永続性と減少ダイアグラム法に基づく合流性証明法

内田 和真　青戸 等人　外山 芳人

項書き換えシステムの合流性証明法としてルールラベリングに基づく減少ダイアグラム法が知られている．しかし，非線形項書き換えシステムに対してはこの証明法をそのまま適用することは困難である．一方，非線形項書き換えシステムの合流性証明法として永続性と危険対解析を組み合わせた手法が提案されている．本報告では，非線形項書き換えシステムに適用可能な，永続性と減少ダイアグラム法に基づく新しい合流性証明法を提案する．

1　はじめに

抽象書き換えシステムの合流性証明法として減少ダイアグラム法が知られている [6] [7]．また，減少ダイアグラム法とルールラベリングを用いて左線形かつ停止性をもたない項書き換えシステムの合流性証明法が提案されている [1] [4] [7] [8]．しかし，非線形項書き換えシステムに減少ダイアグラム法を直接適用することは一般に困難である．

一方で，非線形かつ停止性をもたない項書き換えシステムの合流性判定法として，項書き換えシステムに型付けを行なっていくつかの部分システムに分解し，部分システムの合流性から永続性を利用して全体の合流性を示す方法が提案されている [2]．また，型付けによる分解に失敗する場合でも，型付き項書き換えシステムが弱左線形のときはその弱左非線形変数を正規項で具体化して得られる左線形項書き換えシステムの合流性から，元の項書き換えシステムの合流性を示す方法も提案されている [5]．

本報告では，永続性と減少ダイアグラム法を組み合わせた非線形項書き換えシステムの合流性自動証明法を提案する．本証明法では，減少ダイアグラム法が直接適用できない項書き換えシステム R について，R から得られる型付き項書き換えシステム R^τ に含まれる非線形変数に任意の正規項を代入し，R^τ を無限個の書き換え規則をもつ線形項書き換えシステム R^τ_{nf} に変換する．さらに，R^τ_{nf} に減少ダイアグラム法を直接適用することで元の項書き換えシステム R の合流性を導く．

Confluence of Term Rewriting Systems based on Persistency and Decreasing Diagrams.

Kazumasa Uchida,Takahito Aoto,Yoshihito Toyama, 東北大学電気通信研究所, Dept. of Research Institute of Electrical Communication, Tohoku University.

2　準備

ここでは，抽象リダクションシステムおよび項書き換えシステムの基本的な用語や概念について説明する [3]．

ラベル集合を I とし，$\rightarrow_\alpha$ を $\alpha \in I$ によってラベル付けされた集合 T 上の関係とする．このとき，$A = (T, \langle\rightarrow_\alpha\rangle_{\alpha\in I})$ を抽象リダクションシステム，$\rightarrow_\alpha$ をリダクション関係という．また，$\succ$ は I 上の整礎な半順序とする．$\alpha \in I$ について，$\curlyvee\alpha = \{\beta \in I | \alpha \succ \beta\}$ と定義する．また，α，β のどちらかより真に小さいラベルの集合を $\curlyvee\alpha\cup\beta = \curlyvee\alpha \cup \curlyvee\beta$ と定義する．$\rightarrow$ の反射閉包を $\xrightarrow{=}$，対称閉包を $\leftrightarrow$，推移閉包を $\xrightarrow{+}$，反射推移閉包を $\xrightarrow{*}$，同値閉包を $\xleftrightarrow{*}$ とそれぞれ表す．

関数記号の集合を F，変数記号の集合を V，また F と V からなる項の集合を $T(F, V)$ と表す．項 t に 1 回だけ出現する変数を線形変数，2 回以上出現する変数を非線形変数とよぶ．各変数が高々1 回しか現れない項を線形項，非線形変数を含んだ項を非線形項とよぶ．

項 t に出現する変数集合を $V(t)$，項 t に出現する非線形変数集合を $V_{nl}(t)$ と表す．項 t の位置の集合 $Pos(t)$ を $t \in V$ のとき $Pos(t) = \{\epsilon\}$，$t \equiv f(t_1, t_2, ..., t_n)$ のとき $Pos(t) = \{\epsilon\} \cup \{iu \mid 1 \leq i \leq n, u \in Pos(t_i)\}$ と定義する．項 t の位置 p での部分項を $t|_p$，位置 p に出現する関数記号を $t(p)$ と表す．項 t における関数記号の位置集合を $Pos_F(t) = \{p \in Pos(t) \mid t(p) \in F\}$，変数記号の位置集合を $Pos_V(t) = Pos(t) \backslash Pos_F(t)$ と定義する．p と q をある項における位置とする．また，ある正整数列 o が存在して $po = q$ をみたすとき $p \geq q$ と順序付けされ，このとき位置 o は $p \backslash q$ と表される．$p \parallel q$ を $p \not\geq q \wedge q \not\geq p$ と定義する．ホールとよばれる特別な定数記号 $\Box$ を含む項を文脈とよぶ．文脈 C においてホールが位置 $p_i (1 \leq i \leq n)$ に出現しているとき，位置 p_i のホールを項 t_i で置き換えて得られる項を $C[t_1, \ldots, t_n]_{p_1, \ldots, p_n}$ と表す．代入 θ は，$\theta : V \to T(F, V)$ で定義される関数である．$\theta(t)$ は $t\theta$ とも表される．

項の対 (l, r) が $l \notin V$ かつ $V(r) \subseteq V(l)$ をみたすとき，これを書き換え規則とよび $l \to r$ と表す．項書き換えシステム R は書き換え規則の有限集合である．書き換え規則 $l \to r$ の両辺が線形項ならば，この書き換え規則 $l \to r$ は線形であるという．項書き換えシステム R が線形であるとは，R のすべての書き換え規則が線形であることをいう．書き換え規則 $l \to r$ に出現する非線形変数集合を $V_{nl}(l \to r) = V_{nl}(l) \cup V_{nl}(r)$，線形変数集合を $V_l(l \to r) = V(l) \backslash V_{nl}(l \to r)$ と定義する．書き換え規則 $l \to r \in R$，文脈 $C[\ ]$，代入 θ が存在して $s = C[l\theta]_p$かつ $t = C[r\theta]_p$ となるとき，項 s が項 t に書き換えられるといい，$s \to t$ と表す．また，項 s の部分項 $l\theta$ をリデックスといい，リデックスを持たない項を正規形という．ある書き換え $C[l\theta] \to C[r\theta]$ について，リデックス $l\theta$ の真部分項が正規形となるとき，この書き換えを最内書き換えとよぶ．最内書き換えを $\underset{im}{\to}$ と表す．また，$s \overset{*}{\underset{im}{\to}} t$ となる正規形 t が存在するとき，項 s を最内正規という．

項 s, t について，$s\theta = t\theta$ をみたす代入 θ を単一化子とよび，s と t の最汎単一化子を $mgu(s, t)$ と表す．項 t が項 s に対して位置 $p \in Pos_F(s)$ で重なるとは，$s|_p$ と t が最汎単一化子をもつことをいう．変数を共有しない書き換え規則 $l_1 \to r_1$，$l_2 \to r_2$ について，位置 p が存在し l_1 と $l_2|_p \notin V$ が単一化可能で，l_1 と $l_2|_p$ の最汎単一化子を θ としたとき，項の対 $\langle l_2[r_1]_p\theta, r_2\theta \rangle_{l_1 \to r_1, l_2 \to r_2}$ は $l_1 \to r_1$，$l_2 \to r_2$ に対する危険対とよばれる．ただし，2 つの書き換え規則が同一のときは $p \neq \epsilon$ とする．R に含まれる書き換え規則から得られる危険対の集合を $CP(R)$ と表記する．

項書き換えシステム R が合流性をもつとは，任意の項 t, t_1, t_2 に対して，$t_1 \overset{*}{\leftarrow}_R t \overset{*}{\to}_R t_2$ ならば，ある項 s が存在して $t_1 \overset{*}{\to}_R s \overset{*}{\leftarrow}_R t_2$ となることである．

命題 2.1 ([5]) 項書き換えシステム R_1，R_2 の書き換え関係を $\underset{1}{\to}$，$\underset{2}{\to}$ とし，また $\underset{1}{\to} \subseteq \underset{2}{\to} \subseteq \overset{*}{\underset{1}{\leftrightarrow}}$ が成り立つとする．このとき，R_1 が合流性をもつならば R_2 も合流性をもつ．

2.1　減少ダイアグラム法による合流条件

$\alpha, \beta \in I$ に対して，$\leftarrow_\alpha \cdot \to_\beta \subseteq \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha} \cdot \overset{=}{\to}_\beta \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha\cup\beta} \cdot \overset{=}{\leftarrow}_\alpha \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\beta}$ をみたす整礎な半順序 $\succ$ が存在するとき，$\to_\alpha$ と $\to_\beta$ は局所減少性をもつという．また，抽象リダクションシステム $A = (T, \langle \to_\alpha \rangle_{\alpha \in I})$ が局所減少性をもつとは，整礎な半順序 $\succ$ が存在して，すべての $\alpha, \beta \in I$ に対して，$\to_\alpha$ と $\to_\beta$ が局所減少性をもつことである．

命題 2.2 (減少ダイアグラム法に基づく合流性 [7]) 抽象リダクションシステム $A = (T, \langle \to_\alpha \rangle_{\alpha \in I})$ が局所減少性をもつとき，A は合流性をもつ．

項書き換えシステム R の書き換え規則へラベル付けすることをルールラベリングという [1] [8]．R 上のラベリング関数を $\delta : R \to \mathbb{N}$ とし，$s = C[l\theta]$，$t = C[r\theta]$，$\delta(l \to r) = i$ のとき $s \to_i t$ とラベル付けされる．

2.2　永続性による合流条件

ソートの集合を S とする．変数 x にソート σ，n 引数関数の関数記号 f にソート $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n \to \sigma$ を関連付ける型付けを τ と定義する．項 t を τ で型付けしたものを t^τ と表し，その型を $\tau(t)$ と表す．ある

項 $C[s]$ が存在して $C[s^\sigma]^\tau$ と型付けされるとき $\tau \gtrsim \sigma$ と記す．このとき，$\gtrsim$ は擬半順序となる．型付け τ が R において矛盾がないとは，任意の $l \to r \in R$ において l，r が型付けされて $\tau(l) = \tau(r)$ となることをいう．このとき，$\tau(l \to r) = \tau(l)$ と定める．R 上の矛盾のない型付け τ から得られる型付き項書き換えシステムを $R^\tau = \{l^\tau \to r^\tau \mid l \to r\}$ と定義する．型 σ をもつ項に適用可能な R^τ の書き換え規則の集合を R^τ_σ と表す．R の合流性と R^τ の合流性が等価であることは以下の命題より知られている．

命題 2.3 (永続性[2]**)** R が合流性をもつことと R^τ が合流性をもつことは等価である．

3　弱線形システム

項書き換えシステム R に減少ダイアグラム法を直接適用するには R が線形となっている必要がある．そこで，左辺と右辺に現れる非線形変数を対象とした弱線形システムを提案する．最初に，非線形型付き項書き換えシステム R^τ が弱線形システムならば，無限個の書き換え規則をもつ線形型付き項書き換えシステム R^τ_{nf} に変換できることを示す．次に，R^τ が弱線形かつ R^τ_{nf} が合流性をもつとき，R^τ は合流性をもつことを示す．

3.1　弱線形システムの線形化

ここでは，弱線形な非線形型付き項書き換えシステム R^τ を無限個の書き換え規則をもつ線形型付き項書き換えシステム R^τ_{nf} に変換する手法を示す．変数 x に対応する定数 c_x の集合を $C_V = \{c_x \mid x \in V\}$ とする．以下では，書き換えを行う項の集合として，$T(F,V)$ の代わりに基底項集合 $T(F \cup C_V)$ をもちいる．項 $t \in T(F,V)$，$\{x_1,\ldots,x_n\} = V(t)$ とおくと，$x_1,\ldots,x_n$ を定数 $c_{x_1},\ldots,c_{x_n}$ に置き換えた基底項 $t^c \in T(F \cup C_V)$ が得られ，$t \to s \Leftrightarrow t^c \to s^c$ が成立する．よって，項書き換えシステムが $T(F,V)$ 上で合流性をもつことと $T(F \cup C_V)$ 上で合流性をもつことは等価である．また，以下では $T(F \cup C_V) \cap NF(R^\tau)$ を $T_{NF}(F \cup C_V)$ と表す．

定義 3.1 (非線形型) ある型付き項書き換えシステム R^τ について，$l \to r \in R^\tau$ と $x \in V_{nl}(l) \cup V_{nl}(r)$ が存在し $\sigma = \tau(x)$ となるときの型 σ を R^τ の非線形型とよぶ．また，R^τ 上の非線形型の集合を $NL^\tau(R^\tau)$ と表す．

定義 3.2 (型付き項の変数) R^τ 上の型付き項 t に対して非線形型変数集合を $V_{NL^\tau}(t) = \{x \in V(t) \mid \tau(t) \in NL^\tau(R^\tau)\}$，線形型変数集合を $V_{L^\tau}(t) = V(t) \setminus V_{NL^\tau}(t)$ と表す．

例 3.3 以下の項書き換えシステム R とその一般的な型付け τ を考える．

$$R = \begin{cases} f(x,x,y) \to f(x,g(x),y) \\ f(x,y,z) \to h(a) \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} f: & 0 \times 0 \times 1 & \to & 2, \quad g: \ 0 \ \to \ 0 \\ h: & 0 & \to & 2, \quad a: \quad\ \to \ 0 \end{array}$$

R^τ 上に変数の型を明示すると，$R^\tau = \{f(x^0,x^0,y^1) \to f(x^0,g(x^0),y^1), f(x^0,y^0,z^1) \to h(a)\}$ となる．このとき，$NL^\tau(R^\tau) = \{0\}$ が得られ，$V_{NL^\tau}(f(x^0,x^0,y^1)) = \{x\}$，$V_{NL^\tau}(f(x^0,y^0,z^1)) = \{x,y\}$，$V_{L^\tau}(f(x^0,x^0,y^1)) = \{y\}$，$V_{L^\tau}(f(x^0,y^0,z^1)) = \{z\}$ となる．

定義 3.4 (弱線形) 型 σ が最内正規であるとは，$\tau(t) = \sigma$ となる任意の項 t が最内正規であることをいう．また，型付き項書き換えシステム R^τ のすべての非線形型が最内正規であるとき，R^τ は弱線形であるという．

定義 3.5 (型付き項書き換えシステムの線形化) 弱線形な型付き項書き換えシステム R^τ の非線形変数に正規形を代入して得られる線形な型付き項書き換えシステム R^τ_{nf} を $R^\tau_{nf} = \{l\hat\theta \to r\hat\theta \mid l \to r \in R^\tau, \hat\theta : V_{nl}(l \to r) \to T_{NF}(F \cup C_V)\}$ と定義する．

例 3.6 以下の型付き項書き換えシステム R^τ を考える．

$$R^\tau = \begin{cases} f(x,x,y) \to f(x,g(x),y) \\ f(x,y,z) \to h(a) \end{cases}$$

このとき，$V_{NL^\tau}(f(x,x,y)) = \{x\}$，$V_{NL^\tau}(f(x,y,z)) = \{x,y\}$ より，$R^\tau_{nf} = \{f(s,s,y) \to f(s,g(s),y) | s \in T_{NF}(F \cup C_V)\} \cup \{f(x,y,z) \to h(a)\}$ が得られる．

3.2 線形化されたシステムの合流性

ここでは，R^τ_{nf} の合流性から R^τ の合流性を導く．以下では，$T(F \cup C_V)$ 上での R^τ の書き換えを $\to$，R^τ_{nf} の書き換えを $\underset{nf}{\to}$ とする．

補題 3.7 弱線形な型付き項書き換えシステム R^τ 上の型 σ を非線形型とする．任意の項 $t \in T(F \cup C_V)$ について，$\tau(t) = \sigma$ が成り立つならば，ある項 $s \in NF(R^\tau)$ が存在し，$t \overset{*}{\underset{nf}{\to}} s$ となる．

証明. R^τ は弱線形なので，項 t は R^τ 上で最内正規．よって t は R^τ の最内書き換えによって正規形 s へ書き換え可能である．このとき，R^τ の最内書き換えは R^τ_{nf} でシミュレーションできる． □

補題 3.8 $t, t' \in T(F \cup C_V)$ とする．R^τ が弱線形かつ $t \to t'$ ならば，ある項 s が存在し，$t \overset{*}{\underset{nf}{\to}} s$ かつ $t' \overset{*}{\underset{nf}{\to}} s$ となる．

証明. $l \to r \in R^\tau$，$t = C[l\theta] \to C[r\theta] = t'$，$\theta = [x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n, y_1 := u_1, \ldots, y_m := u_m]$，$V_{nl}(l \to r) = \{x_1, \ldots, x_n\}$，$V_l(l \to r) = \{y_1, \ldots, y_m\}$ とする．非線形性より，項 $t_1, \ldots, t_n$ は最内正規となり，それぞれ正規形 $s_1, \ldots, s_n$ をもつ．非線形変数への代入を $\hat{\theta} = [x_1 := s_1, \ldots, x_n := s_n]$，線形変数への代入を $\theta' = [x_1 := u_1, \ldots, x_m := u_m]$ とすると、$C[l\theta] \overset{*}{\underset{nf}{\to}} C[l\hat{\theta}\theta']$，$C[r\theta] \overset{*}{\underset{nf}{\to}} C[r\hat{\theta}\theta']$ が成り立つ．定義 3.5 より，$l\hat{\theta} \to r\hat{\theta} \in R^\tau_{nf}$．よって，$C[l\hat{\theta}\theta'] \underset{nf}{\to} C[r\hat{\theta}\theta']$ となり，$s = C[r\hat{\theta}\theta']$ とすれば題意をみたす． □

補題 3.9 R^τ が弱線形で，R^τ_{nf} が合流性をもつとき，R^τ は合流性をもつ．

証明. 定義 3.5 から $\underset{nf}{\to} \subseteq \to$，補題 3.8 から $\to \subseteq \overset{*}{\underset{nf}{\leftrightarrow}}$ が得られる．よって，命題 2.1 から R^τ の合流性が示される． □

4 非線形項書き換えシステムの合流性

本節では，非線形項書き換えシステム R の合流条件を R が重なりをもたない場合と重なりをもつ場合に分けて考える．

4.1 重なりをもたないシステムの合流性

ここでは，非線形項書き換えシステム R が重なりをもたないとき，R の合流性を示すには R^τ が弱線形であることを示せば十分であることを示す．

補題 4.1 型付き項書き換えシステム R^τ が重なりをもたないならば，R^τ_{nf} も重なりをもたない．

証明. $l_1\hat{\theta}_1 \to r_1\hat{\theta}_1, l_2\hat{\theta}_2 \to r_2\hat{\theta}_2 \in R^\tau_{nf}$ とおく．このとき，$l_1\hat{\theta}_1$ が $l_2\hat{\theta}_2$ に位置 $p \in Pos(l_2\hat{\theta}_2)$ で重なると仮定して矛盾を導く．

1. $p \in Pos_F(l_2)$ のとき．このとき，$l_2 = C[u]_p$ となる l_2 の部分項 u と $l_1\hat{\theta}_1$ について，$mgu(l_1\hat{\theta}_1, u) = \theta$ となる最汎単一化子 θ が存在する．このとき，u と l_1 の最汎単一化子は $mgu(l_1, u) = \hat{\theta}_1\theta$ となる．しかし，これは R^τ が重なりをもたないことに矛盾する．
2. $p \notin Pos_F(l_2)$ のとき．このとき，$p_0 \in Pos_{V_{NL}}(l_2)$，$p_0 \leq p$ なる位置 p_0 が存在する．$x = l_2|_{p_0}$，$t = x\hat{\theta}_2$ とおく．このとき，$t = C[u']_{p/p_0}$ となる t の部分項 u' と $l_1\hat{\theta}_1$ について，$mgu(l_1\hat{\theta}_1, u') = \theta'$ となる最汎単一化子 θ' が存在する．しかし，定義 3.5 より t は正規形であり矛盾する． □

定義 4.2 (R^τ_{nf} に対するラベル付け) R^τ 上のラベリング関数を δ としたとき，R^τ_{nf} 上のラベリング関数 $\hat{\delta}$ を $\hat{\delta}(l\hat{\theta} \to r\hat{\theta}) = \delta(l \to r)$ と定める．

補題 4.3 型付き項書き換えシステム R^τ_{nf} について，$l_1\hat{\theta}_1 \to r_1\hat{\theta}_1, l_2\hat{\theta}_2 \to r_2\hat{\theta}_2 \in R^\tau_{nf}$，$l_1$ と l_2 は重なりをもたないものとする．このとき，

$$s = s[l_1\hat{\theta}_1\theta']_p \underset{nf_\alpha}{\to} s[r_1\hat{\theta}_1\theta']_p = t$$
$$s = s[l_2\hat{\theta}_2\theta']_q \underset{nf_\beta}{\to} s[r_2\hat{\theta}_2\theta']_q = u$$

ならば，$t \overset{=}{\underset{nf_\beta}{\to}} \cdot \overset{=}{\underset{nf_\alpha}{\leftarrow}} u$ が成り立つ．

証明. p と q の位置による場合分けを行う．

1. $p \parallel q$ のとき．このとき，

$$s = s[l_1\hat{\theta}_1\theta', l_2\hat{\theta}_2\theta']_{p,q}$$
$$t = s[r_1\hat{\theta}_1\theta', l_2\hat{\theta}_2\theta']_{p,q}$$
$$u = s[l_1\hat{\theta}_1\theta', r_2\hat{\theta}_2\theta']_{p,q}$$

とおける．よって，以下が成立する．

$$t = s[r_1\hat{\theta}_1\theta', l_2\hat{\theta}_2\theta']_{p,q} \underset{nf_\beta}{\to} s[r_1\hat{\theta}_1\theta', r_2\hat{\theta}_2\theta']_{p,q}$$
$$\underset{nf_\alpha}{\leftarrow} s[l_1\hat{\theta}_1\theta', r_2\hat{\theta}_2\theta']_{p,q} = u$$

2. $q \leq p$ のとき．
   (a) $p\backslash q \in Pos(l_2\hat{\theta}_2)$ のとき．補題 4.1 より，$l_1\hat{\theta}_1$ と $l_2\hat{\theta}_2$ は重なりをもたない．よって，(t, u) は存在しない．
   (b) ある $q_0 \in Pos_{V_L}(l_2)$ が存在し，$qq_0 \leq p$ のとき．このとき，$l_1\hat{\theta}_1 \to r_1\hat{\theta}_1, l_2\hat{\theta}_2 \to r_2\hat{\theta}_2$ の線形性より，以下が成立する．
   $$s = s[l_1\hat{\theta}_1\theta']_p \underset{nf_\alpha}{\to} s[r_1\hat{\theta}_1\theta']_p = t$$
   $$s = s[l_1\hat{\theta}_1\theta']_p \underset{nf_\beta}{\to} s[l_1\hat{\theta}_1\theta'']_p = u$$
   また，$r_1\hat{\theta}_1$ の線形性から，$t \underset{nf_\beta}{\overset{=}{\to}} s[r_1\hat{\theta}_1\theta'']_p \underset{nf_\alpha}{\leftarrow} u$ が成り立つ．
3. $q > p$ のとき．2 と同様．

よって，すべての場合で $t \underset{nf_\beta}{\overset{=}{\to}} \cdot \underset{nf_\alpha}{\overset{=}{\leftarrow}} u$ が成り立つ．

□

定理 4.4 重なりのない項書き換えシステム R から得られる型付き項書き換えシステム R^τ が弱線形とする．このとき，R は合流性をもつ．

証明. R が重なりをもたないので，R^τ も重なりをもたない．また，補題 4.1 より R^τ_{nf} も重なりをもたないので補題 4.3 より R^τ_{nf} は局所減少性をもち，命題 2.2 より合流性をもつ．よって，補題 3.9，命題 2.3 より R の合流性が示される．

□

4.2 重なりをもつシステムの合流性

ここでは，非線形項書き換えシステム R が重なりをもつ場合の合流条件を検討する．以下では，R^τ は弱線形性をもつものとする．

命題 4.5 ([5]) $l_1\hat{\theta}_1 \to r_1\hat{\theta}_1 \in R^\tau_{nf}$ が $l_2\hat{\theta}_2 \to r_2\hat{\theta}_2 \in R^\tau_{nf}$ に対して位置 p で重なるとし，そのときの危険対を $\langle \hat{v_1}, \hat{v_2} \rangle$ とする．このとき，$l_1 \to r_1 \in R^\tau$ が $l_2 \to r_2 \in R^\tau$ に対して位置 p で重なりをもち，その危険対 $\langle v_1, v_2 \rangle$ に対してある $\hat{\theta}$ が存在して $v_1\hat{\theta} = \hat{v_1}$，$v_2\hat{\theta} = \hat{v_2}$ となる．また，任意の変数 $x \in V_{nl}(v_1) \cup V_{nl}(v_2)$ について $x\hat{\theta} \in T_{NF}(F \cup C_V)$ が成立する．

ここで，危険対に対する局所減少性を保証するための条件 $Cond(\alpha, l \to r)$ を以下のように定義する．

定義 4.6 ($Cond(\alpha, l \to r)$) $l \to r \in R^\tau$ とする．任意の $x \in V_{nl}(l \to r)$ について，$\tau(x) \gtrsim \tau(l' \to r')$ なるすべての $l' \to r' \in R^\tau$ に対して $\alpha \succ \delta(l' \to r')$ をみたすとき，$Cond(\alpha, l \to r)$ が成り立つという．

補題 4.7 $l \to r \in R^\tau$，$\delta(l \to r) = \beta$ とする．このとき，$Cond(\alpha, l \to r)$ が成立し，$s = C[l\theta] \to_\beta C[r\theta] = t$ ならば，$s \underset{nf_{\curlyvee\alpha}}{\overset{*}{\to}} \cdot \underset{nf_\beta}{\to} \cdot \underset{nf_{\curlyvee\alpha}}{\overset{*}{\leftarrow}} t$ が成り立つ．

証明. $\theta = [x_1 := t_1, \ldots, x_n := t_n, y_1 := u_1, \ldots, y_m := u_m]$，$V_{nl}(l \to r) = \{x_1, \ldots, x_n\}$，$V_l(l \to r) = \{y_1, \ldots, y_m\}$ とする．補題 3.7 より，項 $t_1, \ldots, t_n$ についてそれぞれ正規形 $s_1, \ldots, s_n$ が存在し，また $\tau(x_i) = \tau(t_i)$ と仮定より $t_i \underset{nf_{\curlyvee\alpha}}{\overset{*}{\to}} s_i (1 \leq i \leq n)$ が成り立つ．非線形変数への代入を $\hat{\theta} = [x_1 := s_1, \ldots, x_n := s_n]$，線形変数への代入を $\theta' = [x_1 := u_1, \ldots, x_m := u_m]$ とすると $C[l\theta] \underset{nf_{\curlyvee\alpha}}{\overset{*}{\to}} C[l\hat{\theta}\theta']$，$C[r\theta] \underset{nf_{\curlyvee\alpha}}{\overset{*}{\to}} C[r\hat{\theta}\theta']$ が成り立つ．定義 3.5 より，$l\hat{\theta} \to r\hat{\theta} \in R^\tau_{nf}$．よって，$C[l\hat{\theta}\theta'] \underset{nf_\beta}{\to} C[r\hat{\theta}\theta']$ となる．

□

補題 4.8 型付き項書き換えシステム R^τ 上の任意の危険対 $\langle v_1, v_2 \rangle_{l_1 \to r_1, l_2 \to r_2} \in CP(R^\tau)$ について，$\delta(l_1 \to r_1) = \alpha$，$\delta(l_2 \to r_2) = \beta$ とするとき，$Cond(\alpha, l_2 \to r_2)$，$Cond(\beta, l_1 \to r_1)$ が成立し，さらに以下が成立するものとする．

$$v_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha} \cdot \overset{=}{\to}_\beta \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha\cup\beta} \cdot \overset{=}{\leftarrow}_\alpha \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\beta} v_2$$

このとき，任意の危険対 $\langle \hat{v_1}, \hat{v_2} \rangle \in CP(R^\tau_{nf})$ について，以下が成立する．

$$\hat{v_1} \underset{nf_{\curlyvee\alpha}}{\overset{*}{\leftrightarrow}} \cdot \underset{nf_\beta}{\overset{=}{\to}} \cdot \underset{nf_{\curlyvee\alpha\cup\beta}}{\overset{*}{\leftrightarrow}} \cdot \underset{nf_\alpha}{\overset{=}{\leftarrow}} \cdot \underset{nf_{\curlyvee\beta}}{\overset{*}{\leftrightarrow}} \hat{v_2}$$

証明. 命題 4.5 より，任意の変数 $x \in V_{nl}(v_1) \cup V_{nl}(v_2)$ について $x\hat{\theta} \in T_{NF}(F \cup C_V)$ が成り立つようなある代入 $\hat{\theta}$ が存在し，$\hat{v_1} = v_1\hat{\theta} \underset{nf_\alpha}{\leftarrow} \cdot \underset{nf_\beta}{\to} v_2\hat{\theta} = \hat{v_2}$ と表せるので，以下が成立する．

$$v_1\hat{\theta} \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha} \cdot \overset{=}{\to}_\beta \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha\cup\beta} \cdot \overset{=}{\leftarrow}_\alpha \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\beta} v_2\hat{\theta}$$

よって，補題 4.7 より以下が成立する．

$$\hat{v_1} = v_1\hat{\theta} \underset{nf_{\curlyvee\alpha}}{\overset{*}{\leftrightarrow}} \cdot \underset{nf_\beta}{\overset{=}{\to}} \cdot \underset{nf_{\curlyvee\alpha\cup\beta}}{\overset{*}{\leftrightarrow}} \cdot \underset{nf_\alpha}{\overset{=}{\leftarrow}} \cdot \underset{nf_{\curlyvee\beta}}{\overset{*}{\leftrightarrow}} v_2\hat{\theta} = \hat{v_2}$$

□

補題 4.9 型付き項書き換えシステム R^τ 上の任意

の危険対 $\langle v_1, v_2\rangle_{l_1\to r_1, l_2\to r_2} \in CP(R^\tau)$ について，$\delta(l_1 \to r_1) = \alpha$，$\delta(l_2 \to r_2) = \beta$ とするとき，$Cond(\alpha, l_2 \to r_2)$ が成立し，さらに以下が成立するものとする．

$$v_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha} \cdot \overset{=}{\rightarrow}_{\beta} \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha\cup\beta} v_2$$

このとき，任意の危険対 $\langle \hat{v_1}, \hat{v_2}\rangle \in CP(R^\tau_{nf})$ について，以下が成立する．

$$\hat{v_1} \underset{nf_{\curlyvee\alpha}}{\overset{*}{\leftrightarrow}} \cdot \underset{nf_{\beta}}{\overset{=}{\rightarrow}} \cdot \underset{nf_{\curlyvee\alpha\cup\beta}}{\overset{*}{\leftrightarrow}} \hat{v_2}$$

証明. 補題 4.8 と同様に証明できる． □

補題 4.10 型付き項書き換えシステム R^τ 上の任意の危険対 $\langle v_1, v_2\rangle_{l_1\to r_1, l_2\to r_2} \in CP(R^\tau)$ について，$\delta(l_1 \to r_1) = \alpha$，$\delta(l_2 \to r_2) = \beta$ とするとき，以下の条件 I，II，III のいずれかが成立するならば，R^τ_{nf} は合流性をもつ．

I. $Cond(\alpha, l_2 \to r_2)$，$Cond(\beta, l_1 \to r_1)$ が成立し，さらに以下が成立するものとする．

$$v_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha} \cdot \overset{=}{\rightarrow}_{\beta} \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha\cup\beta} \cdot \overset{=}{\leftarrow}_{\alpha} \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\beta} v_2$$

II. $Cond(\alpha, l_2 \to r_2)$ が成立し，さらに以下が成立するものとする．

$$v_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha} \cdot \overset{=}{\rightarrow}_{\beta} \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha\cup\beta} v_2$$

III. $Cond(\beta, l_1 \to r_1)$ が成立し，さらに以下が成立するものとする．

$$v_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha\cup\beta} \cdot \overset{=}{\leftarrow}_{\alpha} \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\beta} v_2$$

証明.

$$s = s[l_1\hat{\theta}_1\theta']_p \underset{nf_{\alpha}}{\rightarrow} s[r_1\hat{\theta}_1\theta']_p = t$$

$$s = s[l_2\hat{\theta}_2\theta']_q \underset{nf_{\beta}}{\rightarrow} s[r_2\hat{\theta}_2\theta']_q = u$$

とおく．p と q の位置による場合分けを行う．

1. $p \parallel q$ のとき．補題 4.3 より $t \underset{nf_{\beta}}{\overset{=}{\rightarrow}} \cdot \underset{nf_{\alpha}}{\overset{=}{\leftarrow}} u$ が成り立つ．
2. $q \le p$ のとき．
   (a) $p\backslash q \in Pos_F(l_2\hat{\theta}_2)$ のとき．補題 4.5 より，任意の変数 $x \in V_{NL^\tau}(v_1) \cup V_{NL^\tau}(v_2)$ について $x\hat{\theta} \in T_{NF}(F \cup C_V)$ が成り立つようなある代入 $\hat{\theta}$ が存在し，$t = s[v_1\hat{\theta}]_p \underset{nf_{\alpha}}{\leftarrow} s \underset{nf_{\beta}}{\rightarrow} s[v_2\hat{\theta}]_q = u$ と表せる．このとき，条件 I，II，III に対する場合分けで証明する．
      i. 条件 I が成り立つとき．補題 4.8 より以下が成立する．

$$t = s[v_1\hat{\theta}]_p \underset{nf_{\curlyvee\alpha}}{\overset{*}{\leftrightarrow}} \cdot \underset{nf_{\beta}}{\overset{=}{\rightarrow}} \cdot \underset{nf_{\curlyvee\alpha\cup\beta}}{\overset{*}{\leftrightarrow}} \cdot \underset{nf_{\alpha}}{\overset{=}{\leftarrow}} \cdot \underset{nf_{\curlyvee\beta}}{\overset{*}{\leftrightarrow}} s[v_2\hat{\theta}]_q = u$$

      ii. 条件 II が成り立つとき．補題 4.9 より以下が成立する．

$$t = s[v_1\hat{\theta}]_p \underset{nf_{\curlyvee\alpha}}{\overset{*}{\leftrightarrow}} \cdot \underset{nf_{\beta}}{\overset{=}{\rightarrow}} \cdot \underset{nf_{\curlyvee\alpha\cup\beta}}{\overset{*}{\leftrightarrow}} \hat{v_2} s[v_2\hat{\theta}]_q = u$$

      iii. 条件 III が成り立つとき．補題 4.9 より以下が成立する．

$$t = s[v_1\hat{\theta}]_p \underset{nf_{\curlyvee\alpha\cup\beta}}{\overset{*}{\leftrightarrow}} \cdot \underset{nf_{\alpha}}{\overset{=}{\leftarrow}} \cdot \underset{nf_{\curlyvee\beta}}{\overset{*}{\leftrightarrow}} \hat{v_2} s[v_2\hat{\theta}]_q = u$$

   (b) ある $q_0 \in Pos_{V_L}(l_2)$ が存在し，$qq_0 \le p$ のとき．補題 4.3 より $t \underset{nf_{\beta}}{\overset{=}{\rightarrow}} \cdot \underset{nf_{\alpha}}{\overset{=}{\leftarrow}} u$ が成り立つ．
3. $q > p$ のとき．2 と同様.

よって，すべての場合で局所減少性をみたすため，命題 2.2 より，R^τ_{nf} は合流性をもつ． □

定理 4.11 項書き換えシステム R から得られる型付き項書き換えシステム R^τ が弱線形とする．このとき，任意の危険対 $\langle v_1, v_2\rangle_{l_1\to r_1, l_2\to r_2} \in CP(R^\tau)$ について，$\delta(l_1 \to r_1) = \alpha$，$\delta(l_2 \to r_2) = \beta$ とするとき，以下の条件 I，II，III のいずれかが成立するならば，R は合流性をもつ．

I. $Cond(\alpha, l_2 \to r_2)$，$Cond(\beta, l_1 \to r_1)$ が成立し，さらに以下が成立するものとする．

$$v_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha} \cdot \overset{=}{\rightarrow}_{\beta} \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha\cup\beta} \cdot \overset{=}{\leftarrow}_{\alpha} \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\beta} v_2$$

II. $Cond(\alpha, l_2 \to r_2)$ が成立し，さらに以下が成立するものとする．

$$v_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha} \cdot \overset{=}{\rightarrow}_{\beta} \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha\cup\beta} v_2$$

III. $Cond(\beta, l_1 \to r_1)$ が成立し，さらに以下が成立するものとする．

$$v_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\alpha\cup\beta} \cdot \overset{=}{\leftarrow}_{\alpha} \cdot \overset{*}{\leftrightarrow}_{\curlyvee\beta} v_2$$

証明. 補題 4.10 より，R^τ_{nf} は合流性をもつ．よって，補題 3.9，命題 2.3 より R の合流性が示される． □

例 4.12 ([5]) 以下の停止性を持たない項書き換えシステム R とその一般的な型付け τ を考える．

$$R = \begin{cases} (1): & f(x,y) \to f(g(x),g(x)) \\ (2): & f(g(x),x) \to f(x,g(x)) \\ (3): & g(x) \to h(x) \end{cases}$$

$$f: \quad 0 \times 0 \quad \to \quad 1, \quad g: \quad 0 \quad \to \quad 0$$
$$h: \quad 0 \quad \to \quad 0$$

R と一般的な型付け τ から型付き項書き換えシステム R^τ が得られる．R^τ の部分システム R^τ_σ は，$R^\tau_0 = \{(3)\}$ と $R^\tau_1 = \{(1),(2),(3)\}$ である．まず，R^τ が弱線形かどうか調べる．R^τ の非線形型は型 0 のみであり，R^τ_0 は明らかに停止性をみたすので型 0 となる任意の項は最内正規である．よって R^τ は弱線形である．このとき，R^τ の危険対は

$$CP(R^\tau) = \begin{cases} \langle f(g(g(x)),g(g(x))), f(x,g(x))\rangle \\ \langle f(x,g(x)), f(g(g(x)),g(g(x)))\rangle \\ \langle f(h(x),x), f(x,g(x))\rangle \end{cases}$$

となる．ここで，$\delta((2)) = 2$，$\delta((1)) = \delta((3)) = 1$ のようなラベリングを考える．このとき，危険対 $\langle f(g(g(x)),g(g(x))), f(x,g(x))\rangle$ に対して，

$$f(g(g(x)),g(g(x))) \leftarrow_1 \leftarrow_1 f(x,g(x))$$

となるので，定理 4.11 の条件 III が成立する．危険対 $\langle f(g(g(x)),g(g(x))), f(x,g(x))\rangle$ に対しても定理 4.11 の条件 II が同様に成立する．また，危険対 $\langle f(h(x),x), f(x,g(x))\rangle$ に対して，

$$f(h(x),x) \to_1 f(g(h(x)),g(h(x))) \leftarrow_1 \leftarrow_1 \leftarrow_1 f(x,g(x))$$

となり，定理 4.11 の条件 III が成り立つ．よって，R^τ のすべての危険対は定理 4.11 のいずれかの条件をみたすので，R の合流性が示される．

5 まとめと今後の課題

本報告では，永続性と減少ダイアグラム法を組み合わせた非線形項書き換えシステムの合流性証明法を提案した．本証明法では，与えられた非線形項書き換えシステム R から型付き項書き換えシステム R^τ を構成する．次に，R^τ が弱線形ならば R^τ を無限個の書き換え規則を含む線形な項書き換えシステム R^τ_{nf} に変換する．さらに，減少ダイアグラム法を適用して R^τ_{nf} の合流性を示し，永続性をもちいて R の合流性を導く．また，本報告では，R^τ_{nf} の無限個の危険対に対する局所減少性を，R^τ の有限個の危険対に対する局所減少性から導く手法を示した．

本手法に基づく合流性自動判定法の実装，および弱線形に制限されている合流条件の拡張，ルールラベリング法の改良などは今後の課題である．

参 考 文 献

[1] Aoto, T.: Automated confluence proof by decreasing diagrams based on rule-labeling, *Proc. of 21st RTA*, LIPIcs, 2010, pp. 1–16.

[2] Aoto, T. and Toyama, Y.: Persistency of Confluence, *Journal of Universal Computer Science*, Vol. 3, No. 11(1997), pp. 1134–1147.

[3] Baader, F. and Nipkow, T.: *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, 1998.

[4] 的場正樹, 青戸等人, 外山芳人: 片側減少ダイアグラム法による項書き換えシステムの可換性証明法, コンピュータソフトウェア, Vol. 30, No. 1(2013), pp. 187–202.

[5] 鈴木翼, 青戸等人, 外山芳人: 永続性に基づく項書き換えシステムの合流性証明, コンピュータソフトウェア, 採録決定.

[6] van Oostrom, V.: Confluence by decreasing diagrams, *TCS*, Vol. 175(1997), pp. 159–181.

[7] van Oostrom, V.: Confluence by decreasing diagrams converted, *Proc. of 19th RTA, LNCS*, Vol. 5117(2008), pp. 306–320.

[8] Zankl, H., Felgenhauer, B., and Middeldorp, A.: Labelings for Decreasing Diagrams, *Proc. of 22nd RTA*, LIPIcs, 2011, pp. 377–392.