永続性にもとづく項書き換えシステムの合流性証明

鈴木 翼[1], 青戸等人[1], 外山芳人[1]

[1] 東北大学 電気通信研究所

{tsubasa,aoto,toyama}@nue.riec.tohoku.ac.jp

概 要　項書き換えシステムの合流性判定において，永続性にもとづく分解の有効性が知られている．これは，多ソート型付けにもとづいて項書き換えシステムを部分システムに分解し，部分システムの合流性から全体の合流性を判定する方法である．しかし，型付けによって部分システムへ分解できない場合には，このような合流性判定方法は使えない．本論文では，弱左線形な型付け項書き換えシステムというクラスを導入することによって，部分システムに分解できない非左線形項書き換えシステムに対しても，永続性にもとづく合流性の判定が可能になることを示す．

1　はじめに

合流性は項書き換えシステムの重要な性質であり，多くの研究がなされている．停止性をもつ項書き換えシステムの合流性は決定可能であり，停止性をもたない場合でも，左線形な項書き換えシステムの場合にはいくつかの合流条件が提案されている [3, 5, 7, 8]．しかし，停止性をもたない非左線形な項書き換えシステム R の合流性判定は一般に困難である．このような場合に，R に型付けを行って型付き項書き換えシステム R^τ を構成し，R の合流性と R^τ の合流性の等価性 (永続性) をもちいて R の合流性を判定する手法が提案されている [1, 2]．

停止性をもたない非左線形な項書き換えシステムの合流性を永続性をもちいて示す例を以下に示す．項書き換えシステム R を以下のようにとる．

$$R = \begin{cases} f(x) \to g(x) & (1) \\ a(x,y) \to a(f(x), f(x)) & (2) \\ b(f(x),x) \to b(x, f(x)) & (3) \\ b(g(x),x) \to b(x, g(x)) & (4) \end{cases}$$

R の書き換え規則の左辺と右辺は同じ型をもち，両辺に現れる同じ変数は同じ型をもつという条件の下で，できるだけ異なる型を与えるような型付けを R の最も一般的な型付けという．最も一般的な型付けを上記の R に対して行うと型付き項書き換えシステム R^τ が得られる．

$$\begin{array}{lclcl} f &:& 0 &\to& 0\,, \qquad g : 0 \to 0\,, \\ a &:& 0\times 0 &\to& 1\,, \qquad b : 0\times 0 \to 2 \end{array}$$

このとき，型 $\sigma \in \{0,1,2\}$ をもつ項に適用できる書き換え規則の集合である部分システム R^τ_σ は $R^\tau_0 = \{(1)\}$，$R^\tau_1 = \{(1),(2)\}$，$R^\tau_2 = \{(1),(3),(4)\}$ となる．R^τ_0，R^τ_1 は左線形であり R^τ_2 は停止性をもつので，従来の判定手法をもちいて合流性を示せる [3]．よって，すべての型付き項が合流するので，R^τ は合流性をもち，永続性によって R も合流性をもつ．

一方，以下のような停止性をもたない非左線形な項書き換えシステム R では型付けによる部分システムへの分解に失敗する．

$$
R = \begin{cases} f(x,x) \to f(g(x),x) & (5) \\ f(g(x),x) \to f(h(x),h(x)) & (6) \\ h(g(x)) \to g(g(h(x))) & (7) \end{cases}
$$

R に以下の最も一般的な型付けを行うと型付き項書き換えシステム R^τ が得られる．

$$
f \ : \ 0 \times 0 \ \to \ 1, \qquad g \ : \ 0 \ \to \ 0, \\
h \ : \ 0 \ \to \ 0
$$

このとき，部分システム R^τ_σ は $R^\tau_0 = \{(7)\}$ と $R^\tau_1 = \{(5),(6),(7)\}$ である．しかし，$R^\tau_1 = R^\tau$ なので，R^τ の合流性問題をより簡単な部分システムの合流性問題に還元できない．

本論文では，永続性に基づく項書き換えシステムの新しい合流性証明手法を提案する．この証明手法は，項書き換えシステム R から得られる型付き項書き換えシステム R^τ が簡単な部分システムに分解できない場合にも適用可能である．

本証明手法の基本的なアイディアは，非左線形な型付き項書き換えシステム R^τ の書き換え規則の左辺に出現する非線形な変数に任意の基底正規形を代入することにより，R^τ を無限個の書き換え規則をもつ左線形な項書き換えシステム R^τ_{nf} に変換する点にある．左線形な項書き換えシステムに対しては危険対に基づく合流条件がいくつか知られており $[4, 7]$， それらをみたせば R^τ_{nf} の合流性は導ける．さらに，R^τ が弱左線形なクラスに属しているならば，R^τ の合流性と R^τ_{nf} の合流性は等価となるので，永続性をもちいることによって R の合流性を示すことができる．なお，R^τ_{nf} は無限個の書き換え規則もつため，R^τ_{nf} の危険対に基づく合流条件の直接判定は実際には困難である．そこで，本論文では，R^τ の危険対に基づく合流条件が基底化保存書き換えによってみたされることを判定することで，間接的に R^τ_{nf} の合流条件を判定する手法を提案する．

さらに，本論文の合流性証明手法に基づく合流性自動判定手続きを実装し，従来の手法では判定が困難であった停止性をもたない非左線形な項書き換えシステムの合流性自動判定に対しても，本手法は有効であることを実験をとおして明らかにする．

本論文は，全 6 節で構成される．第 2 節は，準備である．第 3 節では，永続性をもちいた重なりをもたない項書き換えシステムの合流条件を示す．第 4 節では，永続性をもちいた重なりをもつ項書き換えシステムの合流条件を示す．第 5 節では，合流性自動判定手続きの実装と実験について説明する．第 6 節は，本論文のまとめである．

2　準備

ここでは，本論文でもちいる項書き換えシステムの記法について説明する $[1, 3, 7]$．

関数記号の集合を $F = \{f, g, h, \ldots\}$，変数記号の集合を $V = \{x, y, z, \ldots\}$，項の集合を $T(F, V)$ と表す．項 t に 1 回だけ現れる変数を線形変数，2 回以上現れる変数を非線形変数とよぶ．項 t に出現する変数集合を $V(t)$，項 t に出現する非線形変数集合 $V_{nl}(t)$ で表す．項 t の部分項の位置は正整数の列で表し，項 t の位置集合 $Pos(t)$ を，$t \in V$ のとき $Pos(t) = \{\varepsilon\}$，$t = f(t_1, \ldots, t_n)$ のとき $Pos(t) = \{\varepsilon\} \cup \{iu \mid 1 \le i \le n, u \in Pos(t_i)\}$ と定義する．位置 p, q について，$pp' = q$ となる p' が存在するとき $p \le q$ と表す．位置 p, q について，$p \le q$ または $q \le p$ とならないとき，p と q は並行な位置であるといい $p \mid q$ と表す．項 t の位置 p における部分項を $t|_p$，位置 p に出現している記号を $t(p)$ と表す．項 t の部分項 $t|_p (p \neq \varepsilon)$ を真部分項という．項 t における関数記号の位置集合 $Pos_F(t)$，項 t における変数記号の位置集合 $Pos_V(t)$ を以下のように定義する．$Pos_F(t) = \{p \in Pos(t) \mid t(p) \in F\}$，$Pos_V(t) = Pos(t) \backslash Pos_F(t)$．代入 θ は変数集合 V から項の集合 $T(F, V)$ への写像であり，$dom(\theta) = \{x \in V \mid x\theta \neq x\}$，$ran(\theta) = \{x\theta \in T(F, V) \mid x \in dom(\theta)\}$ と表す．代入 θ が $dom(\theta) = \{x_1, \ldots, x_n\}$，$x_i\theta = t_i (1 \le i \le n)$ をみたすとき $\theta = [x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n]$

と表す．代入 θ による項 t への代入 $t\theta$ を以下に定義する．$t \in V$ のとき $t\theta$，$t = f(t_1, \ldots, t_n)$ のとき $f(t_1, \ldots, t_n)\theta = f(t_1\theta, \ldots, t_n\theta)$．項 t, s について，$t\theta = s$ となる代入 θ が存在するとき $t \leq s$ と表す．代入 θ_1, θ_2 について，$\theta_1\theta = \theta_2$ となる代入 θ が存在するとき $\theta_1 \leq \theta_2$ と表す．ホールは特別な定数記号 □ であり，ホールを部分項として含む項を文脈という．文脈 C においてホールが位置 $p_i(1 \leq i \leq n)$ に出現しているとする．このとき，位置 p_i のホールを項 t_i で置き換えて得られる項を $C[t_1, t_2, \ldots, t_n]_{p_1, p_2, \ldots, p_n}$ あるいは略して $C[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ で表す．

書き換え規則 $l \to r$ は，$l \notin V$ かつ $V(r) \subseteq V(l)$ をみたす項 l と r の組であり，項書き換えシステム R は書き換え規則の集合である．任意の書き換え規則 $l \to r \in R$ について $V_{nl}(l) = \emptyset$ のとき R を左線形とよぶ．ある $l \to r \in R$ と文脈 C と代入 θ があるとき，項 $t = C[l\theta]_p$ は項 $s = C[r\theta]_p$ に書き換えることができ，この書き換え関係を $t \xrightarrow{p} s$ と表す．$\xrightarrow{p}$ の位置 p を記さない場合は $\to$ と書き，$\to$ の反射推移閉包を $\xrightarrow{*}$ と書く．また，項 t の部分項 $l\theta$ をリデックスとよぶ．リデックスをもたない項を正規形という．R の正規形の集合を $NF(R)$ と記す．$t \xrightarrow{*} s \in NF(R)$ のとき，s を t の正規形という．書き換え $C[l\theta] \to C[r\theta]$ においてリデックス $l\theta$ の真部分項が正規形ならば最内書き換えという．最内書き換えを $\underset{im}{\longrightarrow}$ と表す．項 t が最内正規とは，$t \underset{im}{\overset{*}{\longrightarrow}} s$ となる正規形 s が存在することである．すべての項が最内正規であるとき項書き換えシステム R は最内正規であるという．$C[t_1, \cdots, t_n]_{p_1, \ldots, p_n} (n \geq 0)$ について $p_1, \ldots, p_n$ が互いに並行な位置であり，位置 $p_i(1 \leq i \leq n)$ について $t_i \to s_i$ が成立するとき，$C[t_1, \ldots, t_n] \xrightarrow[\shortparallel]{p_1, p_2, \ldots, p_n} C[s_1, \ldots, s_n]$ を並行書き換えという．

項 t, s について，$t\sigma = s\sigma$ となる代入 σ が存在するとき，t と s は単一化可能といい，σ を単一化子という．t と s の任意の単一化子 θ に対し $\sigma \leq \theta$ が成り立つとき，t と s の単一化子 σ を最汎単一化子といい，$mgu(t, s)$ と表す．項 t，s について，ある $p \in Pos_F(s)$ において $s = C[u]_p$，$mgu(t, u)$ が存在するとき，項 t が項 s に対して位置 p で重なるという．書き換え規則 $l_1 \to r_1, l_2 \to r_2$ について，ある $p \in Pos_F(l_2)$ において $l_2 = C[u]_p$，$mgu(l_1, u) = \sigma$ が存在するとき，$l_1 \to r_1$ が $l_2 \to r_2$ に対して位置 p で重なるという．ただし，$l_1 \to r_1, l_2 \to r_2$ が同じ書き換え規則の場合は $p \neq \varepsilon$ とする．このとき，$\langle C[r_1]_p\sigma, r_2\sigma \rangle$ を危険対という．位置 ε の重なりによる危険対を外側危険対，それ以外の位置の重なりによる危険対を内側危険対という．項書き換えシステム R の外側危険対の集合を $CP_{out}(R)$，内側危険対の集合を $CP_{in}(R)$ と表し，危険対の集合を $CP(R) = CP_{out}(R) \cup CP_{in}(R)$ と表す．$CP(R) = \emptyset$ のとき，R は重なりがないという [7]．

項 t が停止するとは t から始まる無限の書き換え $t \to t_1 \to \cdots$ がないことである．項書き換えシステム R において任意の項が停止するならば R は停止性をもつという．任意の項 t, t_1, t_2 に対して，$t \xrightarrow{*} t_1$ かつ $t \xrightarrow{*} t_2$ ならば，ある項 s が存在し，$t_1 \xrightarrow{*} s$ かつ $t_1 \xrightarrow{*} s$ となるとき，R は合流性をもつという．

ソートの集合を S とする．型付け τ は変数 x にソート σ，n 引数関数記号 f に $n+1$ 対のソート $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n \to \sigma$ を関連づける．型付け τ のもとで項 t が型付けされるとき t^τ と表し，その型を $\tau(t)$ と記す．τ が明らかな場合は型付き項 t^τ を t と略記する．任意の $l \to r \in R$ において l, r が型付けされ $\tau(l) = \tau(r)$ ならば，型付け τ は R において矛盾がないという．R と矛盾のない型付け τ から得られる型付き項書き換えシステムを $R^\tau = \{l^\tau \to r^\tau \mid l \to r \in R\}$ と定める．R^τ の書き換えは型付き項上で定義される．型 σ をもつ項に適用できる R^τ の書き換え規則の集合を R^τ_σ と記す．以下の命題より，R の合流性と R^τ の合流性は等価である [1]．

命題 1 (**永続性** [1]) R が合流性をもつことと R^τ が合流性をもつことは等価である．

3 重なりをもたない項書き換えシステムの合流条件

本節では，R^τ の合流性の十分条件を示し，それをもちいて重なりをもたない R の合流条件を導く．なお，ここでもちいる証明方法は，メンバーシップ条件付き項書き換えシステムの合流性の証

明方法 [6] を参考にしている．

変数 x に対応する定数 c_x の集合を $C_V = \{c_x \mid x \in V\}$ とし，以下では書き換えの対象となる項集合として，$T(F,V)$ の代わりに基底項集合 $T(F \cup C_V)$ をもちいる．項 t に出現する変数 $x,\ldots,z$ をすべて定数 $c_x,\ldots,c_z$ に置き換えて得られる基底項を t^c とすると，$t \to s \iff t^c \to s^c$ が成立する．したがって，項書き換えシステムが $T(F,V)$ 上で合流性をもつことと $T(F \cup C_V)$ 上で合流性をもつことは等価であることに注意する．以下では，$T(F \cup C_V) \cap NF(R^\tau)$ を $T_{NF}(F \cup C_V)$ と表す．

例 1 書き換え規則 $g(x,y) \to h(x)$ を適用すると，項 $t = f(g(x,y),z)$ から項 $s = f(h(x),z)$ が得られる．このとき，同じ書き換え規則を適用することによって t の基底項 $t^c = f(g(c_x,c_y),c_z)$ から s の基底項 $s^c = f(h(c_x),c_z)$ が得られる． □

定義 1 (左非線形型) R^τ を型付き項書き換えシステムとする．ある $l^\tau \to r^\tau \in R^\tau$ と $x \in V_{nl}(l)$ が存在し，$\sigma = \tau(x)$ となるとき型 σ を R^τ の左非線形型とよぶ．R^τ の左非線形型の集合を $NL^\tau(R^\tau)$ と表記する．左非線形型ではない型を左線形型とよび，左非線形型をもつ変数を左非線形型変数，左線形型をもつ変数を左線形型変数とよぶ．

定義 2 (型付き項の変数) R^τ における型付き項 t に対して，左非線形型変数集合 $V_{NL^\tau}(t)$ を以下のように定義する．

$$V_{NL^\tau}(t) = \{x \in V(t) \mid \tau(x) \in NL^\tau(R^\tau)\}$$

R^τ における型付き項 t の左線形型変数の集合 $V_{L^\tau}(t)$ を $V_{L^\tau}(t) = V(t) \backslash V_{NL^\tau}(t)$ で定義する．型付き項 t の左非線形型変数の位置の集合 $Pos_{V_{NL^\tau}}(t)$ を $Pos_{V_{NL^\tau}}(t) = \{p \in Pos_V(t) \mid \tau(t|_p) \in NL^\tau(R^\tau)\}$ で定義する．

例 2 項書き換えシステム $R = \{f(x,x,y) \to f(g(x),x,y), f(x,y,z) \to h(g(x))\}$，最も一般的な型付け $\tau = [f : 0 \times 0 \times 1 \to 2,\ g : 0 \to 0,\ h : 0 \to 2]$ とする．変数の型を明示すると，型付き項書き換えシステムは $R^\tau = \{f(x^0,x^0,y^1) \to f(g(x^0),x^0,y^1), f(x^0,y^0,z^1) \to h(g(x^0))\}$ となる．$f(x^0,x^0,y^1) \to f(g(x^0),x^0,y^1)$ より $NL^\tau(R^\tau) = \{0\}$ が得られる．よって，$NL^\tau(R^\tau) = \{0\}$ より $V_{NL^\tau}(f(x^0,y^0,z^1)) = \{x,y\}$，$V_{L^\tau}(f(x^0,y^0,z^1)) = \{z\}$ となる． □

定義 3 (弱左線形) 型 σ が最内正規であるとは，$\tau(t) = \sigma$ となる任意の項 t が最内正規であるときをいう．また，型付き項書き換えシステム R^τ が弱左線形であるとは，R^τ のすべての左非線形型が最内正規であることをいう．

R^τ から得られる型付き項書き換えシステム R^τ_{nf} を $R^\tau_{nf} = \{l\hat{\theta} \to r\hat{\theta} \mid l \to r \in R^\tau, \hat{\theta} : V_{NL^\tau}(l) \to T_{NF}(F \cup C_V)\}$ と定める．R^τ の書き換え規則の左辺の非線形変数には必ず基底正規形が代入されるので，R^τ_{nf} は左線形であり，一般には無限集合となることに注意する．以下では，$l\hat{\theta} \to r\hat{\theta} \in R^\tau_{nf}$ と表した場合，$l \to r \in R^\tau$ および，$\hat{\theta} : V_{NL^\tau}(l) \to T_{NF}(F \cup C_V)$ を意味することと約束する．

例 3 $R^\tau = \{f(x,y,z) \to g(x,z,z), f(x,x,y) \to a\}$ とする．$V_{NL^\tau}(f(x,y,z)) = \{x,y\}$，$V_{NL^\tau}(f(x,x,y)) = \{x\}$ であり，以下の R^τ_{nf} が得られる．$R^\tau_{nf} = \{f(s,t,z) \to g(s,z,z) \mid s,t \in T_{NF}(F \cup C_V)\} \cup \{f(s,s,z) \to a \mid s \in T_{NF}(F \cup C_V)\}$ □

本節では，$T(F \cup C_V)$ 上の R^τ での書き換えを $\to$，R^τ_{nf} での書き換えを $\xrightarrow[nf]{}$ と表す．

補題 1 R^τ は弱左線形であり，型 σ を左非線形型とする．$\tau(t) = \sigma$ である任意の項 t について，ある項 $s \in NF(R^\tau)$ が存在し，$t \xrightarrow{*} s$ かつ $t \xrightarrow[nf]{*} s$ となる．

証明． 項 t は R^τ で最内正規なので，R^τ の最内書き換えによって t の正規形 s が得られる．このとき，R^τ_{nf} でも同様の最内書き換えによって正規形 s が得られる． □

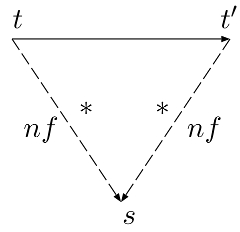

図 1. 補題 2

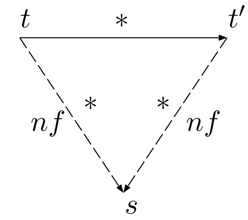

図 2. 補題 3

補題 2 R^τ **が弱左線形かつ** $t \to t'$ **ならば，ある項** s **が存在し，** $t \xrightarrow[nf]{*} s$ **かつ** $t' \xrightarrow[nf]{*} s$ **となる** (**図** 1)**.**

証明. $l \to r \in R^\tau$**，** $t = C[l\theta] \to C[r\theta] = t'$**，** $\theta = [x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n, y_1 \mapsto u_1, \ldots, y_m \mapsto u_m]$**，** $x_1, \ldots, x_n \in V_{NL^\tau}(l)$**，** $y_1, \ldots, y_m \in V_{L^\tau}(l)$ **とする．このとき，** t**，** $t' \in T(F \cup C_V)$ **より** $t_1, \ldots, t_n, u_1, \ldots, u_m \in T(F \cup C_V)$ **となることに注意する．補題** 1 **をみたす** $t_1, \ldots, t_n$ **の正規形を** $s_1, \ldots, s_n$ **とする．左非線形型変数から正規形への代入を** $\hat{\theta} = [x_1 \mapsto s_1, \ldots, x_n \mapsto s_n]$ **とし，** $\theta' = [y_1 \mapsto u_1, \ldots, y_m \mapsto u_m]$ **とおくと，** $C[l\theta] \xrightarrow[nf]{*} C[l\hat{\theta}\theta']$**，** $C[r\theta] \xrightarrow[nf]{*} C[r\hat{\theta}\theta']$ **となる．** R^τ_{nf} **の定義より，書き換え規則** $l\hat{\theta} \to r\hat{\theta} \in R^\tau_{nf}$ **なので，** $C[l\hat{\theta}\theta'] \xrightarrow[nf]{} C[r\hat{\theta}\theta']$ **となる．ゆえに，** $s = C[r\hat{\theta}\theta']$ **とすれば題意が成立する．** □

補題 3 R^τ **が弱左線形かつ** R^τ_{nf} **が合流性をもつとする．** $t \xrightarrow{*} t'$ **ならばある項** s **が存在し，** $t \xrightarrow[nf]{*} s$ **かつ** $t' \xrightarrow[nf]{*} s$ **となる** (**図** 2)**.**

証明. $t \xrightarrow{n} t'$ **の書き換えの長さ** $n \geq 0$ **に関する帰納法をもちいて証明する．ここで，** $\xrightarrow{n}$ **は** n **回の書き換えを示す．**

(B.S.) $t = t'$ **なので成り立つ．**

(I.S.) $t \to t_1 \xrightarrow{n-1} t'$ **とする** (**図** 3)**．補題** 2 **より，** $t \xrightarrow[nf]{*} s_1$ **かつ** $t_1 \xrightarrow[nf]{*} s_1$ **となる** s_1 **が存在する．また，帰納法の仮定より，** $t_1 \xrightarrow[nf]{*} s_2$ **かつ** $t' \xrightarrow[nf]{*} s_2$ **となる** s_2 **が存在する．このとき，** R^τ_{nf} **の合流性より，** $s_1 \xrightarrow[nf]{*} s$ **かつ** $s_2 \xrightarrow[nf]{*} s$ **となる** s **が存在するので，** $t \xrightarrow[nf]{*} s$ **かつ** $t' \xrightarrow[nf]{*} s$ **となり成立．** □

補題 4 R^τ **が弱左線形かつ** R^τ_{nf} **が合流性をもつならば，** R^τ **も合流性をもつ．**

証明. $t \xrightarrow{*} t_1$**，** $t \xrightarrow{*} t_2$ **とする．このとき，補題** 3 **より** $t \xrightarrow[nf]{*} s_1$ **かつ** $t_1 \xrightarrow[nf]{*} s_1$ **となる** s_1 **と，** $t \xrightarrow[nf]{*} s_2$ **かつ** $t_2 \xrightarrow[nf]{*} s_2$ **となる** s_2 **が存在する．このとき** R^τ_{nf} **の合流性より，** $s_1 \xrightarrow[nf]{*} s$ **かつ** $s_2 \xrightarrow[nf]{*} s$ **となる** s **が存在する** (**図** 4)**．ここで** $\xrightarrow[nf]{} \subseteq \to$ **より，** $t_1 \xrightarrow{*} s$ **かつ** $t_2 \xrightarrow{*} s$ **となる．** □

定理 1 **重なりのない項書き換えシステム** R **から得られる型付き項書き換えシステム** R^τ **が弱左線形ならば，** R **は合流性をもつ．**

証明. R **は重なりがないので** R^τ **も重なりがない．** R^τ_{nf} **は重なりのない左線形項書き換えシステムとなるので合流性をもつ** [3]**．したがって，補題** 4 **より** R^τ **は合流性をもつ．よって，命題** 1 **より** R **は合流性をもつ．** □

例 4 **型付けでは部分システムに分解できない項書き換えシステム** R **の合流性を定理** 1 **によって示す．この** R **は** 1 **節において永続分解に失敗した** R **と同じものである．**

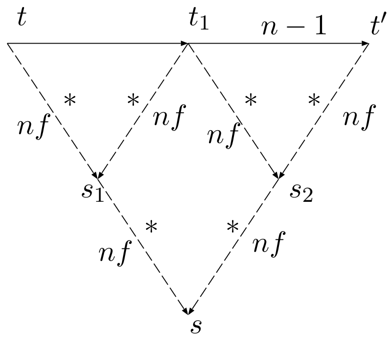

図 3. 補題 3 の証明

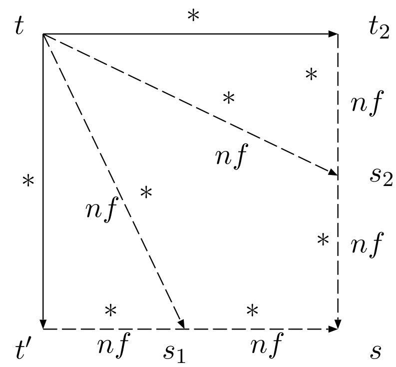

図 4. 補題 4 の証明

$$R = \begin{cases} f(x,x) \to f(g(x),x) & (5) \\ f(g(x),x) \to f(h(x),h(x)) & (6) \\ h(g(x)) \to g(g(h(x))) & (7) \end{cases}$$

なお，$f(x,x) \to f(g(x),x) \to f(h(x),h(x)) \to \cdots$ なる無限列が存在するので，R は停止性をもたない非左線形な項書き換えシステムであることに注意する．R に以下の最も一般的な型付けを行うと R^τ が得られる．

$$f \ : \ 0 \times 0 \ \to \ 1\,, \qquad g \ : \ 0 \ \to \ 0\,,$$
$$h \ : \ 0 \ \to \ 0$$

このとき，部分システム R^τ_σ は $R^\tau_0 = \{(7)\}$ と $R^\tau_1 = \{(5),(6),(7)\}$ である．ここで，左非線形型は型 0 のみである．R^τ_0 は停止性をみたすので，型 0 をもつすべての項は最内正規であり，R^τ は弱左線形となる．また，R は重なりがないので，定理 1 から R は合流性をもつ． $\square$

上記の例より，従来の永続性に基づく合流性判定法では判定できなかった項書き換えシステムの合流性を示すことができた．

4　重なりをもつ項書き換えシステムの合流条件

本節では，停止性をもたない非左線形な項書き換えシステム R が重なりをもつ場合の合流条件を導く．前節で述べたように，非左線形な項書き換えシステム R から得られる型付き項書き換えシステム R^τ が弱左線形ならば，補題 4 より R^τ_{nf} の合流性を示すことで R の合流性が導ける．ここで，左線形項書き換えシステム R^τ_{nf} に重なりがある場合には，左線形項書き換えシステムの危険対に基づく合流条件 $[4, 7]$ をみたせば，R^τ_{nf} の合流性は示される．しかし，R^τ_{nf} は一般に書き換え規則の無限集合となるため，R^τ_{nf} の危険対に基づく合流条件を直接判定することは困難である．そこで本節では，型付き項書き換えシステム R^τ の危険対に基づく合流条件を判定することで，間接的に R^τ_{nf} の合流性を導く方法を提案する．

まず，R^τ の危険対は R^τ_{nf} の危険対の一般的なものであることを示す．以下では，$l\hat{\theta} \to r\hat{\theta} \in R^\tau_{nf}$ は，$l \to r \in R^\tau$ および $\hat{\theta} : V_{NL^\tau}(l) \to T_{NF}(F \cup C_V)$ を表していることに注意する．

補題 5 $l_1\hat{\theta}_1 \to r_1\hat{\theta}_1 \in R^\tau_{nf}$ が $l_2\hat{\theta}_2 \to r_2\hat{\theta}_2 \in R^\tau_{nf}$ に対して位置 p で重なるとし，その危険対を $\langle \hat{P}, \hat{Q} \rangle$ とする．このとき，$l_1 \to r_1 \in R^\tau$ が $l_2 \to r_2 \in R^\tau$ に対して位置 p で重なる．さらに，その危険対を $\langle P, Q \rangle$ とすると，$P\hat{\theta} = \hat{P}$，$Q\hat{\theta} = \hat{Q}$ となる $\hat{\theta}$ が存在する．また，任意の変数 $x \in V_{NL^\tau}(P) \cup V_{NL^\tau}(Q)$ について，$x\hat{\theta} \in T_{NF}(F \cup C_V)$ が成り立つ．

証明． 一般性を失うことなく，以下では項 s,t の最汎単一化子 $mgu(s,t)=\sigma$ は $dom(\sigma)\cap(\bigcup_{x\in dom(\sigma)} V(x\sigma))=\emptyset$ をみたすものと仮定する．また，$V(l_1)$ と $V(l_2)$ は互いに素とする．$l_1\hat{\theta}_1\to r_1\hat{\theta}_1$ が $l_2\hat{\theta}_2\to r_2\hat{\theta}_2$ に対して重なる位置を $p\in Pos_F(l_2\hat{\theta}_2)$ とする．ここで，$p\in Pos_F(l_2)$ となることを示す．$p\notin Pos_F(l_2)$ と仮定すると，$dom(\hat{\theta}_2)=V_{NL^\tau}(l_2)$ より，ある位置 $p_2\in Pos_{V_{NL^\tau}}(l_2)$ が存在して $p_2\le p$ となる．$ran(\hat{\theta}_2)\subseteq T_{NF}(F\cup C_V)$ より $l_2\hat{\theta}_2|_{p_2}\in T_{NF}(F\cup C_V)$ となる．よって，$l_2\hat{\theta}_2|_p\in T_{NF}(F\cup C_V)$ となる．ここで，$l_1\hat{\theta}_1\to r_1\hat{\theta}_1$ が $l_2\hat{\theta}_2\to r_2\hat{\theta}_2$ に対して位置 p で重なるとすると，$l_2\hat{\theta}_2|_p\in T_{NF}(F\cup C_V)$ に矛盾．よって，$p\in Pos_F(l_2)$ となる．

$l_2=C[u]_p$ とすると，$l_2\hat{\theta}_2=C\hat{\theta}_2[u\hat{\theta}_2]_p$ となる．$l_1\hat{\theta}_1\to r_1\hat{\theta}_1$ が $l_2\hat{\theta}_2\to r_2\hat{\theta}_2$ に対して位置 p で重なるので，$mgu(u\hat{\theta}_2,l_1\hat{\theta}_1)=\theta$ が存在して $l_1\hat{\theta}_1\theta=u\hat{\theta}_2\theta$ となる．$V(l_1)$ と $V(l_2)$ は互いに素であり，$dom(\hat{\theta}_1)=V_{NL^\tau}(l_1)\subseteq V(l_1)$，$dom(\hat{\theta}_2)=V_{NL^\tau}(l_2)\subseteq V(l_2)$ なので，$l_1\hat{\theta}_1=l_1(\hat{\theta}_1\cup\hat{\theta}_2)$，$l_2\hat{\theta}_2=l_2(\hat{\theta}_1\cup\hat{\theta}_2)$ となる．また，$l_2=C[u]_p$ に注意すると，同様に $C\hat{\theta}_2=C(\hat{\theta}_1\cup\hat{\theta}_2)$，$u\hat{\theta}_2=u(\hat{\theta}_1\cup\hat{\theta}_2)$ となる．$l_2\hat{\theta}_2\theta=C\hat{\theta}_2\theta[u\hat{\theta}_2\theta]_p=C\hat{\theta}_2\theta[l_1\hat{\theta}_1\theta]_p$ より，$l_2(\hat{\theta}_1\cup\hat{\theta}_2)\theta=C(\hat{\theta}_1\cup\hat{\theta}_2)\theta[l_1(\hat{\theta}_1\cup\hat{\theta}_2)\theta]_p$．このとき，危険対 $\hat{P}=C[r_1]_p(\hat{\theta}_1\cup\hat{\theta}_2)\theta$，$\hat{Q}=r_2(\hat{\theta}_1\cup\hat{\theta}_2)\theta$ が得られる．また，$l_2=C[u]_p$，$l_1(\hat{\theta}_1\cup\hat{\theta}_2)\theta=u(\hat{\theta}_1\cup\hat{\theta}_2)\theta$ より，$l_1\to r_1$ が $l_2\to r_2$ に対して位置 p で重なる．よって，$mgu(u,l_1)=\sigma$ とすると，$\sigma\hat{\theta}=(\hat{\theta}_1\cup\hat{\theta}_2)\theta$ となる $\hat{\theta}$ が存在する．さらに，$l_2\sigma=C\sigma[u\sigma]_p=C\sigma[l_1\sigma]_p$ となるので，危険対 $P=C[r_1]_p\sigma$，$Q=r_2\sigma$ が得られ，$P\hat{\theta}=\hat{P},Q\hat{\theta}=\hat{Q}$ となる．

$x\in V_{NL^\tau}(P)\cup V_{NL^\tau}(Q)$ とする．このとき，$P=C[r_1]_p\sigma,Q=r_2\sigma$，$dom(\sigma)\cap(\bigcup_{x\in dom(\sigma)} V(x\sigma))=\emptyset$ に注意すると $x\notin dom(\sigma)$ となる．よって，$x\hat{\theta}=x\sigma\hat{\theta}=x(\hat{\theta}_1\cup\hat{\theta}_2)\theta\in T_{NF}(F\cup C_V)$ となり，$x\hat{\theta}\in T_{NF}(F\cup C_V)$ が得られる． □

例 5 項書き換えシステム $R=\{f(g(x,y),x)\to f(x,g(x,y)),f(a,x)\to a,g(x,y)\to h(x,y)\}$，最も一般的な型付け $\tau=[f:0\times 0\to 0,\ g:0\times 1\to 0,\ ,h:0\to 0,\ a:\to 0]$，$a\in T_{NF}(F\cup C_V)$，$F=\{f,g,h,a\}$ とする．このとき，部分システム R^τ_σ は $R^\tau_0=R^\tau$，$R^\tau_1=\emptyset$ である．ここで，左非線形型は型 0 のみである．

$0\in NL(R^\tau)$，$a\in T_{NF}(F\cup C_V)$ より書き換え規則 $f(g(a,y),a)\to f(a,g(a,y)),\ g(a,y)\to h(a,y)\in R^\tau_{nf}$ が存在する．$f(g(a,y),a)\to f(a,g(a,y))$ は $g(a,y)\to h(a,y)$ に対して位置 1 で重なり危険対 $\langle f(h(a,y),a),f(a,g(a,y))\rangle$ が得られる．また，R^τ において $f(g(x,y),x)\to f(x,g(x,y))$ は $g(x,y)\to h(x,y)$ に対して位置 1 で重なり危険対 $\langle f(h(x,y),x),f(x,g(x,y))\rangle$ が得られる．このとき，$f(h(x,y),x)\hat{\theta}=f(h(a,y),a)$，$f(x,g(x,y))\hat{\theta}=f(a,g(a,y))$ となる代入 $\hat{\theta}=[x\mapsto a]$ が存在する．また，$V_{NL^\tau}(f(h(x,y),x))\cup V_{NL^\tau}(f(x,g(x,y)))=\{x\}$ なので $x\hat{\theta}=a\in T_{NF}(F\cup C_V)$ も成立する． □

$l\theta\to r\theta$ が成立するとき，$V_{NL^\tau}(l\theta)\subseteq dom(\theta_{gp})$，$ran(\theta_{gp})\subseteq T_{NF}(F\cup C_V)$ をみたす任意の代入 θ_{gp} に対して $l\theta\theta_{gp}\underset{nf}{\longrightarrow} r\theta\theta_{gp}$ は一般に成立しない．$l\theta\theta_{gp}\underset{nf}{\longrightarrow} r\theta\theta_{gp}$ が成立しない場合を以下に示す．

1. $x\in V_{NL^\tau}(l)$ について $V_{L^\tau}(x\theta)\neq\emptyset$ である場合．

   $V_{L^\tau}(x\theta\theta_{gp})\neq\emptyset$ をみたす代入 θ_{gp} が存在する．この場合，$V_{L^\tau}(x\theta\theta_{gp})\neq\emptyset$ なので $x\theta\theta_{gp}\notin T_{NF}(F\cup C_V)$ となり，$l\theta\theta_{gp}$ に適用できる書き換え規則 $l\hat{\theta}\to r\hat{\theta}\in R^\tau_{nf}$ が存在しない．よって，$l\theta\theta_{gp}\underset{nf}{\longrightarrow} r\theta\theta_{gp}$ が成立しない．

2. $x\in V_{NL^\tau}(l)$ について l' が $x\theta$ に対して重なるような書き換え規則 $l'\to r'\in R^\tau$ が存在する場合．

   $x\theta\theta_{gp}\in T_{NF}(F\cup C_V)$ が成り立たない代入 θ_{gp} が存在する．この場合，$l\theta\theta_{gp}$ に適用できる書き換え規則が存在しないので $l\theta\theta_{gp}\underset{nf}{\longrightarrow} r\theta\theta_{gp}$ が成立しない．

以下に $l\theta\theta_{gp}\underset{nf}{\longrightarrow} r\theta\theta_{gp}$ が成立しない例を示す．

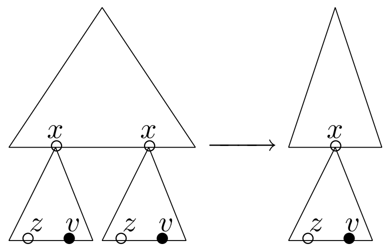

図 5. $f(h(z,v),h(z,v)) \to g(h(z,v))$
○ :**左非線形型変数** ● :**左線形型変数**

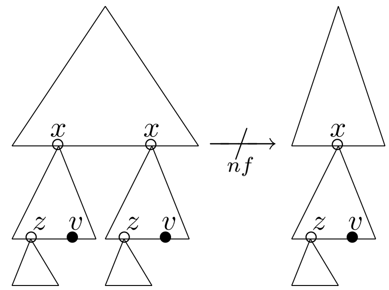

図 6. $f(h(a,v),h(a,v)) \underset{nf}{\not\longrightarrow} g(h(a,v))$
○ :**左非線形型変数** ● :**左線形型変数**

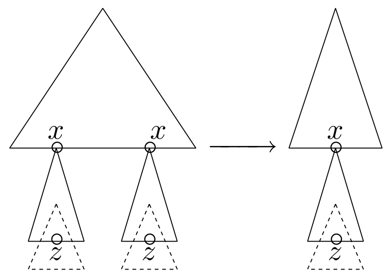

図 7. $f(p(q(z)),p(q(z))) \to g(p(q(z)))$
○ :**左非線形型変数**

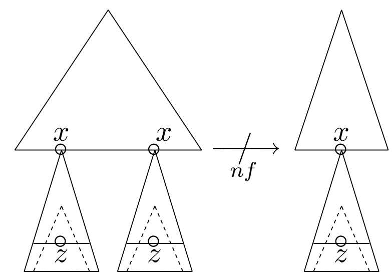

図 8. $f(p(q(p(a))),p(q(p(a)))) \underset{nf}{\not\longrightarrow} g(p(q(p(a))))$
○ :**左非線形型変数**

例 6 項書き換えシステム $R = \{f(x,x) \to g(x), f(h(x,y),x) \to g(a), f(p(x),x) \to g(q(x))), q(x) \to x\}$**，最も一般的な型付け** $\tau = [f : 0 \times 0 \to 1,\ g : 0 \to 0,\ h : 0 \times 2 \to 0,\ p : 0 \to 0,\ q : 0 \to 0,\ a : \to 0]$ **とする．このとき，**$NL^{\tau}(R^{\tau}) = \{0\}$ **である．**

1. $f(x,x) \to g(x)$ **を適用すると** $f(h(z,v),h(z,v)) \to g(h(z,v))$ **が得られる** (**図** 5)**．**$NL^{\tau}(R^{\tau}) = \{0\}$ **より** $V_{NL^{\tau}}(f(h(z,v),h(z,v))) = \{z\}$ **となる．このとき，**$\theta_{gp} = [z \mapsto a]$ **とすると** $f(h(z,v),h(z,v))\theta_{gp} = f(h(a,v),h(a,v))$**，**$g(h(z,v))\theta_{gp} = g(h(a,v))$ **が得られる．**$NL^{\tau}(R^{\tau}) = \{0\}$ **より** $V_{NL^{\tau}}(f(x,x)) = \{x\}$ **なので** $f(x,x) \to g(x) \notin R^{\tau}_{nf}$ **である．また，**$h(a,v) \notin T_{NF}(F \cup C_V)$ **なので** $f(h(a,v),h(a,v)) \to g(h(a,v)) \notin R^{\tau}_{nf}$ **となり** $f(h(a,v),h(a,v)) \underset{nf}{\longrightarrow} g(h(a,v))$ **は成立しない** (**図** 6)**．**
2. $f(x,x) \to g(x)$ **を適用すると** $f(p(q(z)),p(q(z))) \to g(p(q(z)))$ **が得られる** (**図**7)**．**$NL^{\tau}(R^{\tau}) = \{0\}$ **より** $V_{NL^{\tau}}(f(p(q(z)),p(q(z)))) = \{z\}$ **となる．このとき，**$\theta_{gp} = [z \mapsto p(a)]$ **とすると** $f(p(q(z)),p(q(z)))\theta_{gp} = f(p(q(p(a))),p(q(p(a))))$**，**$g(p(q(z)))\theta_{gp} = g(p(q(p(a))))$ **が得られる．**$q(x) \to x$ **が適用可能なので** $p(q(p(a)) \notin T_{NF}(F \cup C_V)$ **である．よって，**$f(p(q(p(a))),p(q(p(a)))) \to g(p(q(p(a)))) \notin R^{\tau}_{nf}$ **となり** $f(p(q(p(a))),p(q(p(a)))) \underset{nf}{\longrightarrow} g(p(q(p(a))))$ **は成立しない** (**図** 8)**．** □

定義 4 (基底化保存) 書き換え $C[l\theta] \to C[r\theta]$ **が基底化保存書き換えとは，任意の変数** $x \in V_{NL^{\tau}}(l)$ **について，**$V_{L^{\tau}}(x\theta) = \emptyset$ **かつ，**l' **が** $x\theta$ **に対して重なるような書き換え規則** $l' \to r' \in R^{\tau}$ **が存在しないことである．以下では，基底化保存書き換えを** $\underset{gp}{\longrightarrow}$ **と表す．**

例 7 例 6 **と同じ項書き換えシステム** $R = \{f(x,x) \to g(x), f(h(x,y),x) \to g(a), f(p(x),x) \to g(q(x))), q(x) \to x\}$**，最も一般的な型付け** $\tau = [f : 0 \times 0 \to 1,\ g : 0 \to 0,\ h : 0 \times 2 \to 0,\ p : 0 \to 0,\ q : 0 \to 0,\ a : \to 0]$ **とする．このとき，項** $f(p(z),p(z))$ **は基底化保存書き換えが可能であることを**

示す．まず，$f(p(z),p(z)) = f(x,x)\theta$ となる $\theta = [x \mapsto p(z)]$ が存在する．$V_{NL^\tau}(f(x,x)) = \{x\}$ より，$V_{L^\tau}(x\theta) = V_{L^\tau}(p(z)) = \emptyset$ である．また，l' が $p(z)$ に対して重なる $l' \to r'$ は R^τ に存在しない．よって，$f(p(z),p(z)) = f(x,x)\theta \underset{gp}{\longrightarrow} g(x)\theta = g(p(z))$ となる． □

補題 6 $T(F \cup C_V, V)$ 上の基底化保存書き換え $s \xrightarrow[gp]{p} t$ と，$V_{NL^\tau}(s) \subseteq dom(\theta_{gp})$，$ran(\theta_{gp}) \subseteq T_{NF}(F \cup C_V)$ をみたす任意の代入 θ_{gp} に対して，$s\theta_{gp} \xrightarrow[nf]{p} t\theta_{gp}$ が成立する．

証明． $s = C[l\theta]_p \xrightarrow[gp]{p} C[r\theta]_p = t$，$\theta = \theta_{L^\tau} \cup \theta_{NL^\tau}$，$dom(\theta_{L^\tau}) \subseteq V_{L^\tau}(l)$，$dom(\theta_{NL^\tau}) = V_{NL^\tau}(l)$ とする．$dom(\theta_{NL^\tau}) = V_{NL^\tau}(l)$ より，$V_{NL^\tau}(l) \subseteq dom(\theta_{NL^\tau}\theta_{gp})$ となる．基底化保存書き換えより任意の変数 $x \in V_{NL^\tau}(l)$ について，$V_{L^\tau}(x\theta) = V_{L^\tau}(x\theta_{NL^\tau}) = \emptyset$ であり $V_{NL^\tau}(l\theta) \subseteq dom(\theta_{gp})$，$ran(\theta_{gp}) \subseteq T_{NF}(F \cup C_V)$ なので，$x\theta_{NL^\tau}\theta_{gp} \in T(F \cup C_V)$ となる．ここで，基底化保存書き換えより，l' が $x\theta_{NL^\tau}$ に対して重なるような書き換え規則 $l' \to r' \in R^\tau$ が存在しないので $x\theta_{NL^\tau}\theta_{gp} \in T_{NF}(F \cup C_V)$，$ran(\theta_{NL^\tau}\theta_{gp}) \subseteq T_{NF}(F \cup C_V)$．$V_{NL^\tau}(l) \subseteq dom(\theta_{NL^\tau}\theta_{gp})$，$ran(\theta_{NL^\tau}\theta_{gp}) \subseteq T_{NF}(F \cup C_V)$ より，$l\theta_{NL^\tau}\theta_{gp} \to r\theta_{NL^\tau}\theta_{gp} \in R^\tau_{nf}$ が存在する．よって，$C[l\theta]_p\theta_{gp} = C\theta_{gp}[(l\theta_{NL^\tau}\theta_{gp})\theta_{L^\tau}\theta_{gp}]_p \xrightarrow[nf]{p} C\theta_{gp}[(r\theta_{NL^\tau}\theta_{gp})\theta_{L^\tau}\theta_{gp}]_p = C[r\theta]_p\theta_{gp}$ となるので $s\theta_{gp} \xrightarrow[nf]{p} t\theta_{gp}$ は成立する． □

例 8 例 6 と同じ項書き換えシステム $R = \{f(x,x) \to g(x), f(h(x,y),x) \to g(a), f(p(x),x) \to g(q(x))), q(x) \to x\}$，最も一般的な型付け $\tau = [f : 0 \times 0 \to 1,\ g : 0 \to 0,\ h : 0 \times 2 \to 0,\ p : 0 \to 0,\ q : 0 \to 0,\ a : \to 0]$ とする．例 7 より $f(p(z),p(z)) \underset{gp}{\longrightarrow} g(p(z))$ が成立する．$\theta_{gp} = [z \mapsto a]$ としたとき，$f(p(z),p(z))\theta_{gp} \underset{nf}{\longrightarrow} g(p(z))\theta_{gp}$ であることを示す．まず，$f(p(z),p(z))\theta_{gp} = f(p(a),p(a))$，$g(p(z))\theta_{gp} = g(p(a))$ が得られる．$V_{NL^\tau}(f(x,x)) = \{x\}$，$p(a) \in T_{NF}(F \cup C_V)$ より $f(p(a),p(a)) \to g(a) \in R^\tau_{nf}$ が存在する．よって，$f(p(a),p(a)) \underset{nf}{\longrightarrow} g(p(a))$ が成立する． □

補題 7 $s_0 \xrightarrow[gp]{p_1} s_1 \xrightarrow[gp]{p_2} \cdots \xrightarrow[gp]{p_n} s_n (n \geq 0)$ ならば，$V_{NL^\tau}(s_0) \subseteq dom(\theta_{gp})$，$ran(\theta_{gp}) \subseteq T_{NF}(F \cup C_V)$ をみたす任意の代入 θ_{gp} に対して，$s_0\theta_{gp} \xrightarrow[nf]{p_1} s_1\theta_{gp} \xrightarrow[nf]{p_2} \cdots \xrightarrow[nf]{p_n} s_n\theta_{gp}$ が成立する．

証明．
$V_{NL^\tau}(s_i) \subseteq V_{NL^\tau}(s_0) \subseteq dom(\theta_{gp}) (1 \leq i \leq n)$ と補題 6 より明らか． □

補題 8 $s \xrightarrow[gp]{p_1,p_2,\ldots,p_n \,\shortparallel} t (n \geq 0)$ ならば，$V_{NL^\tau}(s) \subseteq dom(\theta_{gp})$，$ran(\theta_{gp}) \subseteq T_{NF}(F \cup C_V)$ をみたす任意の代入 θ_{gp} に対して，$s\theta_{gp} \xrightarrow[nf]{p_1,p_2,\ldots,p_n \,\shortparallel} t\theta_{gp}$ となる．

証明．
$s \xrightarrow[gp]{p_1,p_2,\ldots,p_n \,\shortparallel} t$ より $s \xrightarrow[gp]{p_1} \xrightarrow[gp]{p_2} \cdots \xrightarrow[gp]{p_n} t$．ここで，補題 7 より $s\theta_{gp} \xrightarrow[nf]{p_1} \xrightarrow[nf]{p_2} \cdots \xrightarrow[nf]{p_n} t\theta_{gp}$ となるので $s\theta_{gp} \xrightarrow[nf]{p_1,p_2,\ldots,p_n \,\shortparallel} t\theta_{gp}$ が得られる． □

左線形な項書き換えシステムの危険対に基づく合流条件を以下に示す．

命題 2 (Huet[4]) R を左線形な項書き換えシステムとする．任意の危険対 $\langle P, Q \rangle \in CP(R)$ について $P \mathrel{\leftarrow\!\!\shortparallel\!\!\rightarrow} Q$ ならば R は合流性をもつ．

命題 3 (Toyama[7]) R を左線形な項書き換えシステムとする．任意の外側危険対 $\langle P, Q \rangle \in CP_{out}(R)$ について $P \mathrel{\leftarrow\!\!\shortparallel\!\!\rightarrow} s$ かつ $Q \xrightarrow{*} s$ となる項 s が存在し，任意の内側危険対 $\langle P', Q' \rangle \in CP_{in}(R)$ について $P' \mathrel{\leftarrow\!\!\shortparallel\!\!\rightarrow} Q'$ をみたすものとする．このとき R は合流性をもつ．

危険対に基づく上記の合流条件をもちいて，停止性をもたない非左線形な項書き換えシステムの合流条件を以下に示す．

定理 2 項書き換えシステム R から得られる型付き項書き換えシステム R^τ が弱左線形とする．このとき，任意の危険対 $\langle P,Q\rangle \in CP(R^\tau)$ について $P \underset{gp}{\twoheadrightarrow} Q$ ならば R は合流性をもつ．

証明． 任意の危険対 $\langle \hat{P},\hat{Q}\rangle \in CP(R^\tau_{nf})$ について，補題 5 より，$P\hat{\theta} = \hat{P}$，$Q\hat{\theta} = \hat{Q}$ となる $\langle P,Q\rangle \in CP(R^\tau)$ と $\hat{\theta}$ が存在する．また，任意の変数 $x \in V_{NL^\tau}(P) \cup V_{NL^\tau}(Q)$ について，$x\hat{\theta} \in T_{NF}(F \cup C_V)$ が成り立つ．よって，$V_{NL^\tau}(P) \subseteq dom(\hat{\theta})$，$ran(\hat{\theta}) \subseteq T_{NF}(F \cup C_V)$．ここで，$P \underset{gp}{\twoheadrightarrow} Q$ に注意すると補題 8 より $\hat{P} = P\hat{\theta} \underset{nf}{\twoheadrightarrow} Q\hat{\theta} = \hat{Q}$ が得られる．よって，R^τ_{nf} は左線形であり，任意の危険対 $\langle \hat{P},\hat{Q}\rangle$ について $\hat{P} \underset{nf}{\twoheadrightarrow} \hat{Q}$ となるので命題 2 より R^τ_{nf} は合流性をもつ．よって，補題 4 より R^τ は合流性をもち，命題 1 より R は合流性をもつ． □

例 9 型付けでは部分システムに分解できない項書き換えシステム R の合流性を定理 2 によって示す．

$$R = \begin{cases} f(g(x),x) \to f(a,x) & (8) \\ f(h(x),y) \to f(h(x),h(y)) & (9) \\ g(x) \to p(x) & (10) \\ p(x) \to a & (11) \end{cases}$$

なお，$f(h(x),y) \to f(h(x),h(y)) \to f(h(x),h(h(y))) \to \cdots$ なる無限列が存在するので，R は停止性をもたない非左線形な項書き換えシステムであることに注意する．R に以下の最も一般的な型付けを行うと R^τ が得られる．

$$\begin{array}{lllllllllll} f & : & 0 \times 1 & \to & 2\,, & \qquad & g & : & 1 & \to & 0\,, \\ h & : & 1 & \to & 0\,, & \qquad & p & : & 1 & \to & 0\,, \\ a & : & & \to & 0 & & & & & & \end{array}$$

このとき，部分システム R^τ_σ は $R^\tau_0 = \emptyset$，$R^\tau_1 = \{(10),(11)\}$，$R^\tau_2 = \{(8),(9),(10),(11)\}$ となり，$R^\tau_2 = R^\tau$ よりこの項書き換えシステムは型付けによる部分システムへの分解ができない．$NL^\tau(R^\tau) = \{0\}$ であり，R^τ_0 は停止性をみたすので型 0 をもつすべての項は最内正規となり，R^τ は弱左線形である．次に，R^τ の危険対を求めると $CP(R^\tau) = \{\langle f(p(x),x), f(a,x)\rangle\}$ が得られ，危険対 $\langle f(p(x),x), f(a,x)\rangle$ は (10) が (8) に対して重なってできた危険対である．ここで，$f(p(x),x) \underset{gp}{\longrightarrow} f(a,x)$ より定理 2 から R は合流性をもつ．なお，R は重なりをもつので定理 1 は適用できないことに注意する． □

定理 3 項書き換えシステム R から得られる型付き項書き換えシステム R^τ が弱左線形とする．このとき，任意の外側危険対 $\langle P,Q\rangle \in CP_{out}(R^\tau)$ について $P \underset{gp}{\twoheadrightarrow} s$ かつ $Q \underset{gp}{\overset{*}{\longrightarrow}} s$ となる s が存在し，任意の内側危険対 $\langle P',Q'\rangle \in CP_{in}(R^\tau)$ について $P' \underset{gp}{\twoheadrightarrow} Q'$ をみたすものとする．このとき R は合流性をもつ．

証明． 任意の外側危険対 $\langle \hat{P},\hat{Q}\rangle \in CP_{out}(R^\tau_{nf})$ について，補題 5 より $P\hat{\theta} = \hat{P}$，$Q\hat{\theta} = \hat{Q}$ となる $\langle P,Q\rangle \in CP_{out}(R^\tau)$ と $\hat{\theta}$ が存在する．また，任意の変数 $x \in V_{NL^\tau}(P) \cup V_{NL^\tau}(Q)$ について，$x\hat{\theta} \in T_{NF}(F \cup C_V)$ が成り立つ．よって，$V_{NL^\tau}(P) \subseteq dom(\hat{\theta})$，$ran(\hat{\theta}) \subseteq T_{NF}(F \cup C_V)$．ここで，$P \underset{gp}{\twoheadrightarrow} s$ に注意すると補題 8 より $\hat{P} = P\hat{\theta} \underset{nf}{\twoheadrightarrow} s\hat{\theta} = \hat{s}$ が得られる．また，$Q \underset{gp}{\overset{*}{\longrightarrow}} s$ と補題 7 より $\hat{Q} = Q\hat{\theta} \underset{nf}{\overset{*}{\longrightarrow}} s\hat{\theta} = \hat{s}$ が得られる．

同様に，任意の内側危険対 $\langle \hat{P}',\hat{Q}'\rangle \in CP_{in}(R^\tau_{nf})$ について，補題 5 より $P'\hat{\theta}' = \hat{P}'$，$Q'\hat{\theta}' = \hat{Q}'$ となる $\langle P',Q'\rangle \in CP_{in}(R^\tau)$ と $\hat{\theta}'$ が存在する．また，任意の変数 $x \in V_{NL^\tau}(P') \cup V_{NL^\tau}(Q')$ について，$x\hat{\theta}' \in T_{NF}(F \cup C_V)$ が成り立つ．よって，$V_{NL^\tau}(P') \subseteq dom(\hat{\theta}')$，$ran(\hat{\theta}') \subseteq T_{NF}(F \cup C_V)$．ここで，$P' \underset{gp}{\twoheadrightarrow} Q'$ に注意すると補題 8 より $\hat{P}' = P'\hat{\theta}' \underset{nf}{\twoheadrightarrow} Q'\hat{\theta}' = \hat{Q}'$ が得られる．

よって，R^τ_{nf} は左線形であり，任意の外側危険対 $\langle \hat{P}, \hat{Q} \rangle$ について $\hat{P} \underset{nf}{\twoheadrightarrow} \hat{s}$ かつ $\hat{Q} \xrightarrow[nf]{*} \hat{s}$ となる $\hat{s}$ が存在し，任意の内側危険対 $\langle \hat{P}', \hat{Q}' \rangle$ について $\hat{P}' \underset{nf}{\twoheadrightarrow} \hat{Q}'$ となるので，命題 3 より R^τ_{nf} は合流性をもつ．よって，補題 4 より R^τ は合流性をもち，命題 1 より R は合流性をもつ． □

上記の定理 3 は定理 1 と定理 2 を含む一般化になっている．

例 10 型付けでは部分システムに分解できない項書き換えシステム R の合流性を定理 3 によって示す．

$$R = \begin{cases} f(x,x) \to f(g(x), g(x)) & (12) \\ f(x,y) \to f(h(x), h(y)) & (13) \\ g(x) \to p(x) & (14) \\ h(x) \to p(x) & (15) \end{cases}$$

R は停止性をもたないことは明らかである．このとき，R に以下の最も一般的な型付けを行うと型付き項書き換えシステム R^τ が得られる．

$$\begin{array}{lllllll} f & : & 0 \times 1 & \to & 2, & g : 1 \to 0, \\ h & : & 0 & \to & 0, & p : 0 \to 0 \end{array}$$

ここで，部分システム R^τ_σ は $R^\tau_0 = \{(14), (15)\}$ と $R^\tau_1 = \{(12), (13), (14), (15)\}$ である．まず，R^τ が弱左線形か調べる．R^τ において左非線形型は型 0 のみである．R^τ_0 は停止性をみたすので型 0 をもつすべての項は最内正規である．よって，R^τ は弱左線形となる．次に，R^τ の危険対について調べると $CP_{out}(R^\tau) = \{\langle f(g(x), g(x)), f(h(x), h(x)) \rangle\}$ であり，$\langle f(g(x), g(x)), f(h(x), h(x)) \rangle$ は (12) が (13) に対して重なってできた外側危険対である．ここで，$f(g(x), g(x)) \underset{gp}{\twoheadrightarrow} f(p(x), p(x)) \xleftarrow[gp]{*} f(h(x), h(x))$ が得られるので外側危険対の条件をみたす．また，R^τ の内側危険対は $CP_{in}(R^\tau) = \emptyset$ となる．よって，定理 3 より R は合流性をもつと判定できる．なお，R は重なりをもつので定理 1 は適用できず，危険対の条件をみたさないため定理 2 も適用できないことに注意する． □

例 11 項書き換えシステム R の合流性が本手法では判定できない例を示す．

$$R = \begin{cases} f(x,y) \to f(g(x), g(x)) & (16) \\ f(g(x), x) \to f(x, g(x)) & (17) \\ g(x) \to h(x) & (18) \end{cases}$$

なお，$f(x,y) \to f(g(x), g(x)) \to f(g(g(x)), g(g(x))) \to \cdots$ なる無限列が存在するので，R は停止性をもたない非左線形な項書き換えシステムであることに注意する．R に以下の最も一般的な型付けを行うと R^τ が得られる．

$$\begin{array}{lllllll} f & : & 0 \times 0 & \to & 1, & g : 0 \to 0, \\ h & : & 0 & \to & 0 & \end{array}$$

部分システム R^τ_σ は $R^\tau_0 = \{(18)\}$，$R^\tau_1 = \{(16), (17), (18)\}$ となり，$R^\tau_1 = R^\tau$ よりこの項書き換えシステムは型付けによる部分システムへの分解ができない．$NL^\tau(R^\tau) = \{0\}$ であり，R^τ_0 は停止性をみたすので型 0 をもつすべての項は最内正規となり，R^τ は弱左線形である．次に，R^τ の外側危険対を求めると $CP_{out}(R^\tau) = \{\langle f(x, g(x)), f(g(g(x)), g(g(x))) \rangle\}$ が得られ，$\langle f(x, g(x)), f(g(g(x)), g(g(x))) \rangle$ は (16) が (17) に対して重なってできた危険対である．ここで，$f(x, g(x)) \underset{gp}{\twoheadrightarrow} s \xleftarrow[gp]{*} f(g(g(x)), g(g(x)))$ となる項 s が存在しないので定理 3 の外側危険対に対する条件をみたさない．よって，本手法では R は合流性をもつと判定できない． □

5　合流性自動判定手続きの実装と実験

本節では，前節で示した定理 3 に基づいて項書き換えシステム R の合流性自動判定手続きを与え，計算機上での合流性自動判定の実験について述べる．定理 3 に基づいた合流性自動判定手続きを以下に与える．

合流性自動判定手続き

入力：項書き換えシステム R

出力：判定結果

1. R と矛盾のない最も一般的な型付け τ を求める．
2. R^τ のすべての左非線形型 σ を求める．
3. すべての左非線形型 σ に対して，以下の手続きを行う．
   - 3-1. R^τ_σ を求める．
   - 3-2. R^τ_σ の最内正規を示す．最内正規でない場合は失敗．
5. R^τ のすべての外側危険対 $\langle P, Q\rangle$ に対して，$P \underset{gp}{\twoheadrightarrow} s$ かつ $Q \overset{*}{\underset{gp}{\longrightarrow}} s$ となる s を求める．
   s が存在しない場合は失敗．
6. R^τ のすべての内側危険対 $\langle P', Q'\rangle$ に対して，$P' \underset{gp}{\twoheadrightarrow} Q'$ か判定．$P' \underset{gp}{\twoheadrightarrow} Q'$ でないならば失敗．
7. R は合流性をもつと判定．

上記の合流性判定手続きの各手続きについて説明する．まず，R と矛盾のない最も一般的な型付けを求める手続きを以下に与える．

型付け自動発見手続き

入力：項書き換えシステム R

出力：型付け τ

1. R に出現するすべての関数記号に対して，それぞれ別々の型を付けた型付け τ を作る．
2. すべての書き換え規則 $l \to r$ に対して，以下の条件をみたすように型付け τ を変更する．
   - $\tau(l) = \tau(r)$．
   - 同じ変数には同じ型が付く．
   - 関数記号の引数の型と同じ型がその引数の項に付く．
3. 型付け τ を出力

次に，基底化保存書き換えの手続きを与える．

基底化保存書き換え

入力：項書き換えシステム R，型付け τ，左非線形型 $NL^\tau(R^\tau)$，項 t

出力：$t \underset{gp}{\longrightarrow} s$ である項 s

1. 項 t に適用できる書き換え規則 $l \to r$ を見つけ，$t = C[l\theta]$ とする．
   適用できる書き換え規則が存在しない場合は失敗．
2. 左非線形型 $NL^\tau(R^\tau)$ より $V_{NL^\tau}(l)$ を求める．
3. 任意の変数 $x \in V_{NL^\tau}(l)$ について以下の手続きを行う．
   - 3-1. 型付け τ より $V_{NL^\tau}(x\theta) = \emptyset$ を判定．$V_{NL^\tau}(x\theta) \neq \emptyset$ ならば失敗．
   - 3-2. l' が $x\theta$ に対して重なる書き換え規則 $l' \to r'$ の存在を示す．$l' \to r'$ が存在する場合は失敗．
4. $s = C[r\theta]$ を出力．

外側危険対 $\langle P, Q\rangle$ に対して，$P \underset{gp}{\twoheadrightarrow} s$ かつ $Q \xrightarrow[gp]{*} s$ となる s が存在するか否かは一般に決定不能である．そこで，$\xrightarrow[gp]{*}$ を n 回以下の基底化保存書き換え $\xrightarrow[gp]{\leq n}$ で近似し，$P \underset{gp}{\twoheadrightarrow} s$ かつ $Q \xrightarrow[gp]{\leq n} s$ となる s が存在するか否かを判定することにする．そのための手続きを以下に与える．

外側危険対条件自動判定手続き

入力：危険対 $\langle P, Q\rangle$，書き換え回数 n，項書き換えシステム R，型付け τ，左非線形型 $NL^\tau(R^\tau)$

出力：判定結果

1. $slist := \{P$ に対して 1 回の並行基底化保存書き換えで得られる項 $\}$．
2. $slist' := \{Q\}$．
3. $slist \cap slist' = \emptyset$ の間，以下の手続きを繰り返す．
   - 3-1. $n = 0$ ならば失敗．
   - 3-2. $slist'' := slist'$．
   - 3-3. $slist' := \{slist''$の項から 1 回の基底化保存書き換えで得られる項 $\}$．
   - 3-4. $n := n - 1$．
4. 成功と判定．

上記の合流性自動判定手続きに基づいて合流性自動判定システム CRCheck を SML/NJ をもちいて実装した (約 1000 行)．R の合流性自動判定手続きの実装において以下のように手続きを変更した．

- 部分システム R^τ_σ の最内正規判定の代わりに，R^τ_σ の停止性の判定を行った．なお，停止性の判定は R^τ_σ の全ての書き換え規則 $l \to r$ に対して $l \succ_{lpo} r$ となる辞書式経路順序 $\succ_{lpo}$ の存在を示すことで行った．
- 外側危険対自動判定手続きにおける書き換え回数は $n = 2$ 以下とした．

例 10 の項書き換えシステムに対する CRCheck の動作例を図 5 に示す．

本システムと本研究室で開発中の合流性自動判定システム ACP[2] をもちいた合流性自動判定の実験を表 5 に示す (◯ は成功を表し，$\times$ は失敗を表す)．停止性をもたない非左線形な項書き換えシステム 9 例に対し，本システムでは成功 8 例，失敗 1 例だった．一方，ACP ではすべての判定に失敗した．なお，この 9 例すべては型付けによる部分システムへの分解に失敗する項書き換えシステムである．実験にもちいた 9 つの例は `http://www.nue.riec.tohoku.ac.jp/papers/12/ppl-tsubasa-appdx.pdf` で公開している．次に，合流性ベンチマーク 106 例 [2] に対する合流性自動判定実験を行ったところ，本システムでは成功 22 例，失敗 84 例，ACP では成功 81 例，失敗 25 例であり，本システムでは判定に成功し ACP では判定に失敗するような例はなかった．

従来，停止性をもたない非左線形な項書き換えシステムの合流性に関してはほとんど研究がされておらず，そのような例がベンチマークにあまり含まれていない．このため，合流性ベンチマークに対する実験では本研究の提案手法の有効性を示すことができなかった．一方，本研究の提案手法は一般的な項書き換えシステム全てにおいて従来の手法と比べて有効なわけではないが，停止性をもたない非左線形な項書き換えシステムである 9 例に対する実験から従来の手法では適用できない例に対して有効性をもつことが確認できた．

```
CRCheck [ F(x,x) -> F(G(x),G(x)),
          F(x,y) -> F(H(x),H(x)),
          G(x) -> P(x),
          H(x) -> P(x)];

  Type
    F : 0 * 0 -> 1
    G : 0     -> 0
    H : 0     -> 0
    P : 0     -> 0

  LeftNonlinearType : 0
    Type 0          : Success
  WeaklyLeftLinear  : Success

  Out-Overlapping   : Success
  In-Overlapping    : Success

  Confluence        : Success
```

図 9. CRCheck **の実行例**

表 1. 本システムと ACP **による合流性判定実験結果**
◯ : **成功，** × : **失敗**

	本システム	ACP
例 1	◯	×
例 2	◯	×
例 3	◯	×
例 4	◯	×
例 5	◯	×
例 6	◯	×
例 7	◯	×
例 8	◯	×
例 9	×	×

6 まとめ

本論文では，永続性に基づく項書き換えシステムの新しい合流性証明手法を提案した．本証明手法では，与えられた項書き換えシステム R から型付き型付き項書き換えシステム R^τ を構成し，さらに R^τ を無限個の書き換え規則からなる左線形な項書き換えシステム R^τ_{nf} に変換する．このとき，R^τ が弱左線形なクラスに属しているならば，R の合流性と R^τ_{nf} の合流性の等価性は保証される．また，無限個の規則からなる R^τ_{nf} の合流性を，有限個の規則からなる R^τ の合流条件から間接的に示す手法を与えた．パターンマッチがあれば強力な項書き換えシステムである非左線形な項書き換えシステムの合流性を判定できる本手法は十分に価値がある．さらに，本手法に基づく合流性自動判定手続きを実装し，従来手法では判定困難であった停止性をもたない非左線形な項書き換えシステムの合流性自動判定に，本手法がきわめて有効であることを実験を通して明らかにした．

型付き項書き換えシステム R^τ が弱左線形のクラスに属さない場合の合流条件については今後の検討課題である．また，基底化保存書き換えを用いることにより R^τ_{nf} の合流性を R^τ の合流条件から間接的に示す手法を与えたが，基底化保存書き換えを使用せずに R^τ_{nf} の合流性を示す手法を検討することも今後の課題である．

謝辞

本論文に貴重なコメントを頂きました査読者に感謝致します．なお，本研究は一部日本学術振興会科学研究費 22500002，23500002 の補助を受けて行われた．

参考文献

[1] T. Aoto, Y. Toyama, Persistency of confluence, *Journal of Universal Computer Science*, Vol. 3, No. 11, pp. 1134–1147, 1997.

[2] T. Aoto, J. Yoshida, Y. Toyama, Proving confluence of term rewriting systems automatically, In *Proc. of RTA 2009*, LNCS, Vol. 5595, pp. 93–102, Springer-Verlag, 2009.

[3] F. Baader and T. Nipkow, *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[4] G. Huet, Confluent reductions: abstract properties and applications to term reriting systems, *Journal of the Association for Computing Machine*, Vol. 27, No. 4, pp. 797–821, 1980.

[5] Y. Toyama, Confluent term rewriting systems (invited talk), In *Proc. of RTA 2005*, LNCS, Vol. 3467, p.1, Springer-Verlag, 2005. Slides can be obtained from `http://www.nue.riec.tohoku.ac.jp/user/toyama/research/slide/toyama-RTA05.pdf`

[6] Y. Toyama, Membership conditional term rewriting systems, *The Transactions of the IEICE*, Vol.E 72, No. 11, pp. 1224–1229, 1989.

[7] Y. Toyama, Commutativity of term rewriting systems, in: K.Fuchi and L.Kott, eds., *Programming of Future Generation Computer II*, pp. 393–407, 1988.

[8] V. van Oostrom, Developing developments, *Theoritical Computer Science*, Vol. 175, No. 1, pp. 159–181, 1997.