & (1) \\ f(0, y, z, w) \to w & (2) \\ f(x, 0, z, w) \to w & (3) \\ f(x, y, 0, w) \to w & (4) \end{cases}$$

このとき，定理 4.7 をもちいて等式 $f(x', y', y', S(0)) \approx S(y')$ が帰納的定理か否か決定可能かを判定する．条件 (i) について，$R' = R \cup \{f(x', y', y', S(0)) \to S(x')\}$ の停止性は辞書式経路順序 [1] をもちいて容易に示せる．条件 (ii) から (iv) を判定するために f の帰納的位置と非帰納的位置を求めると，$Ind(f) = \{1, 2, 3\}, \overline{Ind}(f) = \{4\}$ となる．条件 (ii) について，帰納的位置 $\{1, 2, 3\}$ にある項 x', y' は変数である．さらに，非帰納的位置 $\{4\}$ にある項 $S(0)$ および等式右辺 $S(y')$ はいずれも構成子項である．以上より，条件 (ii) もみたされている．条件 (iii) について，各規則が条件をみたしているかを調べる．規則 (2),(3),(4) の右辺には $f(\ldots)$ となる部分項が存在しないため，条件 (iii) をみたしているのは自明である．規則 (1) について調べる．$2 \sim 3$ となることから $S(y)\sigma = S(z)\sigma$ となる代入 σ を考えると，$y\sigma = z\sigma$ が成立する．よって，規則 (1) の部分項 $f(x, f(x, y, z, w), f(x, y, z, w), w)$ と $f(x, y, z, w)$ について，

- $f(x, f(x, y, z, w), f(x, y, z, w), w)$ については $f(x, y, z, w)\sigma = f(x, y, z, w)\sigma$ より条件成立
- $f(x, y, z, w)$ については $y\sigma = z\sigma$ より条件成立

となるため，条件 (iii) をみたす．よって，この等式が帰納的定理か否かは決定可能である．

なお，実際に定理 3.7 をもちいて帰納的定理か否か調べると，帰納的定理でないことがわかる．

次に，定理 4.7 と Falke ら [5] の条件を比較する．Falke ら [5] の条件は以下の条件で表せる．

系 4.9. (Falke ら [5] の定理 9) R を合流性，停止性，十分完全性をみたす構成子システムで，$\mathcal{D} = \{f\}$ とする．さらに，R 内の規則右辺に定義関数記号の入れ子がないとする．以下の条件をみたすとき，等式 $f(x_1, \ldots, x_m, s_1, \ldots, s_n) \approx t$ が R の帰納的定理か否かは決定可能である．

(i) $R' = R \cup \{f(x_1, \ldots, x_m, s_1, \ldots, s_n) \to t\}$ は停止性をもつ．

(ii) $x_1, \ldots, x_m \in \mathcal{V}, s_1, \ldots, s_n, t \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$.

(iii) $f(l_1, \ldots, l_m, y_1, \ldots, y_n) \to r \in R, f(r_1, \ldots, r_m, y_1, \ldots, y_n) \trianglelefteq r$ に対して，$i \sim j$ かつ $l_i\sigma = l_j\sigma$ ならば，$r_i\sigma = r_j\sigma$.

(iv) $x_i \notin Var(s_j)$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$.

Falke ら [5] は同値関係 $\sim$ ではなく $ImpEq$ 集合をもちいて非線形変数が出現する場合の条件を与えた．ただし，同値関係 $\sim$ と $ImpEq$ 集合は等価なものである．また，Falke らの条件 (系 4.9) では R の右辺に定義関数の入れ子を許していないため，例 4.4 の判定はできない．そのため，定理 4.7 は Falke らの条件の拡張となっていることがわかる．

4.3 規則が相互再帰である場合の条件

規則が相互再帰になっている場合の帰納的定理が決定可能となる条件を与えるために，複数の関数で共通している非帰納的位置を考える．

定義 4.10. (共通非帰納的位置) 定義関数記号は同一のアリティ n をもつものとする．このとき，引数位置 i が $\mathcal{D}$ の共通非帰納的位置であるとは以下をみたすことである．

任意の $f(l_1,\ldots,l_n) \to r \in R$ について，

- $l_i \in \mathcal{V}$
- $\forall g \in \mathcal{D}.\ \forall g(r_1,\ldots,r_n) \trianglelefteq r.\ l_i = r_i$

$\mathcal{D}$ の共通非帰納的位置の集合を $\overline{Ind}(\mathcal{D})$ で表す．

以下では，一般性を失うことなく，$f(l_1,\ldots,l_k) \to r \in R$ において $k = m+n, \overline{Ind}(\mathcal{D}) = \{m+1,\ldots,m+n\}$ とおく．このとき，共通非帰納的位置の条件 1 より $l_{m+1},\ldots,l_k$ は変数となるので $f(l_1,\ldots,l_k) \to r$ は $f(l_1,\ldots,l_m,y_1,\ldots,y_n) \to r$ と表すことができる．このとき，同じく共通非帰納的位置の条件 2 より任意の r の部分項 $r' = g(r_1,\ldots,r_k), g \in \mathcal{D}$ について，$r_{m+i} = y_i (1 \leq i \leq n)$ だから $r' = g(r_1,\ldots,r_m,y_1,\ldots,y_n)$ となることに注意する．

定理 4.11. R を合流性，停止性，十分完全性をみたす構成子システムとし，$f \in \mathcal{D}$ は同一のアリティをもつものとする．以下の条件をみたすとき，等式集合 $E = \{f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n) \approx t_f \mid f \in \mathcal{D}\}$ が帰納的定理か否かは決定可能である．

(i) $R' = R \cup \{l \to r \mid l \approx r \in E\}$ は停止性をもつ．

(ii) $x_1,\ldots,x_m$ は相異なる変数．

(iii) $\{s_1\ldots,s_n\} \cup \{t_f \mid f \in \mathcal{D}\} \subseteq T(\mathcal{C},\mathcal{V})$．

(iv) $x_j \notin Var(s_k)(1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n)$．

証明. 任意の $f(x_1,\ldots,x_m,s_1\ldots,s_n) \to t \in E' = \{l \to r \mid l \approx r \in E\}$ について考える．R の十分完全性より，書き換え規則 $f(l_1,\ldots,l_m,y_1,\ldots,y_n) \to r \in R$ と $\sigma = mgu(f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n), f(l_1,\ldots,l_m,y_1,\ldots,y_n))$ なる代入 σ 存在して，$f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n)\sigma = f(l_1,\ldots,l_m,y_1,\ldots,y_n)\sigma \to_R r\sigma$ が成立する．このとき，$s_1,\ldots,s_n \in T(\mathcal{C},\mathcal{V})$ および R が構成子システムであることから，$ran(\sigma) \subseteq T(\mathcal{C},\mathcal{V})$ となることに注意する．

以下では，$r\sigma \stackrel{*}{\to}_E u \in T(\mathcal{C},\mathcal{V})$ となるような u が存在することを示す．この性質を一般化して得られる性質

$$\forall r' \trianglelefteq r. \exists \sigma.\ r'\sigma \stackrel{*}{\to}_{E'} u' \in T(\mathcal{C},\mathcal{V}) \tag{11}$$

を r' の構造に関する帰納法で証明する．

(Case 1)$r' = x \in \mathcal{V}$ のとき．$ran(\sigma) \subseteq T(\mathcal{C},\mathcal{V})$ より，$r'\sigma = x\sigma \in T(\mathcal{C},\mathcal{V})$

(Case 2)$r' = g(r_1,\ldots,r_m,y_1,\ldots,y_n), g \in \mathcal{D}$ のとき．帰納法の仮定より $r_i\sigma \stackrel{*}{\to}_{E'} u_i \in T(\mathcal{C},\mathcal{V})(1 \leq i \leq m)$ となる $u_1,\ldots,u_n$ が存在する．また，$\sigma = mgu(f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n), f(l_1,\ldots,l_m,y_1,\ldots,y_n))$ であるから $y_j\sigma = s_j\sigma(1 \leq j \leq n)$ となる．よって，$r'\sigma = g(r_1\sigma,\ldots,r_m\sigma,y_1\sigma,\ldots,y_n\sigma) = g(r_1\sigma,\ldots,r_m\sigma,s_1\sigma,\ldots,s_n\sigma) \stackrel{*}{\to}_{E'} g(u_1,\ldots,u_m,s_1\sigma,\ldots,s_n\sigma)$．ここで，

$$\theta(x) = \begin{cases} u_i & (x = x_i \text{のとき}) \\ x\sigma & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

とおくと，条件 (ii) より $x_i\theta = u_i(1 \leq i \leq m)$ となり，条件 (iv) より $s_j\theta = s_j\sigma(1 \leq j \leq n)$ となるので，$g(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n) \to t_g \in E'$ より $g(u_1,\ldots,u_m,s_1\sigma,\ldots,s_n\sigma) = g(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n)\theta \to_{E'}$

$t_g\theta$ となる．ここで，θ の定義から $ran(\theta) \subseteq T(\mathcal{C},\mathcal{V})$ となることと，$t_g \in T(\mathcal{C},\mathcal{V})$ より $t_g\theta \in T(\mathcal{C},\mathcal{V})$ となる．

(Case 3) それ以外のとき．$r' = g(r_1,\ldots,r_n), g \in \mathcal{C}$ となる．帰納法の仮定より $r_i\sigma \xrightarrow{*}_{E'} u_i \in T(\mathcal{C},\mathcal{V})(1 \leq i \leq m)$ となる．よって，$r'\sigma = g(r_1\sigma,\ldots,r_n\sigma) \xrightarrow{*}_{E'} g(u_1,\ldots,u_n) \in T(\mathcal{C},\mathcal{V})$.

以上より，性質 (11) が示された．よって，$r\sigma \xrightarrow{*}_{E'} u \in T(\mathcal{C},\mathcal{V})$ が得られる．ここで，$t\sigma \in T(\mathcal{C},\mathcal{V})$ であることに注意すると，定理 3.9 より，等式集合 E の等式すべてが R の帰納的定理か否かは決定可能となる． □

例 4.12. 次の項書き換えシステム R を考える．

$$R : \begin{cases} f(S(x),y,z) \to f(g(x,y,z),f(x,y,z),z) \\ f(0,y,z) \to 0 \\ g(S(x),y,z) \to g(f(x,y,z),f(x,y,z),z) \\ g(0,y,z) \to 0 \end{cases}$$

このとき，定理 4.3 をもちいて等式 $E = \{f(x',y',S(0)) \approx x', g(x',y',S(0)) \approx x'\}$ が帰納的定理か否か決定可能か判定する．条件 (i) について，$R' = R \cup E$ の停止性は停止性証明器 [4] をもちいて示すことができる．条件 (ii) から (iv) を判定するために $\mathcal{D}$ の共通非帰納的位置を求めると，$\overline{Ind}(\mathcal{D}) = \{3\}$ となる．以下では，E の要素についてそれぞれ調べる．

- $f(x',y',S(0)) \approx x'$ について．条件 (ii) について，等式の共通非帰納的位置でない位置 $\{1,2\}$ にある項 x',y' は相異なる変数であるため，条件をみたす．条件 (iii) について，等式の共通非帰納的位置 $\{3\}$ にある項 $S(0)$ 及び等式右辺 x' は構成子項であるから条件をみたす．条件 (iv) について，等式の共通非帰納的位置にある項 $S(0)$ には共通非帰納的位置でない位置にある項 x',y' が出現していないため条件をみたす．
- $g(x',y',S(0)) \approx S(x')$ についても，同様に条件 (ii) から (iv) をみたす．

以上より，すべての規則で定理 4.11 の条件をすべてみたしてるため，この等式が帰納的定理であるか否かは決定可能である．

なお，実際に定理 3.9 をもちいて帰納的定理か否か調べると，帰納的定理でないことがわかる．

Falke らは規則が相互再帰かつ等式左辺に変数が非線形に出現する場合の条件を示した．ここでは，規則は相互再帰だが等式左辺に変数が線形に出現している場合のみを示している．

5 帰納的定理決定可能性判定手続き

以下では，4 節で与えた帰納的定理決定可能性の十分条件に基づいて，等式が与えられた書き換えシステムの帰納的定理か否かの決定可能性を判定する手続きを示す.

5.1 等式左辺に変数以外の項が出現する場合の決定可能性判定手続き

定理 4.3 に基づき，等式左辺に変数以外の項が出現するときの基本的な場合についての帰納的定理決定可能性判定手続きを示す.

帰納的定理決定可能性判定手続き 1

入力:等式 $f(s_1,\ldots,s_n) \approx t$

合流性，停止性，十分完全性をみたす構成子システム R(ただし，$\mathcal{D} = \{f\}$)

出力:判定結果

1. $R' = R \cup \{f(s_1,\ldots,s_n) \to t\}$ の停止性を調べる．

2. R から f の帰納的位置 $Ind(f)$ と非帰納的位置 $\overline{Ind}(f)$ を調べる．このとき，最大となる $\overline{Ind}(f)$ をとる．
3. 2. の結果をもちいて，集合 $\{s_1, \ldots, s_n\}$ を $I = \{s_i \mid i \in Ind(f)\}, NI = \{s_i \mid i \in \overline{Ind}(f)\}$ に分割する．
4. I の要素がすべて相異なる変数か調べる．偽なら判定失敗を返す．
5. $NI \cup \{t\} \subseteq T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ か調べる．偽なら判定失敗を返す．
6. 任意の $x_i \in I$ と $s_i \in NI$ について，$x_i \notin Var(s_i)$ となるか調べる．結果が偽であれば判定失敗を返す．
7. 判定成功を返す．

例 5.1. 以下の書き換えシステム R と等式を帰納的定理決定判定手続き 1 に入力し，等式が帰納的定理か否か決定可能か判定する．

$$R : \begin{cases} f(S(x), y, z) \to S(f(x, f(x, y, z), z)) \\ f(0, y, z) \to z \end{cases}$$

$$\text{等式:} f(x', y', S(0)) \approx S(x')$$

1. $R' = R \cup \{f(x', y', S(0)) \to S(x')\}$ の停止性を調べる．R' の停止性は辞書式経路順序により容易に示せる．
2. R から f の帰納的位置と非帰納的位置を調べると $Ind(f) = \{1, 2\}, \overline{Ind}(f) = \{3\}$ となる．
3. 2. で調べた位置をもとに集合 $\{x', y', S(0)\}$ を分割すると $I = \{x', y'\}, NI = \{S(0)\}$ となる．
4. I の要素がすべて相異なる変数か判定すると $x', y' \in \mathcal{V}$ かつ $x' \neq y'$ より真となる．
5. $NI \cup \{S(x')\} \subseteq T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ か調べると $S(0), S(x') \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ より真となる．
6. 任意の $x_i \in I, s_i \in NI$ について，$x_i \notin Var(s_i)$ か調べると $x', y' \notin Var(S(0))$ より真となる．
7. 判定成功を返す．

よって，等式 $f(x', y', S(0)) \approx S(x')$ は R の帰納的定理であるか否かは決定可能である．

5.2 等式左辺に非線形な変数が出現する場合の決定可能性判定手続き

定理 4.7 をもとに，等式左辺に変数以外の項が出現するときの帰納的定理決定可能性判定手続きを以下のように定める．

帰納的定理決定可能性判定手続き 2

入力:等式 $f(s_1, \ldots, s_n) \approx t$

合流性，停止性，十分完全性をみたす構成子システム R(ただし，$\mathcal{D} = \{f\}$)

出力:判定結果

(手順 1 から 3 は帰納的定理決定可能性判定手続き 1 と同じ)

4. $I \subseteq \mathcal{V}$ か調べる．偽なら判定失敗を返す．
5. $NI \cup \{t\} \subseteq T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ か調べる．偽なら判定失敗を返す．
6. 任意の $x_i \in I$ と $s_i \in NI$ について，$x_i \notin Var(s_i)$ となるか調べる．結果が偽であれば判定失敗を返す．
7. $i, j \in Ind(f), i \neq j$ について $x_i = x_j$ か調べ，同値関係 $i \sim j$ を構成する．
8. すべての $f(l_1, \ldots, l_n) \to r \in R$ について以下を行う．

8a. $i \sim j$ なる $i, j (i < j)$ の組について $\sigma = mgu(l_i, l_j)$ を求める．

8b. $\forall f(r_1, \ldots, r_n) \trianglelefteq r$ について $i \sim j \Rightarrow r_i\sigma = r_j\sigma$ を判定する．$i \sim j \wedge r_i\sigma \neq r_j\sigma$ なら判定失敗を返す．

9. 判定成功を返す．

帰納的定理決定可能性判定手続き 2 は帰納的定理決定可能性判定手続き 1 と似ているが，手続き 2 については等式が線形である必要がないため 4. で線形か否かを調べておらず，7. 以降で非線形変数に関する調査が行われている．

例 5.2. 以下の書き換えシステム R と等式を帰納的定理決定可能性判定手続き 2 に入力し，等式が帰納的定理か否か決定可能か判定する．

$$R : \begin{cases} f(S(x), S(y), S(z), w) \to f(x, f(x, y, z, w), f(x, y, z, w), w) \\ f(0, y, z, w) \to w \\ f(x, 0, z, w) \to w \\ f(x, y, 0, w) \to w \end{cases}$$

等式:$f(x', y', y', S(0)) \approx S(x')$

1. $R' = R \cup \{f(x', y', y', S(0)) \to S(x')\}$ の停止性を調べる．R' の停止性は辞書式経路順序により容易に示せる．
2. R から f の帰納的位置と非帰納的位置を調べると $Ind(f) = \{1, 2, 3\}, \overline{Ind}(f) = \{4\}$ となる．
3. 2. で調べた位置をもとに集合 $\{x', y', S(0)\}$ を分割すると $I = \{x', y'\}, NI = \{S(0)\}$ となる．
4. $I \subseteq \mathcal{V}$ か調べると $x', y' \in \mathcal{V}$ より真である．
5. $NI \cup \{S(x')\} \subseteq T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ か調べると $S(0), S(x') \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ より真である．
6. 任意の $x_i \in I$ と $s_i \in NI$ について，$x_i \notin Var(s_i)$ となるか調べると $x', y' \notin S(0)$ より真である．
7. $i, j \in Ind(f), i \neq j$ について $x_i = x_j$ か調べ，同値関係 $i \sim j$ を構成すると $2, 3 \in Ind(f)$ について $x_2 = x_3 = y'$ より，$\sim \cap \{(i, j \mid i < j)\} = \{(2, 3)\}$ である．
8. それぞれの規則について 8a. から 8b. を行う．
   - $f(S(x), S(y), S(z), w) \to f(x, f(x, y, z, w), f(x, y, z, w), w)$ について．

     8a. $2 \sim 3$ について $\sigma = mgu(S(y), S(z))$ を求めると $\sigma = [y := z]$ となる．

     8b. $f(x, f(x, y, z, w), f(x, y, z, w), w)$ の f を根記号とする部分項を調べる．
     * $f(x, f(x, y, z, w), f(x, y, z, w), w)$ について．$2 \sim 3 \Rightarrow f(x, y, z, w)\sigma = f(x, y, z, w)\sigma$ を判定するとこれは明らかに真である．
     * $f(x, y, z, w)$ について．$2 \sim 3 \Rightarrow y\sigma = z\sigma$ を判定すると $y\sigma = z\sigma = z$ より真である
   - $f(0, y, z, w) \to w$ について．

     8a. $2 \sim 3$ について $\sigma = mgu(y, z)$ を求めると $\sigma = [y := z]$ となる．

     8b. w は f を根記号とする部分項をもたないので，条件をみたすのは自明
   - 他の 2 つの規則についても，$f(0, y, z, w) \to w$ のときと同様に条件をみたすのは自明．
9. 判定成功を返す．

よって，等式 $f(x', y', y', S(0)) \approx S(x')$ が R の帰納的定理か否かは決定可能である．

5.3 規則が相互再帰である場合の決定可能性判定手続き

定理 4.11 をもとに，規則が相互再帰になっているときの帰納的定理決定可能性判定手続きを以下のように定める．

帰納的定理決定可能性判定手続き 3

入力:等式 $E = \{f(s_{f,1}, \ldots, s_{f,n}) \approx t_f \mid f \in \mathcal{D}\}$

　　合流性，停止性，十分完全性をみたす構成子システム R

出力:判定結果

1. $R' = R \cup \{s \to t \mid s \approx t \in E\}$ の停止性を調べる．
2. R から $\mathcal{D}$ の共通非帰納的位置 $\overline{Ind}(\mathcal{D})$ を調べる．このとき，最大となるよう $\overline{Ind}(\mathcal{D})$ をとる．
3. E の要素の等式すべてにおいて，左辺の同じ位置にある項が等しいか調べる．偽なら判定失敗を返す．
4. $f(s_{f,1}, \ldots, s_{f,n}) \approx t_f \in E$ について以下を行う．
   - 4a. 2. の結果をもちいて集合 $\{s_{f,1}, \ldots, s_{f,n}\}$ を $I_f = \{s_i \mid s_i \notin \overline{Ind}(\mathcal{D})\}, NI_f = \{s_i \mid s_i \in \overline{Ind}(\mathcal{D})\}$ に分割する．
   - 4b. 以下が成立するか調べる．いずれかが偽なら判定失敗を返す．
     - I_f の要素がすべて相異なる変数.
     - $NI_f \cup \{t_f\} \subseteq T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$.
     - 任意の $x_i \in I_f$ と $s_i \in NI_f$ について，$x_i \notin Var(s_i)$.
5. 判定成功を返す.

例 5.3. 以下の書き換えシステム R と等式 E を帰納的定理決定可能性判定手続き 3 に入力し，等式が帰納的定理か否か決定可能か判定する．

$$R : \begin{cases} f(S(x), y, z) \to f(g(x, y, z), f(x, y, z), z) \\ f(0, y, z) \to 0 \\ g(S(x), y, z) \to g(f(x, y, z), f(x, y, z), z) \\ g(0, y, z) \to 0 \end{cases}$$

等式 E:$\{f(x', y', S(0)) \approx x', g(x', y', S(0)) \approx x'\}$

1. $R' = R \cup \{s \to t \mid s \approx t \in E\}$ の停止性を調べる．R' の停止性は停止性証明器 [4] をもちいて示せる．
2. R から $\mathcal{D}$ の共通非帰納的位置を調べると $\overline{Ind}(\mathcal{D}) = \{3\}$ となる．
3. E の要素の等式すべてにおいて，左辺の同じ共通非帰納的位置にある項が等しいか調べると共通非帰納的位置 3 にある項はいずれも $S(0)$ である．
4. 等式 $f(x', y', S(0)) \approx S(x')$ について以下を行う．
   - 4a. 2. の結果をもちいて集合 $\{x', y', S(0)\}$ を分割すると $I_f = \{x', y'\}, NI_f = \{S(0)\}$ となる．
   - 4b. 以下が成立するか調べる．
     - I_f の要素が相異なる変数か調べると $x', y' \in \mathcal{V}$ かつ $x' \neq y'$ より真となる．
     - $NI_f \cup \{x'\} \subseteq T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ か調べると $S(0), x' \in T(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ より真である．
     - 任意の $x_i \in I_f$ と $s_i \in NI_f$ について，$x_i \notin Var(s_i)$ か調べると $x', y' \notin Var(S(0))$ より真である．
5. 判定成功を返す.

よって，E の要素の等式すべてが R の帰納的定理か否かは決定可能である．

6　決定可能性判定手続きの実装と実験

前節で示した手続きを SML/NJ をもちいて実装した．なお，各手続きで必要となる項書き換えシステムの合流性，停止性，十分完全性は仮定して実装を行なった．

実装した帰納的定理決定可能性自動判定システムをもちいて，用意した 8 例について，外山の条件 (系 4.5)，Falke の条件 (系 4.9)，および本論文で提案した条件に基づいて，帰納的定理か否かの自動判定の実験を行った．

表 1 で示すとおり，外山の条件と Falke らの条件では等式と項書き換えシステムのいずれかあるいは両方が条件をみたしていないため判定に失敗していた例が，本論文の条件だと判定に成功していることがわかる．

表 1. 帰納的定理の判定実験

例	等式左辺		規則		外山	Falke ら	本論文
	非変数	非線形	関数の入れ子	相互再帰			
1	あり	なし	なし	なし	×	◯	◯
2	なし	なし	あり	なし	◯	×	◯
3	あり	なし	あり	なし	×	×	◯
4	なし	なし	あり	なし	◯	×	◯
5	あり	あり	あり	なし	×	×	◯
6	なし	あり	なし	なし	×	◯	◯
7	あり	なし	なし	あり	×	◯	◯
8	あり	なし	あり	あり	×	×	◯

(◯:判定成功，×:判定失敗)

7　まとめ

本論文では，従来の帰納的定理が決定可能となる条件を組み合わせた新たな条件を提案し，等式に非線形変数が出現する場合や規則が相互再帰である場合について帰納的定理か否かが決定可能となる条件を示した．この条件によって従来よりも広いクラスに対して帰納的定理が決定可能となる．さらに，この条件に基づいて帰納的定理の自動判定手続きを実装し，実験を通して提案した判定手法の有効性を確認した．

今後の課題としては，書き換え規則が相互再帰かつ等式が非線形である場合や，等式左辺に定義関数の入れ子がある場合への判定条件の拡張を行うことがあげられる．

謝辞

本論文に貴重なコメントを頂きました査読者に感謝致します．なお，本研究は一部日本学術振興会科学研究費 22500002，23500002 の補助を受けて行われた．

参考文献

[1] F. Baader and T. Nipkow, *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press 1998.

[2] J. Giesl and D. Kapur, Decidable class of inductive theorems, LNCS 2083 (2001)，469–484.

[3] J. Giesl and D. Kapur, Deciding inductive validity of equations, LNCS 2741 (2003)，17–31.

[4] M. Korp, C. Sternagel, H. Zankl and A. Middeldorp, Tyrolean Termination Tool 2, LNCS 5595 (2009), 295–304.

[5] S. Falke and D. Kapur，Inductive decidability using implicit induction，LNAI 4246 (2006)，45–59.

[6] U. S. Reddy, Term rewriting inducion, LNCS 449 (1990), 162–177.

[7] 外山芳人，書き換え帰納法による帰納的定理の決定手続き，日本ソフトウェア科学会第 19 回大会論文集，3A-2，2002.