閉包操作に基づく項書き換えシステムの到達可能性判定

四方 駿作　青戸 等人　外山 芳人

項書き換えシステムの到達可能性判定問題は一般には決定不能だが，いくつかの部分クラスについては判定手続きが提案されている．とくに，基底項書き換えシステムに対しては閉包操作に基づく実際的な判定手続きが知られている．本報告では，この閉包操作を拡張することにより，右基底項書き換えシステムの到達可能性の実際的な判定手続きを提案する．

1 はじめに

項書き換えシステム $\mathcal{R}$ の到達可能性は，与えられた項 s と t に対して，項 s から項 t へ R をもちいた書き換えで到達できるかという問題である．項書き換えシステムの到達可能性は，項書き換えシステムの基本的な性質の 1 つであり，合流性の判定手続きなどでも重要な役割を果たす．このため，到達可能となる条件や判定手続きなどが研究されている [2] [3] [4] [5] [6] [8] [10] [12] [13].

項書き換えシステムの到達可能性は，一般的には決定不能であることが知られている [13]．一方で，右基底項書き換えシステム [10] や有限経路重複項書き換えシステム [12]，ボトムアップ項書き換えシステム [3] などにおいては，決定可能となることが知られている．

項書き換えシステムの到達可能性の判定手続きとして，大きく 2 通りの手法が知られている．1 つは，木オートマトンの完備化操作に基づく手法 [6] [8] [12] である．もう 1 つは，項書き換えシステムの閉包操作に基づく手法 [2] [9] [11] [4] [5] である．前者は広い適用範囲をもつが，線形性をみたさない場合は実際的な判定手続きを実現することは困難である．一方，後者の適用範囲は限られてはいるが，効率のよい実際的な判定手続きが知られている．

本研究では，従来の閉包操作を拡張することにより，適用範囲の広い到達可能性の判定法の実現を目指す．基底項書き換えシステムに対して示されている閉包操作に基づく判定手続き [2] は非常に簡明である．一方，[4] [5] で与えられている手続きは，右基底項書き換えシステムにも適用可能であるものの非常に複雑である．そこで，本報告では，右基底項書き換えシステムに対して，閉包操作に基づく到達可能性の簡明な判定手続きを提案する．

2 準備

ここでは，本報告でもちいる定義および記法を文献 [1] [7] に基づいて紹介する．

関数記号の集合を $\mathcal{F}$，変数記号の集合を $\mathcal{V}$ とし，$\mathcal{F}$ と $\mathcal{V}$ から得られる項の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{V})$ と表す．項 t に現れる変数全体の集合を $\mathcal{V}(t)$ と表し，$\mathcal{V}(t) = \emptyset$ となる t を基底項とよぶ．基底項の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ と記す．$\mathcal{F}_0$ は定数の集合を表す．項 t においてどの変数も高々1 回しか現れないとき，項 t は線形であるという．非線形項 t において $\mathcal{V}_{NL}(t)$ は t に 2 回以上現れる変数の集合とし，t^L は非線形変数を異なる新しい変数にそれぞれ置き換えて線形化した項を表す．例えば $f(x,x,y)^L = f(z,z',y)$ となる．項 t の部分項の位置は自然数の有限列で表し，部分項の位置の

Deciding Reachability for Term Rewriting Systems based on Rewrite Closure.

Shunsaku Shikata, Takahito Aoto, Yoshihito Toyama, 東北大学電気通信研究所, Research Institute of Electrical Communication, Tohoku University.

最大の長さを t の高さとする．空列を λ と記し，項の根位置を表す．項 t の位置 p における部分項を $t|_p$ と表し，項 t の位置 p にある部分項を s に置き換えて得られる項を $t[s]_p$ と表す．代入 σ とは変数集合 $\mathcal{X}$ から項の集合 $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{X})$ への写像であり，代入 σ による項 t への代入は $\sigma(t)$，または $t\sigma$ と表す．項の対 (l,r) が $l \notin \mathcal{V}$ かつ $\mathcal{V}(l) \supseteq \mathcal{V}(r)$ をみたすとき，その対を書き換え規則といい，$l \to r$ と記す．項書き換えシステム $\mathcal{R}$ は書き換え規則の有限集合である．任意の書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ において，l，r の両方が基底項 (r が基底項) のとき，$\mathcal{R}$ を基底 (右基底) とよぶ．ある書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$，代入 σ が存在して項 t の部分項 $t|_p = l\sigma$ であるとき，項 t は項 $s = t[r\sigma]_p$ へと書き換えることができる．この書き換え関係を $t \underset{\mathcal{R}}{\to} s$ と表し，$\mathcal{R}$ が明らかなとき，$\underset{\mathcal{R}}{\to}$ を $\to$ と略記する．$\to$ の根位置での書き換えを $\to_\lambda$，それより深い位置での書き換えを $\to_{>\lambda}$ と表す．$\to$ の反射推移閉包を $\to^*$ で表す．$t \to^* s$ のとき，s は t から到達可能であるという．項 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ について，$t_1 \underset{\mathcal{R}}{\to}^* u \wedge t_2 \underset{\mathcal{R}}{\to}^* u \wedge \cdots \wedge t_n \underset{\mathcal{R}}{\to}^* u$ となる書き換え列と項 u が存在するとき，項 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ は交差するといい $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}\downarrow_{\mathcal{R}}$ と表す．以下では $\mathcal{R}$ が明らかなとき，添字 $\mathcal{R}$ は省略する．また，書き換えの回数を $|t_0 \to t_1 \to \cdots \to t_n| = n$ と定義し，$|\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}\downarrow| = \sum_{i=1}^{n} |t_i \to^* u|$ と定義する．書き換え $t \to^* s$ に δ と名前付けするとき $\delta : t \to^* s$ と表し，$|\delta| = |t \to^* s|$ とする．同様に $\{c_1, \ldots, c_n\}\downarrow$ の場合は $\delta : \{c_1, \ldots, c_n\}\downarrow$ と表し $|\delta| = |\{c_1, \ldots, c_n\}\downarrow|$ とする．

3 閉包操作に基づく到達可能性判定

この節では到達可能性を判定するための閉包操作について説明するとともに，その正当性の証明を行う．

定義 1 右基底項書き換えシステム $\mathcal{R} = \{l_1 \to r_1, l_2 \to r_2, \ldots, l_n \to r_n\}$ において $l_i \notin \mathcal{F}_0$ なる $l_i \to r_i \in \mathcal{R}$ の r_i に高さ 1 の部分項 $f(c_1, \ldots, c_n)$ が現れるとき，

$$\begin{cases} c_{f(c_1,\ldots,c_n)} \to f(c_1, \ldots, c_n) \\ f(c_1, \ldots, c_n) \to c_{f(c_1,\ldots,c_n)} \end{cases}$$

という新しい書き換え規則と定数 $c_{f(c_1,\ldots,c_n)}$ を追加し，$\mathcal{R}$ の項 $f(c_1, \ldots, c_n)$ を定数 $c_{f(c_1,\ldots,c_n)}$ に置き換える．この変換を可能な限り行って得られた項書き換えシステムを $\mathcal{R}_0$ と定義する．

補題 1 基底項 t, s に対して，c_t, c_s を $\mathcal{R}_0$ を構成するときに得られる $t \underset{\mathcal{R}_0}{\longrightarrow}^* c_t, s \underset{\mathcal{R}_0}{\longrightarrow}^* c_s$ となる定数とすると，以下が成立する．

$$t \underset{\mathcal{R}}{\to}^* s \iff c_t \underset{\mathcal{R}_0}{\longrightarrow}^* c_s$$

定義 1 より $\mathcal{R}_0$ の書き換え規則を以下のような 3 種類に分けることができる．ここで $a, b, b_1, \ldots, b_n$ を定数，l を定数でない項とする．

$$\mathcal{R}_0 = \begin{cases} a \to b & \cdots(\mathrm{I}) \\ a \to f(b_1, \ldots, b_n) & \cdots(\mathrm{II}) \\ l \to b & \cdots(\mathrm{III}) \end{cases}$$

$\mathcal{R}_0$ から (I)，(II)，(III) の形の書き換え規則を追加していき，$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots$ を構成する．以下では $\mathcal{R}_i$ の部分集合で (II) の規則の集合を $\mathcal{R}_i^{<}$，(I) と (II) を $\mathcal{R}_i^{\leq}$，(III) を $\mathcal{R}_i^{>}$，(I) と (III) を $\mathcal{R}_i^{\geq}$，(I) を $\mathcal{R}_i^{=}$ とそれぞれ表す．

定義 2 $\mathcal{R}_0$ から以下のステップ 1，2 を i 回繰り返したものを $\mathcal{R}_i$ とする．ここで $a, b, b_1, \ldots, b_n, c$ は定数，l は定数でない項，代入 σ は変数から定数への写像とする．また，以下では $s \underset{\mathcal{R}_i^{<}}{\longrightarrow} t$，$\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}\downarrow_{\mathcal{R}_i^{<}}$ をそれぞれ $s \underset{i}{\overset{<}{\to}} t$，$\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}\downarrow_i^{<}$ と表す．$\mathcal{R}_i^{\leq}$，$\mathcal{R}_i^{>}$，$\mathcal{R}_i^{\geq}$，$\mathcal{R}_i^{=}$ でも同様に表す．

ステップ 1 $\mathcal{R}_i$ を含み，以下の推論規則について閉じた最小の集合を $\mathcal{R}'_i$ とする．

$$\frac{a \underset{i}{\to} b \quad b \underset{i}{\to} c}{a \underset{i}{\to} c}$$

$$\frac{a \underset{i}{\to} b \quad b \underset{i}{\to} f(b_1, \ldots, b_n)}{a \underset{i}{\to} f(b_1, \ldots, b_n)}$$

$$\frac{l \underset{i}{\to} b \quad b \underset{i}{\to} c}{l \underset{i}{\to} c}$$

$$\frac{a \underset{i}{\to} f(b_1, \ldots, b, \ldots, b_n) \quad b \underset{i}{\to} c}{a \underset{i}{\to} f(b_1, \ldots, c, \ldots, b_n)}$$

ステップ 2 $\mathcal{R}_{i+1} := \mathcal{R}'_i \cup \{a \to b\}$ とする．ただし，a, b は以下の条件をみたす定数とする．

$$a \underset{i'}{\overset{<}{\to}}{}^* l^L\sigma \wedge l \underset{i'}{\to} b \wedge a \to b \notin \mathcal{R}'_i \wedge a \neq b$$
$$\wedge \forall x \in \mathcal{V}_{NL}(l).\ \{\sigma(l^L|_p) \mid l|_p = x\}\downarrow_{i'}^{<}$$

補題 2 任意の自然数 i について，$\mathcal{R}_i$ は有限集合か

つ $\mathcal{R}'_i, \mathcal{R}_i$ は実効的な手続きで構成可能.

証明 i に関する帰納法で示す．ステップ1は定義より明らかである．ステップ2では $\mathcal{R}_i^{<}$ は基底項書き換えシステムであるため，$\{a_1, \ldots, a_n\} \downarrow_i^{<}$ は閉包操作をもちいた実効的な手続きで判定可能[2] である． □

例 1 以下の右基底項書き換えシステム $\mathcal{R}$ を考える．

$$\mathcal{R} = \begin{cases} f(g(x), x) & \to g(a) \\ g(b) & \to f(g(a), b) \\ a & \to b \end{cases}$$

定義1にしたがって $\mathcal{R}_0$ を作ると

$$\mathcal{R}_0 = \begin{cases} f(g(x), x) & \to c_g \\ g(b) & \to c_f \\ a & \to b \\ c_g & \to g(a) \\ g(a) & \to c_g \\ c_f & \to f(c_g, b) \\ f(c_g, b) & \to c_f \end{cases}$$

ここでは $c_{g(a)}, c_{f(c_{g(a)}, b)}$ をそれぞれ省略して c_g, c_f と表している．定義2にしたがって $\mathcal{R}'_0$ を構成すると，

$$\mathcal{R}'_0 = \mathcal{R}_0 \cup \left\{ \begin{array}{ll} c_g & \to g(b) \end{array} \right.$$

となる．$c_f \xrightarrow{<} g(b) \xrightarrow{<} f(g(a), b), \{a, b\} \downarrow$, $f(g(x), x) \to c_g$ より，

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}'_0 \cup \left\{ \begin{array}{ll} c_f & \to c_g \end{array} \right.$$

$\mathcal{R}'_1, \mathcal{R}_2$ を構成すると，

$$\mathcal{R}'_1 = \mathcal{R}_1 \cup \begin{cases} c_f & \to g(a) \\ c_f & \to g(b) \\ g(b) & \to c_g \\ f(c_g, b) & \to c_g \end{cases}$$

次に $c_g \xrightarrow{<} g(b), g(b) \to c_f$ より

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}'_1 \cup \left\{ \begin{array}{ll} c_g & \to c_f \end{array} \right.$$

$\mathcal{R}'_2$, を構成すると，

$$\mathcal{R}'_2 = \mathcal{R}_2 \cup \begin{cases} c_g & \to f(c_g, b) \\ c_f & \to f(c_f, b) \\ c_g & \to f(c_f, b) \\ g(a) & \to c_f \\ f(g(x), x) & \to c_f \end{cases}$$

これ以上書き換え規則を追加することはできないのでここで動作を終了する． □

補題 3 任意の定数 a, b に対して，$a \xrightarrow[i]{} b \Rightarrow a \xrightarrow[0]{}^* b$.

証明 i に関する帰納法で示す.

$(B.S.)$. $i = 0$ のとき，自明である.

$(I.S.)$. $i \geq 1$ のとき，$j = i - 1$ とすると，

(i). $(a \to b) \in \mathcal{R}'_j$ のとき，帰納法の仮定と $\mathcal{R}'_j$ の定義より成り立つ.

(ii). $(a \to b) \notin \mathcal{R}'_j$ のとき，a, b はステップ2の条件をみたすので，$a \xrightarrow[j]{}^* l^L\sigma \xrightarrow[j]{} b$. よって帰納法の仮定より成り立つ．したがって，$a \xrightarrow[i]{} b \Rightarrow a \xrightarrow[0]{}^* b$ は成り立つ. □

k を自然数とするとき，以下の命題 $A(k)$,$B(k)$,$C(k)$ を考える.

$$\begin{array}{lcl} A(k) & \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} & \delta : a \to^* b \wedge |\delta| \leq k \\ & & \Rightarrow a = b \vee \exists i.\ a \xrightarrow[i]{} b \\ B(k) & \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} & \delta : a \to^* s \notin \mathcal{F}_0 \wedge |\delta| \leq k \\ & & \Rightarrow \exists i.\ [\xi : a \xrightarrow[i]{<}^* s \wedge |\xi| \leq k] \\ C(k) & \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} & \delta : \{c_1, \ldots, c_n\} \downarrow \wedge |\delta| = k \\ & & \Rightarrow (\exists a.\ \exists i.(c_1 \xrightarrow[i]{} a \wedge \ldots \wedge c_n \xrightarrow[i]{} a) \\ & & \vee (\xi : \{c_1, \ldots, c_n\} \downarrow_i^{<} \wedge |\xi| \leq k)) \end{array}$$

補題 4 任意の k に対して，$A(k) \wedge B(k) \wedge C(k)$.

証明 k に関する帰納法で

$A(k) \wedge (A(k) \Rightarrow B(k)) \wedge (A(k) \wedge B(k) \Rightarrow C(k))$ を示す．帰納法の仮定より，$k' < k$ について $A(k')$,$A(k') \Rightarrow B(k')$, $A(k') \wedge B(k') \Rightarrow C(k')$ が成り立つと仮定する．このとき，$A(k'), B(k'), C(k')$ が成り立つことに注意する.

1. $A(k)$ を示す．$a \to^* b$ と仮定する．$a \to^* b$ の形で以下の4通りに場合分けする.

(i). $a = b$ のとき．自明である.

(ii). $a \to^* a' \to_\lambda b' \to^* b$ のとき．帰納法の仮定より $\exists i.\ a \xrightarrow[i]{} a', \exists j.\ b' \xrightarrow[j]{} b$. $m = \max(i, j) + 1$ とすると $a \xrightarrow[m]{} b$ より成り立つ.

(iii). $a \to^* l\theta \to_\lambda b' \to^* b$ のとき．ここで，$l \notin \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{X}$. $B(k)$ の帰納法の仮定より $(a \xrightarrow[i]{<}^* l\theta) \wedge (|a \to^* l\theta| \geq |a \xrightarrow[i]{<}^* l\theta|)$, $b' \xrightarrow[j]{} b \vee b' = b$. $b' = b$ のとき，$j = 0$ とする．$<$ の性質から，σ を変数から定数への写像とすると $a \xrightarrow[i]{<}^* l^L\sigma \xrightarrow[i]{<}^* l\theta$ より，$\forall x \in \mathcal{V}_{NL}(l).\ \{\sigma(l^L|_p) \mid l|_p = x\} \downarrow_i^{<}$.

- $a \neq b' \wedge a \to b \notin \mathcal{R}_i$ のとき.
  $a \xrightarrow[i]{<}^* l^L\sigma \wedge l \xrightarrow[i]{} b \wedge a \to b \notin \mathcal{R}_i \wedge a \neq b$
  $\wedge \forall x \in \mathcal{V}_{NL}(l).\ \{\sigma(l^L|_p) \mid l|_p = x\} \downarrow_i^{<}$ より，

$a \xrightarrow[i+1]{} b'$．したがって $a \xrightarrow[\max(i+1,j)]{} b$ より成り立つ．

- $a = b'$ のとき．$a = b' \xrightarrow[j]{} b$ より $a \xrightarrow[j]{} b$ で成り立つ．
- $a \to b' \in \mathcal{R}_i$ のとき．$a \xrightarrow[i]{} b'$ より，$a \xrightarrow[\max(i,j)]{} b$ で成り立つ．

(iv). $a \to^* a' \to_\lambda f(b_1,\ldots,b_n) \to^* b$ のとき．$f(b_1,\ldots,b_n) \to^* b$ の $\to^*$ が $\xrightarrow{\geq}$ を含むはずなので，(iii) の場合に帰着する．

よって $A(k)$ は成り立つ．

2. $A(k) \Rightarrow B(k)$ を示す．$a \to^* s \notin \mathcal{F}_0$ と仮定し，$s = f(s_1,\ldots,s_n)$ とする．$a \to^* s$ の根位置の書き換えが $\xrightarrow{\geq}$ を含むか否かで場合分けする．

(i). $a \to^* s' \xrightarrow{\geq}_\lambda s'' \to^* s$ のとき．根位置で $\xrightarrow{\geq}$ で書き換えているので，$\exists b \in \mathcal{F}_0.\ a \to^* s' \xrightarrow{\geq} b \to^* s$. $A(k)$ より，$\exists i.\ a \xrightarrow[i]{} b$. 帰納法の仮定より $b \xrightarrow[j]{<}{}^* s = f(s_1,\ldots,s_n)$. $<$ の性質から $a \xrightarrow[i]{} b \xrightarrow[j]{<} f(b_1,\ldots,b_n) \xrightarrow[j]{<}{}^* f(s_1,\ldots,s_n)$. したがって，$m = \max(i,j)$ とすると $a \xrightarrow[m]{<} f(b_1,\ldots,b_n) \xrightarrow[m]{<}{}^* f(s_1,\ldots,s_n)$ より成り立つ．

(ii). 根位置の書き換えがすべて $\xrightarrow{<}$ のとき．

$a \to f(a_1,\ldots,a_n) \to^*_{>\lambda} f(s_1,\ldots,s_n)$,

$a_1 \to^* s_1,\ldots,a_n \to^* s_n$. ここで帰納法の仮定より

$$\begin{cases} s_m \in \mathcal{F}_0 \Rightarrow a_m = s_m \vee \exists i_m.\ a_m \xrightarrow[i_m]{} s_m \\ s_m \notin \mathcal{F}_0 \Rightarrow \exists i_m.\ a_m \xrightarrow[i_m]{<}{}^* s_m \end{cases}$$

これより $a \to f(a_1,\ldots,a_n) \xrightarrow[j]{}{}^* f(\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_n) \xrightarrow[j]{<}{}^*_{>\lambda} f(s_1,\ldots,s_n)$. ここで

$$\begin{cases} \tilde{a}_m = s_m & (s_m \in \mathcal{F}_0) \quad \cdots(\alpha) \\ \tilde{a}_m = a_m & (s_m \notin \mathcal{F}_0) \quad \cdots(\beta) \end{cases}$$

(α) のとき，以下の推論規則

$$\frac{a \to f(a_1,\ldots,a_m,\ldots,a_n) \quad a_m \xrightarrow[i_m]{} s_m}{a \xrightarrow[i_m]{} f(a_1,\ldots,s_m,\ldots,a_n)}$$

を可能な限り適用すると，$a \xrightarrow[j]{} f(\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_n)$.

ここで $j = \max\{i_1,\ldots,i_n\}$. したがって，

$a \xrightarrow[j]{<}{}^* f(\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_n) \xrightarrow[j]{<}{}^*_{>\lambda} f(s_1,\ldots,s_n)$ より

$a \xrightarrow[j]{<}{}^* f(s_1,\ldots,s_n)$ となり成り立つ．

よって $A(k) \Rightarrow B(k)$ は成り立つ．

3. $(A(k) \wedge B(k)) \Rightarrow C(k)$ を示す．$\{c_1,\ldots,c_n\}\downarrow$ と仮定すると，$\exists s.\ c_1 \to^* s \wedge \ldots \wedge c_n \to^* s$.

(i). $s \in \mathcal{F}_0$ のとき．$A(k)$ より，

$\exists i_1,\ldots,i_n.\ c_1 \xrightarrow[i_1]{=} s \wedge \ldots \wedge c_n \xrightarrow[i_n]{=} s$.

$j = \max\{i_1,\ldots,i_n\}$ とすると，

$\exists a.\ \exists i.\ c_1 \xrightarrow[i]{} a \wedge \ldots \wedge c_n \xrightarrow[i]{} a$ は $a = s, i = j$ のときみたされるので成り立つ．

(ii). $s \notin \mathcal{F}_0$ のとき．$B(k)$ より，

$\exists i_1,\ldots,i_n.\ c_1 \xrightarrow[i_1]{<}{}^* s \wedge \ldots \wedge c_n \xrightarrow[i_n]{<}{}^* s$

$\wedge \forall m.\ |c_m \to^* s| \geq |c_m \xrightarrow[i_m]{<}{}^* s|$.

$j = \max\{i_1,\ldots,i_n\}$ をとると

$\{c_1,\ldots,c_n\}\downarrow_j^<$

$\wedge |\{c_1,\ldots,c_n\}\downarrow| \geq |\{c_1,\ldots,c_n\}\downarrow_j^<|$ より成り立つ．

1. 2. 3. より $A(k) \wedge B(k) \wedge C(k)$ は成り立つ． □

補題 5 $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \ldots$ なる無限列は存在しない．

証明 $\mathcal{R} = \{(l_1, r_1), \ldots, (l_n, r_n)\}$ において $\mathrm{LHS}(\mathcal{R}) = \{l_1,\ldots,l_n\}$ とすると，任意の i において

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i \quad \subseteq \quad & \{(l,b) \mid l \in \mathrm{LHS}(\mathcal{R}) \backslash \mathcal{F}_0, b \in \mathcal{F}_0\} \\ \cup \quad & \{(a,b) \mid a,b \in \mathcal{F}_0\} \\ \cup \quad & \{(a, f(b_1,\ldots,b_n)) \mid \\ & \quad a, b_1,\ldots,b_n \in \mathcal{F}_0, f \in \mathcal{F}\} \end{aligned}$$

また $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}'_0 \subseteq \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}'_1 \cdots$ となり，追加する規則がなくなるとき手続きは停止するので $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \ldots$ は有限列である． □

定義 3 $\mathcal{R}$ から作った $\mathcal{R}_0$ に対して手続きを行い，$\mathcal{R}'_i$ で停止するとき，$\mathcal{R}'_i$ を $\mathcal{R}^\infty$ と定義する．補題 5 よりこのような $\mathcal{R}^\infty$ は必ず存在する．

定理 1 基底項 t, s と右基底項書き換えシステム $\mathcal{R}$ が与えられたとき，$t \to^* s$ は閉包操作に基づく実際的な手続きで判定可能．

証明 $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cup \{t \to t, s \to s\}$，$c_t, c_s$ を $\hat{\mathcal{R}}_0$ を構成するときに作られる $t \to^* c_t, s \to^* c_s$, となる定数とすると，補題 1，3 および補題 4 の性質 $A(k)$ より以下が成立する．

$$t \xrightarrow[\mathcal{R}]{}{}^* s \iff c_t \xrightarrow[\mathcal{R}_0]{}{}^* c_s \iff c_t \to c_s \in \hat{\mathcal{R}}^\infty$$

ここで，$c_t \to c_s \in \hat{\mathcal{R}}^\infty$ は判定可能． □

4 まとめと今後の課題

本報告では，右基底項書き換えシステムの到達可能性を判定する実際的な閉包操作手続きを提案した．本報告の手続きを実装し，実験をとおしてその有効性

を確認することは今後の課題である．また，より一般的なクラスの項書き換えシステムの到達可能性問題へ適用できるように，本報告で提案した判定手続きを拡張することも今後の課題である．

参考文献

[1] Aoto, T., Yoshida, J. and Toyama, Y.: Proving confluence of term rewriting systems automatically, *In Proc. of 20th RTA*, LNCS 5595, pp. 93–102, 2009.

[2] Comon, H., Godoy, G. and Nieuwenhuis, R. The confluence of ground term rewrite systems is decidable in polynomial time, *In Proc. of 42nd FOCS*, pp. 298–307, 2001.

[3] Durand, I. and Senizergues, G.: Bottom-up rewriting is inverse recognizability preserving, *In Proc. of 18th RTA*, LNCS 4533, pp. 107–121, 2007.

[4] Godoy, G. and Tiwari, A.: Deciding Fundamental Properties of Right-(Ground or Variable) Rewrite Systems by Rewrite Closure, *In Proc. of 2nd IJCAR*, LNAI 3097, pp. 91–106, 2004.

[5] Godoy, G., Tiwari, A. and Verma, R.: Characterizing Confluence by Rewrite Closure and Right Ground Term Rewrite Systems, *In Proc. of 15th AAECC*, pp. 13–36, 2004.

[6] Jacquemard, F.: Decidable approximations of term rewriting systems, *In Proc. of 7th RTA*, LNCS 1103, pp. 362–376, 1996.

[7] Kaiser, L.: Confluence of Right Ground Term Rewriting Systems Is Decidable, *In Proc. of 8th FOSSACS*, LNCS 3441, pp. 470–489, 2005.

[8] Nagaya, T. and Toyama, Y.: Decidability for Left-Linear Growing Term Rewriting Systems, *Information and Computation* 178(2), pp. 499–514, 2002.

[9] Oyamaguchi, M.: The Church-Rosser property for ground term-rewriting systems is decidable, *In Proc.of 49th TCS*, pp. 43–79, 1987.

[10] Oyamaguchi, M.: The Reachability and Joinability Problems for Right-Ground Term-Rewriting Systems *Journal of Information Processing* 13 (3) pp. 347-354, 1990.

[11] Plaisted, D.: Polynomial time termination and constraint satisfaction tests. *In proc.of 5th RTA*, pp. 405–420, 1993.

[12] Takai, T., Kaji, Y. and Seki, H.: Right-Linear Finite Path Overlapping Term Rewriting Systems Effectively Preserve Recognizability, *In Proc. of 11th RTA*, LNCS 1833,pp. 246–260, 2000.

[13] 富樫敦, 野口正一:項書き換え系に関する決定問題とその時間計算量, 電子通信学会論文誌 Vol.J66-D No.10,pp 1177–1184, 1983.