片側減少ダイアグラム法による項書き換えシステムの可換性証明法

的場 正樹 [1], 青戸 等人 [2], 外山 芳人 [3]

東北大学 電気通信研究所
{^{1}matoba,^{2}aoto,^{3}toyama}@nue.riec.tohoku.ac.jp

概 要　項書き換えシステムの可換性は合流性を一般化した性質であり，可換性に基づく可換分解は複雑な項書き換えシステムの合流性の証明に有効である．項書き換えシステムの可換性を示す方法として危険対に基づく解析が知られている．一方，抽象リダクションシステムの可換性について減少ダイアグラム法に基づく十分条件が提案されている．しかし，減少ダイアグラム法を適用した項書き換えシステムの可換性条件についてはほとんど研究されていない．本報告では，片側減少ダイアグラム法に基づく可換性条件を適用した項書き換えシステムの可換性の証明法を提案する．

1　はじめに

合流性は項書き換えシステムの重要な性質であり，項書き換えシステムに基づくプログラムの自動変換や定理自動証明で利用されている．複雑なシステムの合流性を示すには，可換性による可換分解が有効である．項書き換えシステムの可換性に関しては，危険対解析に基づく十分条件が知られている [9, 13]．また，その十分条件は合流性判定システム ACP においても可換分解で用いられている [2, 13]．しかし，項書き換えシステムの可換性の十分条件は，文献 [9, 13] で示された危険対解析に基づく条件以外には殆ど研究されていない．

抽象リダクションシステムの可換性証明法として，減少ダイアグラム法 [10] が知られている．減少ダイアグラム法の項書き換えシステムの合流性証明への応用は試みられている [1, 5, 11, 12] が，それを項書き換えシステムの可換性証明に応用した研究はほとんど知られていない．そこで，本研究では減少ダイアグラム法に基づく項書き換えシステムの可換性証明法を提案する．

減少ダイアグラム法を線形でない項書き換えシステムの合流性証明に適用するためには，変数位置などの情報に基づく複雑な解析を利用する必要がある [1, 12]．本論文では，そのような複雑な解析を必要としない片側減少ダイアグラムを用いた可換性証明法を提案する．まず，片側減少ダイアグラムの正当性を減少ダイアグラム法に基づいて与える．そして，片側減少ダイアグラムに基づいて，線形項書き換えシステムと左線形項書き換えシステムとの可換性十分条件を与える．次に，その条件を，並行書き換えのアイデアを用いて，左線形項書き換えシステム同士の可換性条件へ拡張する．

本論文の構成は以下の通りである．第 2 節では，抽象リダクションシステムと項書き換えシステムの基本的な概念について説明する．第 3 節では，抽象リダクションシステムの減少ダイアグラム法による可換性について説明し，第 4 節では，ルールラベリングを用いた項書き換えシステムの可換性について説明する．第 5 節では，可換性判定手続き，第 6 節では，可換性判定法の実装と実験について説明する．第 7 節では，本研究のまとめと今後の課題について説明する．

2 準備

本節では，項書き換えシステムおよび抽象リダクションシステムに関する基本的な用語や概念を文献 [3, 8] に従って定義する．

集合 I をラベル集合とするとき，$\alpha \in I$ でラベル付けされた集合 D 上の関係 $\to_\alpha$ を考える．このとき，$A = (D, \langle \to_\alpha \rangle_{\alpha \in I})$ を抽象リダクションシステム，$\to_\alpha$ をリダクション関係という．$|I| = 1$ のとき，簡単に $A = (D, \to)$ 等で表す．$J \subseteq I$ に対して，$\to_J = \bigcup_{\alpha \in J} \to_\alpha$ と定義する．また，$I = \{\alpha\}$ のとき，$\to_I$ を $\to_\alpha$ と記す．$\succ$ を I 上の順序とする．$\succ$ が整礎であるとは，$\alpha_0 \succ \alpha_1 \succ \cdots$ のような無限列が存在しないことをいう．$\alpha \in I$ に対して，$\curlyvee\alpha = \{\beta \in I \mid \beta \prec \alpha\}$ とする．関係 $\to$ の逆，反射閉包，反射推移閉包をそれぞれ $\leftarrow$，$\to^=$，$\to^*$ で表す．

関数記号の集合 F と変数記号の集合 V から得られる項の集合を $T(F, V)$ と表す．項 t に 2 回以上現れる変数がないとき，t を線形項という．

項 t の部分項の位置は正整数の列で表す．t 自身の位置は ϵ(空列) で表し，$t = f(t_1, t_2, \ldots t_n)$，かつ，$t_i (1 \leq i \leq n)$ の部分項 s の位置が u のとき，t におけるその部分項 s の位置は iu で表す．項 t の位置の集合を $Pos(t)$，変数位置の集合を $Pos_V(t)$，関数位置の集合を $Pos_F(t)$ で表す．$v = uw$ のとき，$v/u = w$ と定める．$u \leq v$ を $\exists w.uw = v$，$u || v$ を $u \not\geq v \wedge v \not\geq u$ で定義する．$u || \{v_1, \ldots, v_n\}$ は $u || v_i (i = 1, \ldots, n)$ を表すものとする．項 t の位置 p に現れる部分項を $t|_p$ で表し，その位置の部分項を項 s で置き換えたものを $t[s]_p$ で表す．

項の対 (l, r) が，$l \notin V$ かつ $\mathit{Var}(l) \supseteq \mathit{Var}(r)$ をみたすとき，その対を書き換え規則といい，$l \to r$ で表す．ここで，$Var(t)$ は t に現れる変数の集合を表す．書き換え規則の集合 R を項書き換えシステムという．書き換え規則 $l \to r \in R$，文脈 $C[\;]$，代入 θ が存在して $s = C[l\theta], t = [r\theta]$ となるとき，s は t に書き換えられるといい，$s \xrightarrow{R} t$ と表す．$\xrightarrow{R}$ を書き換え関係とよび，R が明らかなときは $\xrightarrow{R}$ を $\to$ と略記する．項 l と r が線形項のとき，書き換え規則 $l \to r$ を線形といい，項 l が線形項のとき，左線形という．とくに，線形でない左線形な書き換え規則を真左線形という．また，項書き換えシステム R 中の任意の書き換え規則が線形 (左線形，真左線形) のとき，R は線形 (左線形，真左線形) という．

$l_1 \to r_1, l_2 \to r_2$ を書き換え規則とする．ここで，これらの書き換え規則は変数を共有しないと仮定する．$l_1 \to r_1$ が $l_2 \to r_2$ に位置 p で重なるとは，$l_2|_p \notin V$，かつ l_1 と $l_2|_p$ が単一化可能であることをいい，重なりを $\langle l_1 \to r_1, l_2 \to r_2, p \rangle$ で表す．ただし，$l_1 \to r_1, l_2 \to r_2$ が同一規則の場合には $p \neq \epsilon$ とする．R_1 と R_2 を項書き換えシステムとするとき，R_1 の R_2 に対する重なりの集合 $overlap(R_1, R_2)$ を $\{\langle l_1 \to r_1, l_2 \to r_2, p \rangle \mid l_i \to r_i \in R_i (i = 1, 2)\}$ と定義する．また，重なり $\langle l_1 \to r_1, l_2 \to r_2, p \rangle$ の l_1 と $l_2|_p$ の最汎単一化子を θ とするとき，この重なりから得られる項の対 $\langle l_2[r_1]_p\theta, r_2\theta \rangle_{l_1 \to r_1, l_2 \to r_2}$ を $l_1 \to r_1$ の $l_2 \to r_2$ に対する危険対とよび，重なりが明らかな場合には $\langle l_2[r_1]\theta, r_2\theta \rangle$ と略記する．R_1 と R_2 を項書き換えシステムとするとき，R_1 の R_2 に対する危険対の集合 $CP(R_1, R_2)$ を，$\{\langle l_2[r_1]_p\theta, r_2\theta \rangle_{l_1 \to r_1, l_2 \to r_2} \mid l_i \to r_i \in R_i (i = 1, 2)\}$ とする．また，$CP(R_1, R_2)^{-1} = \{\langle s, t \rangle_{l_2 \to r_2, l_1 \to r_1} \mid \langle t, s \rangle_{l_1 \to r_1, l_2 \to r_2} \in CP(R_1, R_2)\}$ と定める．とくに，$CP(R, R)$ を R の危険対とよび，$CP(R)$ で示す．

3 減少ダイアグラム法による可換性

本節では，抽象リダクションシステムにおける減少ダイアグラム法に基づく可換性の十分条件を検討する．

定義 1 (可換性) 抽象リダクションシステム $A_1 = (D, \langle \xrightarrow{1}_\alpha \rangle_{\alpha \in I_1})$ と $A_2 = (D, \langle \xrightarrow{2}_\beta \rangle_{\beta \in I_2})$ が可換性をもつとは，$\xrightarrow{1} = \bigcup_{\alpha \in I_1} \xrightarrow{1}_\alpha$，$\xrightarrow{2} = \bigcup_{\beta \in I_2} \xrightarrow{2}_\beta$ とするとき，$\xleftarrow{1}{}^* \cdot \xrightarrow{2}{}^* \subseteq \xrightarrow{2}{}^* \cdot \xleftarrow{1}{}^*$ をみたすことをいう (図 1).

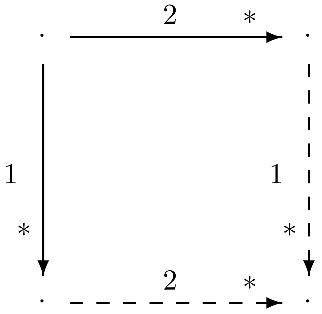


図 1. 可換性

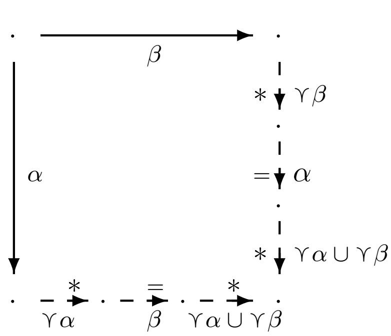


図 2. 減少性

定義 2 (合流性) 抽象リダクションシステム $A = (D, \langle \rightarrow_\alpha \rangle_{\alpha \in I})$ が合流性をもつとは，$\overset{1}{\rightarrow} = \bigcup_{\alpha \in I_1} \overset{1}{\rightarrow}_\alpha$ とするとき，$\leftarrow^* \cdot \rightarrow^* \subseteq \rightarrow^* \cdot \leftarrow^*$ をみたすことをいう．

命題 1 (可換分解定理 [7]) 抽象リダクションシステム $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ とする．このとき，すべての i, j に対して A_i と A_j が可換性をみたすならば，A は合流性をみたす．

定義 3 (減少性) 抽象リダクションシステム $A_1 = (D, \langle \overset{1}{\rightarrow}_\alpha \rangle_{\alpha \in I_1})$ と $A_2 = (D, \langle \overset{2}{\rightarrow}_\beta \rangle_{\beta \in I_2})$ が (局所) 減少性をもつとは，$\overset{1}{\leftarrow}_\alpha \cdot \overset{2}{\rightarrow}_\beta \subseteq \overset{2}{\rightarrow}^*_{\curlyvee\alpha} \cdot \overset{2}{\rightarrow}^=_\beta \cdot \overset{2}{\rightarrow}^*_{\curlyvee\alpha\cup\beta} \cdot \overset{1}{\leftarrow}^*_{\curlyvee\alpha\cup\beta} \cdot \overset{1}{\leftarrow}^=_\alpha \cdot \overset{1}{\leftarrow}^*_{\curlyvee\beta}$ をみたす $I_1 \cup I_2$ 上の整礎順序 $\succ$ が存在することをいう (図 2)．

命題 2 [11] 抽象リダクションシステム $A_1 = (D, \langle \overset{1}{\rightarrow}_\alpha \rangle_{\alpha \in I_1})$ と $A_2 = (D, \langle \overset{2}{\rightarrow}_\alpha \rangle_{\alpha \in I_2})$ が (局所) 減少性をもつとき，A_1 と A_2 は可換性をもつ．

可換性を保証する上記の局所減少性では，ふたつのリダクションシステム A_1 と A_2 の役割が対称的となっている．一方，ふたつのリダクションシステムの役割を非対称的とすることで，局所減少条件とは異なる可換条件を考えることも可能である．ここでは，可換性を保証する非対称的な十分条件として片側減少性を提案する．局所減少性とは異なり，片側減少性では A_2 の減少性のみが要求されている．

定義 4 (片側減少性) 抽象リダクションシステム $A_1 = (D, \overset{1}{\rightarrow})$ に対して $A_2 = (D, \langle \overset{2}{\rightarrow}_\beta \rangle_{\beta \in I_2})$ が片側減少性をもつとは，I_2 上の整礎順序 $\succ$ が存在して，$\overset{1}{\leftarrow} \cdot \overset{2}{\rightarrow}_\beta \subseteq \overset{2}{\rightarrow}^=_\beta \cdot \overset{2}{\rightarrow}^*_{\curlyvee\beta} \cdot \overset{1}{\leftarrow}^*$ をみたすときをいう (図 3)．

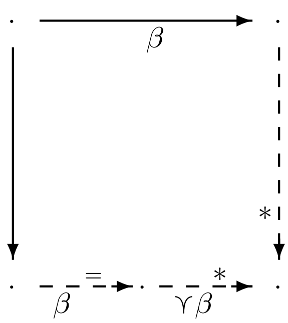


図 3. 片側減少性

補題 1 抽象リダクションシステム $A_1 = (D, \overset{1}{\rightarrow})$ に対して $A_2 = (D, \langle \overset{2}{\rightarrow}_\beta \rangle_{\beta \in I_2})$ が片側減少性をもつとき，A_1 と A_2 は可換性をもつ．

(証明)
仮定より I_2 上の整礎順序 $\succ_2$ が存在して，$\overset{1}{\leftarrow} \cdot \overset{2}{\rightarrow}_\beta \subseteq \overset{2}{\rightarrow}^{=}_{\beta} \cdot \overset{2}{\rightarrow}^{*}_{\curlyvee_2 \beta} \cdot \overset{1}{\leftarrow}^{*}$ をみたす．$I_1 = \{\alpha_0\}$ とし，$I_1 \cup I_2$ 上の整礎順序 $\succ$ を $\succ\ =\ \succ_2 \cup \{\langle \beta, \alpha_0 \rangle \mid \beta \in I_2\}$ により定めると，$\succ_2$ が整礎なので $\succ$ も整礎となる．このとき，$A_1 = (D, \langle \overset{1}{\rightarrow}_\alpha \rangle_{\alpha \in I_1})$ と $A_2 = (D, \langle \overset{2}{\rightarrow}_\beta \rangle_{\beta \in I_2})$ が弱減少性をもつことを示す．$a \overset{1}{\leftarrow}_{\alpha_0} \cdot \overset{2}{\rightarrow}_\beta\ b$ とすると，仮定からある $c, d \in D$ が存在して，$a \overset{2}{\rightarrow}^{=}_{\beta}\ c \overset{2}{\rightarrow}^{*}_{\curlyvee_2 \beta}\ d \overset{1}{\leftarrow}^{*}_{\alpha_0}\ b$．順序 $\succ$ の取り方から $\beta \succ \alpha_0$ なので $d \overset{1}{\leftarrow}^{*}_{\curlyvee \beta}\ b$．よって，$\succ\ \supseteq\ \succ_2$ より $a \overset{2}{\rightarrow}^{*}_{\curlyvee \alpha_0}\ a \overset{2}{\rightarrow}^{=}_{\beta}\ c \overset{2}{\rightarrow}^{*}_{\curlyvee \alpha_0 \cup \beta}\ d \overset{1}{\leftarrow}^{*}_{\curlyvee \alpha_0 \cup \beta}\ d \overset{1}{\leftarrow}^{=}_{\alpha_0}\ d \overset{1}{\leftarrow}^{*}_{\curlyvee \beta}\ b$．よって，命題 2 より A_1 と A_2 は可換性をもつ． □

4　項書き換えシステムの可換性

本節では，前節で得られた抽象リダクションシステムの可換性条件を用いて，項書き換えシステムの可換性を示す．

4.1　線形項書き換えシステムの可換性

まずはじめに，項書き換えシステムの可換性の定義を与える．

定義 5 R_1 と R_2 を項書き換えシステムとする．R_1 と R_2 が可換性をもつとは，抽象リダクションシステム $(T(F,V), \overset{R_1}{\rightarrow})$ と $(T(F,V), \overset{R_2}{\rightarrow})$ が可換性をもつことをいう．

前節で得られた可換性の条件を項書き換えシステムに応用するには，適当なラベルを定める必要がある．ルールラベリングとは，項書き換えシステムの書き換え規則の重みをラベルとして用いる方法である．具体的には，R 上のラベリング関数 $\delta : R \rightarrow \mathbb{N}$ を考え，$s = C[l\theta], t = C[r\theta], \delta(l \rightarrow r) = i$ のとき，$s \overset{R}{\rightarrow}_i t$ とラベル付けを行う．ラベル集合 $\mathbb{N}$ 上の整礎順序 $\succ$ として，自然数の大小関係を用いる．

定理 1 R_1，R_2 を線形な項書き換えシステムとする．R_1, R_2 上のラベリング関数 δ が存在して，すべての $\langle c_1, c_2 \rangle_{l \rightarrow r, l' \rightarrow r'} \in CP(R_1, R_2) \cup CP(R_2, R_1)^{-1}$ に対して，$\delta(l \rightarrow r) = \alpha, \delta(l' \rightarrow r') = \beta$ ならば $c_1 \overset{R_2}{\rightarrow}^{*}_{\curlyvee \alpha} \cdot \overset{R_2}{\rightarrow}^{=}_{\beta} \cdot \overset{R_2}{\rightarrow}^{*}_{\curlyvee \alpha \cup \curlyvee \beta} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}^{*}_{\curlyvee \alpha \cup \curlyvee \beta} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}^{=}_{\alpha} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}^{*}_{\curlyvee \beta}\ c_2$ が成立するものとする．このとき，R_1 と R_2 は可換性をもつ．

(証明)
$\delta(l' \rightarrow r') = \beta$ なる $l' \rightarrow r' \in R_2$ と $t = t[l\sigma]_p \overset{R_1}{\rightarrow}_\alpha t[r\sigma]_p = t_1$，$t = t[l'\tau]_q \overset{R_2}{\rightarrow}_\beta t[r'\tau]_q = t_2$ を考える．

1. $p || q$ の場合．このとき，$l \rightarrow r \in R_1$，$l' \rightarrow r' \in R_2$，$t = C[l\sigma, l'\tau]_{p,q}$，$t_1 = C[r\sigma, l'\tau]_{p,q}$，$t_2 = C[l\sigma, r'\tau]_{p,q}$ とおける．よって $t_1 = C[r\sigma, l'\tau]_{p,q} \overset{R_2}{\rightarrow}_\beta C[r\sigma, r'\tau]_{p,q} \overset{R_1}{\leftarrow}_\alpha C[l\sigma, r'\tau]_{p,q} = t_2$ となる．
2. $p \leq q$ の場合．
   (a) ある $p_0 \in Pos_V(l)$ が存在して，$pp_0 \leq q$ の場合．このとき，$t_1 = t[r\sigma]_p \overset{R_1}{\leftarrow}_\alpha t \overset{R_2}{\rightarrow}_\beta t[l\sigma']_p = t_2$ とおけ，R_1 は線形なので，$t_1 \overset{R_2}{\rightarrow}^{=}_{\beta} t[r\sigma']_p \overset{R_1}{\leftarrow}_\alpha t_2$ となる．
   (b) $q/p \in Pos_F(l)$ の場合．このとき，$l' \rightarrow r' \in R_2$ は $l \rightarrow r \in R_1$ に重なっているので，$l' \rightarrow r'$ の $l \rightarrow r$ に対する危険対 $\langle c_2, c_1 \rangle \in CP(R_2, R_1)$ に対して，$t_1 = t[c_1\rho]_p \overset{R_1}{\leftarrow}_\alpha t \overset{R_2}{\rightarrow}_\beta t[c_2\rho]_p = t_2$ となるような代入 ρ が存在する．仮定より，$c_1 \overset{R_2}{\rightarrow}^{*}_{\curlyvee \alpha} \cdot \overset{R_2}{\rightarrow}^{=}_{\beta} \cdot \overset{R_2}{\rightarrow}^{*}_{\curlyvee \alpha \cup \curlyvee \beta} u \overset{R_1}{\leftarrow}^{*}_{\curlyvee \alpha \cup \curlyvee \beta} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}^{=}_{\alpha} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}^{*}_{\curlyvee \beta}\ c_2$ が成り立ち，ルールラベリングより適用した規則が同じならばラベルは変わらないので，同様に $t_1 = t[c_1\rho]_p \overset{R_2}{\rightarrow}^{*}_{\curlyvee \alpha} \cdot \overset{R_2}{\rightarrow}^{=}_{\beta} \cdot \overset{R_2}{\rightarrow}^{*}_{\curlyvee \alpha \cup \curlyvee \beta} t[u\rho]_p \overset{R_1}{\leftarrow}^{*}_{\curlyvee \alpha \cup \curlyvee \beta} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}^{=}_{\alpha} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}^{*}_{\curlyvee \beta} t[c_2\rho]_p = t_2$ となる．

3. $q \leq p$ の場合．2 と同様.

よってすべての場合で減少性をみたすため，命題 2 より R_1 と R_2 は可換性をもつ. $\square$

4.2 線形と左線形項書き換えシステムの可換性

以下では，線形項書き換えシステムと左線形項書き換えシステムの可換性を片側減少性を用いて示す.

定理 2 R_1 を線形，R_2 を左線形な項書き換えシステムとする．R_2 上のラベリング関数 δ が存在して，すべての $\langle c_1, c_2\rangle_{l \to r, l' \to r'} \in CP(R_1, R_2) \cup CP(R_2, R_1)^{-1}$ に対して，$\delta(l' \to r') = \beta$ ならば $c_1 \overset{R_2}{\to}{}^{=}_{\beta} \cdot \overset{R_2}{\to}{}^{*}_{\curlyvee\beta} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*} c_2$ が成立するものとする．このとき，R_1 と R_2 は可換性をもつ.

(証明)

$\delta(l' \to r') = \beta$ なる $l' \to r' \in R_2$ と $t = t[l\sigma]_p \overset{R_1}{\to} t[r\sigma]_p = t_1$，$t = t[l'\tau]_q \overset{R_2}{\to}_{\beta} t[r'\tau]_q = t_2$ を考える.

1. $p||q$ の場合．このとき，$l \to r \in R_1$，$l' \to r' \in R_2$，$t = C[l\sigma, l'\tau]_{p,q}$，$t_1 = C[r\sigma, l'\tau]_{p,q}$，$t_2 = C[l\sigma, r'\tau]_{p,q}$ とおける．よって $t_1 = C[r\sigma, l'\tau]_{p,q} \overset{R_2}{\to}_{\beta} C[r\sigma, r'\tau]_{p,q} \overset{R_1}{\leftarrow} C[l\sigma, r'\tau]_{p,q} = t_2$ となる.
2. $p \leq q$ の場合.
   (a) ある $p_0 \in Pos_V(l)$ が存在して，$pp_0 \leq q$ の場合．このとき，$t_1 = t[r\sigma]_p \overset{R_1}{\leftarrow} t \overset{R_2}{\to}_{\beta} t[l\sigma']_p = t_2$ とおけ，R_1 は線形なので，$t_1 \overset{R_2}{\to}{}^{=}_{\beta} t[r\sigma']_p \overset{R_1}{\leftarrow} t_2$ となる.
   (b) $q/p \in Pos_F(l)$ の場合．このとき，$l' \to r' \in R_2$ は $l \to r \in R_1$ に重なっているので，$l' \to r'$ の $l \to r$ に対する危険対 $\langle c_2, c_1\rangle \in CP(R_2, R_1)$ に対して，$t_1 = t[c_1\rho]_p \overset{R_1}{\leftarrow} t \overset{R_2}{\to}_{\beta} t[c_2\rho]_p = t_2$ となるような代入 ρ が存在する．仮定より，$c_1 \overset{R_2}{\to}{}^{=}_{\beta} \cdot \overset{R_2}{\to}{}^{*}_{\curlyvee\beta} u \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*} c_2$ が成り立ち，ルールラベリングより適用した規則が同じならばラベルは変わらないので，同様に $t_1 = t[c_1\rho]_p \overset{R_2}{\to}{}^{=}_{\beta} \cdot \overset{R_2}{\to}{}^{*}_{\curlyvee\beta} t[u\rho]_p \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*} t[c_2\rho]_p = t_2$ となる.
3. $q \leq p$ の場合.
   (a) ある $q_0 \in Pos_V(l')$ が存在して $qq_0 \leq p$ の場合．このとき，$t_1 = t[l'\sigma']_q \overset{R_1}{\leftarrow} t \overset{R_2}{\to}_{\beta} t[r'\sigma]_q = t_2$ とおけ，R_2 は左線形なので，$t_1 \overset{R_2}{\to}_{\beta} t[r'\sigma']_q \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*} t_2$ となる.
   (b) $p/q \in Pos_F(l')$ の場合．このとき，$l \to r \in R_1$ は $l' \to r' \in R_2$ に重なっているので，$l \to r$ の $l' \to r'$ に対する危険対 $\langle c_1, c_2\rangle \in CP(R_1, R_2)$ に対して，$t_1 = t[c_1\rho]_q \overset{R_1}{\leftarrow} t \overset{R_2}{\to}_{\beta} t[c_2\rho]_q = t_2$ となるような代入 ρ が存在する．仮定より，$c_1 \overset{R_2}{\to}{}^{=}_{\beta} \cdot \overset{R_2}{\to}{}^{*}_{\curlyvee\beta} u \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*} c_2$ が成り立ち，ルールラベリングより適用した規則が同じならばラベルは変わらないので，同様に $t_1 = t[c_1\rho]_q \overset{R_2}{\to}{}^{=}_{\beta} \cdot \overset{R_2}{\to}{}^{*}_{\curlyvee\beta} t[u\rho]_q \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*} t[c_2\rho]_p = t_2$ となる.

よってすべての場合で片側減少性をみたすため，補題 1 より R_1 と R_2 は可換性をもつ. $\square$

例 1 次のような項書き換えシステム R_1 と R_2 を考える.

$$R_1 = \begin{cases} A(x) \to B(x) \\ B(x) \to B(B(x)) \end{cases}$$

$$R_2 = \begin{cases} a \ : \ F(A(x)) \to G(F(A(x)), F(A(x))) \\ b \ : \ F(B(x)) \to H(B(x)) \\ c \ : \ H(x) \to G(F(B(x)), F(B(x))) \end{cases}$$

このとき，以下の危険対が得られる．

$$CP(R_1,R_2) = \begin{cases} \langle F(B(x)), G(F(A(x)), F(A(x)))\rangle, \\ \langle F(B(B(x))), H(B(x))\rangle \end{cases}$$

$$CP(R_2,R_1) = \emptyset$$

ここで，$\delta(a) = 2$，$\delta(b) = \delta(c) = 1$ のようなラベリング関数を考えると，危険対 $F(B(x)) \overset{R_1}{\leftarrow} F(A(x)) \overset{R_2}{\rightarrow}_2 G(F(A(x)), F(A(x)))$ に対して $F(B(x)) \overset{R_2}{\rightarrow}_1 \overset{R_2}{\rightarrow}_1 G(F(B(B(x))), F(B(B(x)))) \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*} G(F(A(x)), F(A(x)))$ が成立する．また，危険対 $F(B(B(x))) \overset{R_1}{\leftarrow} F(B(x)) \overset{R_2}{\rightarrow}_1 H(B(x)))$ に対して $F(B(B(x))) \overset{R_2}{\rightarrow}_1 H(B(B(x))) \overset{R_1}{\leftarrow} H(B(x)))$ が成立する．よって，定理 2 の条件がみたされるので R_1 と R_2 は可換性をもつ．なお，危険対に基づく従来の可換性判定法 [9][13] では，R_1 と R_2 の可換性を示すことはできない．

線形な項書き換えシステムと左線形な項書き換えシステムの可換性をルールラベリングに基づく減少ダイアグラム法で示す場合，一般の減少ダイアグラムの代わりに片側減少ダイアグラムを用いても証明能力は低下しないことを以下の例で説明する．

例 2 次のような項書き換えシステム R_1 と R_2 を考える．

$$R_1 = \begin{cases} \alpha \ : \ a \to b \end{cases}$$

$$R_2 = \begin{cases} \beta \ : \ F(x) \to G(x,x) \end{cases}$$

このとき，危険対 $F(b) \overset{R_1}{\leftarrow}_{\alpha} F(a) \overset{R_2}{\rightarrow}_{\beta} F(a,a)$ に対して $F(b) \overset{R_2}{\rightarrow}_{\beta} F(b,b) \overset{R_1}{\leftarrow}_{\alpha} \overset{R_1}{\leftarrow}_{\alpha} F(a,a)$ となり，一般の減少ダイアグラムを適用する場合には，ラベリング関数は $\beta \succ \alpha$ をみたす必要がある．つまり R_2 の左線形な書き換え規則の右辺に 2 回以上出現する変数がある場合には，その規則のラベルを R_1 の任意の規則のラベルより大きくしなければ，一般の減少ダイアグラムを適用することができない．したがって，このような場合には，片側減少ダイアグラムの適用と等しくなる．

なお，線形と線形な項書き換えシステムの可換性を示す場合，片側減少ダイアグラムは適用できないが，一般の減少ダイアグラム法が適用できる場合があることに注意する．

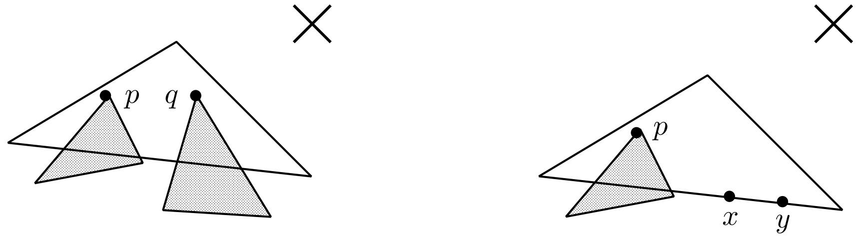
4.3 左線形項書き換えシステムの可換性

次に，左線形な項書き換えシステムの可換性を並列書き換えについての片側減少性を用いることによって示す．まず，並列書き換えと危険対解析を容易にするための排他的重なりを定義する．

定義 6 (並列書き換え) $s = C[s_1, \ldots, s_n]$，$t = C[t_1, \ldots, t_n] (n \geq 0)$ とする．$s_i \overset{R}{\rightarrow} t_i (1 \leq i \leq n)$ のとき $s \overset{R}{\twoheadrightarrow} t$ と定義する．また，$s_i \overset{R}{\rightarrow}_{\beta} t_i (1 \leq i \leq n)$ ならば，$s \overset{R}{\twoheadrightarrow}_{\beta} t$ とする．

$\overset{R}{\rightarrow} \subseteq \overset{R}{\twoheadrightarrow} \subseteq \overset{R}{\rightarrow}{}^{*}$ は定義より自明なので $\overset{R}{\rightarrow}{}^{*} = \overset{R}{\twoheadrightarrow}{}^{*}$ が成りたつことに注意する．

定義 7 (排他的重なり) R_1 と R_2 を項書き換えシステムとする．重なり $\langle l_1 \to r_1, l_2 \to r_2, p\rangle \in overlap(R_1, R_2)$ が排他的であるとは，$Var(l_2[\ ]_p) = \emptyset$ をみたし，どの $l'_1 \to r'_1 \in R_1$ も $l_2 \to r_2$ に対して $q||p$ なる位置 q では重ならないことをいう (図 4)．また，全ての $\langle l_1 \to r_1, l_2 \to r_2, p\rangle \in overlap(R_1, R_2)$ が排他的ならば R_1 の R_2 に対する重なりが排他的であるという．



$q||p$ なる位置 q で重なることがない　　　　$Var(l_2[\ ]_p) = \emptyset$

図 4. 排他的重なり

補題 2 R_1，R_2 を左線形な項書き換えシステムとし，R_2 の R_1 に対する重なりが排他的，かつ，R_2 上のラベリング関数を δ とする．さらに，すべての $\langle c_1, c_2\rangle_{l\to r, l'\to r'} \in CP(R_1, R_2) \cup CP(R_2, R_1)^{-1}$ に対して，$\delta(l' \to r') = \beta$ ならば $c_1 \overset{R_2}{\mathrel{-\!\!\!\!\|\!\!\!\!\rightarrow}}_{\beta} \cdot \overset{R_2}{\to}{}^{*}_{\curlyvee\beta} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*}\, c_2$ が成立するものとする．このとき，R_1 と R_2 は $\overset{R_1}{\longleftarrow} \cdot \overset{R_2}{\mathrel{-\!\!\!\!\|\!\!\!\!\rightarrow}}_{\beta} \subseteq \overset{R_2}{\mathrel{-\!\!\!\!\|\!\!\!\!\rightarrow}}_{\beta} \cdot \overset{R_2}{\to}{}^{*}_{\curlyvee\beta} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*}$ をみたす．

(証明)
以下では，$t_1 \overset{R_1}{\longleftarrow} t \overset{R_2}{\mathrel{-\!\!\!\!\|\!\!\!\!\rightarrow}}_{\beta} t_2$ ならば $t_1 \overset{R_2}{\mathrel{-\!\!\!\!\|\!\!\!\!\rightarrow}}_{\beta} \cdot \overset{R_2}{\to}{}^{*}_{\curlyvee\beta} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*} t_2$ となることを示す．このとき，$t = C[l\sigma]_p \overset{R_1}{\to} C[r\sigma]_p = t_1$，$t = C'[l'_1\tau_1, \ldots, l'_n\tau_n]_{q_1,\ldots,q_n} \overset{R_2}{\mathrel{-\!\!\!\!\|\!\!\!\!\rightarrow}}_{\beta} C'[r'_1\tau_1, \ldots, r'_n\tau_n]_{q_1,\ldots,q_n} = t_2$ とおける．ただし $\delta(l'_i \to r'_i) = \beta$ となることに注意する．
p と q の位置関係で場合分けをする．

1. $p||\{q_1, \ldots, q_n\}$ の場合．
このとき，$t = C''[l\sigma, l'_1\tau_1, \ldots, l'_n\tau_n]_{p,q_1,\ldots,q_n}$，$t_1 = C''[r\sigma, l'_1\tau_1, \ldots, l'_n\tau_n]_{p,q_1,\ldots,q_n}$，$t_2 = C''[l\sigma, r'_1\tau_1, \ldots, r'_n\tau_n]_{p,q_1,\ldots,q_n}$ とおける．よって $t_1 = C''[r\sigma, l'_1\tau_1, \ldots, l'_n\tau_n]_{p,q_1,\ldots,q_n} \overset{R_2}{\mathrel{-\!\!\!\!\|\!\!\!\!\rightarrow}}_{\beta} C''[r\sigma, r'_1\tau_1, \ldots, r'_n\tau_n]_{p,q_1,\ldots,q_n} \overset{R_1}{\leftarrow} C''[l\sigma, r'_1\tau_1, \ldots, r'_n\tau_n]_{p,q_1,\ldots,q_n} = t_2$ となる．
2. $p \le q_k$ なる q_k が存在する場合．一般性を失うことなく，$p \le q_1, \ldots, q_k$ かつ，$p||\{q_{k+1}, \ldots, q_n\}$ と仮定してよい．

   (a) 任意の $i \in 1, \ldots, k$ に対して，ある $p_i \in Pos_V(l)$ が存在して，$pp_i \le q_i$ が成立する場合．
   $t_1 = C''[r\sigma, l'_{k+1}\tau_{k+1}, \ldots, l'_n\tau_n]_{p,q_{k+1},\ldots,q_n} \overset{R_1}{\leftarrow} t \overset{R_2}{\mathrel{-\!\!\!\!\|\!\!\!\!\rightarrow}}_{\beta} C''[l\sigma', r'_{k+1}\tau_{k+1}, \ldots, r'_n\tau_n]_{p,q_{k+1},\ldots,q_n} = t_2$ とおける．このとき，$q_i||q_j (1 \le i < j \le k)$, $l\sigma \overset{R_2}{\mathrel{-\!\!\!\!\|\!\!\!\!\rightarrow}}_{\beta} l\sigma'$ より，任意の $x \in dom(\sigma)$ に対して，$x\sigma \overset{R_2}{\mathrel{-\!\!\!\!\|\!\!\!\!\rightarrow}}_{\beta} x\sigma'$ が成立．よって，$t_1 \overset{R_2}{\mathrel{-\!\!\!\!\|\!\!\!\!\rightarrow}}_{\beta} C''[r\sigma', l'_{k+1}\tau_{k+1}, \ldots, l'_n\tau_n]_{p,q_{k+1},\ldots,q_n}$．また，$p||\{q_{k+1}, \ldots, q_n\}$ より，$C''[r\sigma', l'_{k+1}\tau_{k+1}, \ldots, l'_n\tau_n]_{p,q_{k+1},\ldots,q_n} \overset{R_2}{\mathrel{-\!\!\!\!\|\!\!\!\!\rightarrow}}_{\beta} C''[r\sigma', r'_{k+1}\tau_{k+1}, \ldots, r'_n\tau_n]_{p,q_{k+1},\ldots,q_n}$ となる．ここで，$p \le q_1, \ldots, q_k$ および，$p||\{q_{k+1}, \ldots q_n\}$ なので，$t_1 \overset{R_2}{\mathrel{-\!\!\!\!\|\!\!\!\!\rightarrow}}_{\beta} C''[r\sigma', r'_{k+1}\tau_{k+1}, \ldots, r'_n\tau_n]_{p,q_{k+1},\ldots,q_n} \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*}\, t_2$ となる．

   (b) $q_j/p \in Pos_F(l)$ なる q_j が存在する場合．一般性を失うことなく $j = 1$ と仮定してよい．このとき，R_2 は R_1 に対して排他的に重なっているので，$k = 1$ となり，$p||\{q_2, \ldots, q_n\}$ となる．また，$l'_1 \to r'_1$ の $l \to r$ に対する危険対 $\langle c_2, c_1\rangle \in CP(R_2, R_1)$ に対して，$t_1 = C''[c_1\rho, l'_2\tau_2, \ldots, l'_n\tau_n]_{p,q_2,\ldots,q_n} \overset{R_1}{\leftarrow} t \overset{R_2}{\mathrel{-\!\!\!\!\|\!\!\!\!\rightarrow}}_{\beta} C''[c_2\rho, r'_2\tau_2, \ldots, r'_n\tau_n]_{p,q_2,\ldots,q_n} = t_2$ となるような代入 ρ が存在する．仮定より，$c_1 \overset{R_2}{\mathrel{-\!\!\!\!\|\!\!\!\!\rightarrow}}_{\beta} v \overset{R_2}{\to}{}^{*}_{\curlyvee\beta}\, u \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*}\, c_2$ が成り立ち，ルールラベリングより適用した規則が同じならばラベルは変わらないので，同様に $t_1 = C''[c_1\rho, l'_2\tau_2, \ldots, l'_n\tau_n]_{p,q_2,\ldots,q_n} \overset{R_2}{\mathrel{-\!\!\!\!\|\!\!\!\!\rightarrow}}_{\beta} C''[v\rho, l'_2\tau_2, \ldots, l'_n\tau_n]_{p,q_2,\ldots,q_n} \overset{R_2}{\to}{}^{*}_{\curlyvee\beta}\, C''[u\rho, l'_2\tau_2, \ldots, l'_n\tau_n]_{p,q_2,\ldots,q_n} \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*}$

$C''[c_2\rho, l'_2\tau_2, \ldots, l'_n\tau_n]_{p,q_2,\ldots,q_n}$ が得られる．よって，$t_1 \overset{R_2}{\mathrel{\|\!\!\!\to}}_{\beta} C''[v\rho, l'_2\tau_2, \ldots, l'_n\tau_n]_{p,q_2,\ldots,q_n} \overset{R_2}{\mathrel{\|\!\!\!\to}}_{\beta}$ $C''[v\rho, r'_2\tau_2, \ldots, r'_n\tau_n]_{p,q_2,\ldots,q_n} \overset{R_2}{\rightarrow}{}^{*}_{\curlyvee\beta} C''[u\rho, r'_2\tau_2, \ldots, r'_n\tau_n]_{p,q_2,\ldots,q_n} \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*} t_2$.

$p < q_1$ および，$p \| \{q_2, \ldots, q_n\}$ なので，$t_1 \overset{R_2}{\mathrel{\|\!\!\!\to}}_{\beta} C''[v\rho, r'_2\tau_2, \ldots, r'_n\tau_n]_{p,q_2,\ldots,q_n} \overset{R_2}{\rightarrow}{}^{*}_{\curlyvee\beta} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*} t_2$ となる．

3. $q_k < p$ なる q_k が存在する場合．一般性を失うことなく，$q_k = q_1$ と仮定してよい．
   (a) ある $q_0 \in Pos_V(l'_1)$ が存在して $q_1 q_0 \leq p$ の場合．このとき，$t_1 = C''[l'_1\tau'_1, l'_2\tau_2, \ldots, l'_n\tau_n]_{q_1,\ldots,q_n} \overset{R_1}{\leftarrow} t \overset{R_2}{\mathrel{\|\!\!\!\to}}_{\beta} C''[r'_1\tau_1, \ldots, r'_n\tau_n]_{q_1,\ldots,q_n} = t_2$ とおける．よって，$t_1 \overset{R_2}{\mathrel{\|\!\!\!\to}}_{\beta} C''[r'_1\tau'_1, r'_2\tau_2, \ldots, r'_n\tau_n]_{q_1,\ldots,q_n} \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*} t_2$ となる．
   (b) $p/q_1 \in Pos_F(l'_1)$ の場合．このとき，$l \to r$ の $l'_1 \to r'_1$ に対する危険対 $\langle c_1, c_2\rangle \in CP(R_1, R_2)$ に対して，$t_1 = C''[c_1\rho, l'_2\tau_2, \ldots, l'_n\tau_n]_{q_1,\ldots,q_n} \overset{R_1}{\leftarrow} t \overset{R_2}{\mathrel{\|\!\!\!\to}}_{\beta}$ $C''[c_2\rho, r'_2\tau_2, \ldots, r'_n\tau_n]_{q_1,\ldots,q_n} = t_2$ となるような代入 ρ が存在する．仮定より，$c_1 \overset{R_2}{\mathrel{\|\!\!\!\to}}_{\beta} v \overset{R_2}{\rightarrow}{}^{*}_{\curlyvee\beta} u \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*} c_2$ が成り立ち，ルールラベリングより適用した規則が同じならばラベルは変わらないので，同様に $t_1 = C''[c_1\rho, l'_2\tau_2, \ldots, l'_n\tau_n]_{q_1,\ldots,q_n} \overset{R_2}{\mathrel{\|\!\!\!\to}}_{\beta}$ $C''[v\rho, l'_2\tau_2, \ldots, l'_n\tau_n]_{q_1,\ldots,q_n} \overset{R_2}{\rightarrow}{}^{*}_{\curlyvee\beta} C''[u\rho, l'_2\tau_2, \ldots, l'_n\tau_n]_{q_1,\ldots,q_n} \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*}$ $C''[c_2\rho, l'_2\tau_2, \ldots, l'_n\tau_n]_{q_1,\ldots,q_n}$ が得られる．よって，$t_1 \overset{R_2}{\mathrel{\|\!\!\!\to}}_{\beta} C''[v\rho, l'_2\tau_2, \ldots, l'_n\tau_n]_{q_1,\ldots,q_n} \overset{R_2}{\mathrel{\|\!\!\!\to}}_{\beta}$ $C''[v\rho, r'_2\tau_2, \ldots, r'_n\tau_n]_{q_1,\ldots,q_n} \overset{R_2}{\rightarrow}{}^{*}_{\curlyvee\beta} C''[u\rho, r'_2\tau_2, \ldots, r'_n\tau_n]_{q_1,\ldots,q_n} \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*} t_2$．よって，$q_1 \| q_2, \ldots, q_n$ より，$t_1 \overset{R_2}{\mathrel{\|\!\!\!\to}}_{\beta} C''[v\rho, l'_2\tau_2, \ldots, l'_n\tau_n]_{q_1,\ldots,q_n} \overset{R_2}{\rightarrow}{}^{*}_{\curlyvee\beta} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*} t_2$ が得られる．

よって R_1 と R_2 は $\overset{R_1}{\longleftarrow} \cdot \overset{R_2}{\mathrel{\|\!\!\!\to}}_{\beta} \subseteq \overset{R_2}{\mathrel{\|\!\!\!\to}}_{\beta} \cdot \overset{R_2}{\rightarrow}{}^{*}_{\curlyvee\beta} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*}$ をみたす． □

定理 3 R_1，R_2 を左線形な項書き換えシステムとし，R_2 の R_1 に対する重なりが排他的，R_2 上のラベリング関数を δ とする．このとき，すべての $\langle c_1, c_2\rangle_{l\to r, l'\to r'} \in CP(R_1, R_2) \cup CP(R_2, R_1)^{-1}$ に対して，$\delta(l' \to r') = \beta$ ならば $c_1 \overset{R_2}{\mathrel{\|\!\!\!\to}}_{\beta} \cdot \overset{R_2}{\rightarrow}{}^{*}_{\curlyvee\beta} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*} c_2$ が成立するものとする．このとき，R_1 と R_2 は可換性をもつ．

(証明) 補題 2 より，$\overset{R_1}{\leftarrow}$ に対して，$\overset{R_2}{\mathrel{\|\!\!\!\to}}$ は片側減少性をみたしている．よって補題 1 より，$\overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*} \cdot \overset{R_2}{\mathrel{\|\!\!\!\to}}{}^{*} \subseteq \overset{R_2}{\mathrel{\|\!\!\!\to}}{}^{*} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*}$ が成り立つ．このとき，$\overset{R_2}{\mathrel{\|\!\!\!\to}}{}^{*} = \overset{R_2}{\rightarrow}{}^{*}$ なので R_1 と R_2 の可換性が得られる． □

例 3 次のような項書き換えシステム R_1 と R_2 を考える．

$$R_1 = \begin{cases} D(x) \to E \\ F(E, D(x)) \to F(F(D(x), D(x)), F(E, D(x))) \end{cases}$$

$$R_2 = \begin{cases} a \ : \ F(D(x), D(y)) \to E \\ b \ : \ F(E, E) \to G(E, E) \\ c \ : \ F(D(x), E) \to G(D(x), D(x)) \\ d \ : \ F(E, D(y)) \to G(D(y), D(y)) \\ e \ : \ G(x, y) \to E \end{cases}$$

このとき，以下の危険対が得られる．

$$CP(R_1, R_2) = \begin{cases} \langle F(E, D(y)), E \rangle, \\ \langle F(D(x), E), E \rangle, \\ \langle F(E, E), G(D(x), D(x)) \rangle, \\ \langle F(E, E), G(D(x), D(x)) \rangle, \\ \langle F(F(D(x), D(x)), F(E, D(x))), G(D(x), D(x)) \rangle, \end{cases}$$

$$CP(R_2, R_1) = \emptyset$$

ここで，$\delta(a) = \delta(b) = \delta(c) = \delta(d) = 2$，$\delta(e) = 1$ のようなラベリング関数を考えると，定理 2 の条件がみたされるので R_1 と R_2 は可換性をもつ．なお，R_1 と R_2 の両方が真左線形のため定理 1 は適用できない．また，危険対に基づく従来の可換性判定法 [9, 13] でも R_1 と R_2 の可換性を示すことはできない．

例 3 は定理 2 の条件をみたさず，定理 3 の条件をみたす例であったが，逆の場合，つまり，定理 2 の条件をみたすが，定理 3 の条件をみたさない場合もある．以下はその例である．

例 4 次のような項書き換えシステム R_1 と R_2 を考える．

$$R_1 = \begin{cases} F(C(x), y) \to D(B(y)) \\ F(A(x), y) \to H(x, C(y)) \\ B(x) \to C(x) \end{cases}$$

$$R_2 = \begin{cases} a \ : \ A(x) \to C(x) \\ b \ : \ G(x, B(y)) \to F(C(x), y)) \\ c \ : \ G(x, C(y)) \to D(A(y)) \\ d \ : \ H(x, y) \to D(y) \end{cases}$$

このとき，以下の危険対が得られる．

$$CP(R_1, R_2) = \Big\{ \langle G(x, C(y)), F(C(x), y) \rangle$$

$$CP(R_2, R_1) = \Big\{ \langle F(C(x), y), H(x, C(y)) \rangle$$

R_1 と R_2 は線形かつ左線形な項書き換えシステムであるが，R_1 の R_2 に対する重なりと R_2 の R_1 に対する重なりはそれぞれ排他的でないため定理 3 の条件は適用できない．一方，$\delta(b) = \delta(c) = 2$，$\delta(a) = \delta(d) = 1$ のようなラベリング関数を考えると，定理 2 の条件がみたされるので R_1 と R_2 は可換性をもつ．また，危険対に基づく従来の可換性判定法 [9, 13] では R_1 と R_2 の可換性を示すことはできない．

例 1–3，定理 1–3 の関係を図 5 に示す．

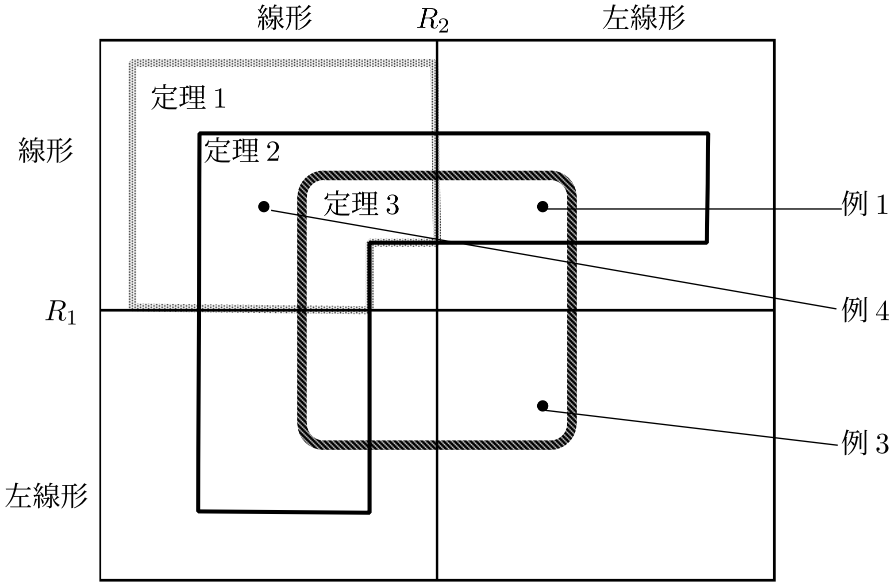


図 5. 可換性十分条件の関係

5　可換性判定手続き

以下では，与えられた 2 つの項書き換えシステム R_1, R_2 が定理 1，定理 2 および定理 3 の条件をみたすかを判定する，可換性の自動判定手続きを定める．

入力: 項書き換えシステム R_1, R_2
出力: 可換性判定結果

1. R_1 と R_2 それぞれの線形性を調べる．R_1 と R_2 の両方が左線形でない場合は失敗を返す．
2. R_1 と R_2 の書き換え規則のそれぞれに名前 $r_0, r_1, \ldots$ をつける．
3. R_1 と R_2 の間の危険対集合 $CP(R_1, R_2)$，$CP(R_2, R_1)$ を求める．このとき，危険対 $c_1 \overset{R_1}{\leftarrow} \cdot \overset{R_2}{\rightarrow} c_2$ を求めるのに用いた書き換え規則の名前 α, β を $\langle c_1, c_2 \rangle$ に添付する．
4. $\langle c_1, c_2 \rangle \in CP(R_1, R_2) \cup CP(R_2, R_1)^{-1}$ のそれぞれについて，$c_1 \overset{R_2}{\rightarrow}{}^{*}\, u \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*}\, c_2$ なる u を求める．このとき，$c_1 \overset{R_2}{\rightarrow}{}^{*}\, u$，$c_2 \overset{R_1}{\rightarrow}{}^{*}\, u$ それぞれの書き換えに用いた書き換え規則の名前の系列 $[\beta_1, \ldots, \beta_n], [\alpha_1, \ldots, \alpha_m]$ を同時に求め，3 で $\langle c_1, c_2 \rangle$ に添付した α, β とあわせて 4 つ組 $(\alpha, \beta, [\beta_1, \ldots, \beta_n], [\alpha_1, \ldots, \alpha_m])$ を構成する．
5. 4 で求めた $(\alpha, \beta, [\beta_1, \ldots, \beta_n], [\alpha_1, \ldots, \alpha_m])$ を用いて条件式を構成する．R_1, R_2 の線形性によって場合分けを行う．
   (a) R_1, R_2 が線形の場合．$c_1 \overset{R_2}{\rightarrow}{}^{*}_{\curlyvee\alpha} \cdot \overset{R_2}{\rightarrow}{}^{=}_{\beta} \cdot \overset{R_2}{\rightarrow}{}^{*}_{\curlyvee\alpha\cup\curlyvee\beta} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*}_{\curlyvee\alpha\cup\curlyvee\beta} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{=}_{\alpha} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*}_{\curlyvee\beta}\, c_2$ をみたすようなラベリング関数が存在することを表す条件式を構成する．
   (b) R_1 が線形，R_2 が真左線形の場合．$c_1 \overset{R_2}{\rightarrow}{}^{=}_{\beta} \cdot \overset{R_2}{\rightarrow}{}^{*}_{\curlyvee\beta} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*}\, c_2$ をみたすようなラベリング関数が存在することを表す条件式を構成する．
   (c) R_1 が真左線形，R_2 が線形の場合．$c_1 \overset{R_2}{\rightarrow}{}^{*} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*}_{\curlyvee\alpha} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{=}_{\alpha}\, c_2$ をみたすようなラベリング関数が存在することを表す条件式を構成する．
   (d) R_1 の R_2 に対する重なりが排他的，かつ，R_2 の R_1 に対する重なりが排他的となっている場合，$c_1 \overset{R_2}{\nrightarrow}{}_{\beta} \cdot \overset{R_2}{\rightarrow}{}^{*}_{\curlyvee\beta} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*}\, c_2$ あるいは $c_1 \overset{R_2}{\rightarrow}{}^{*} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}{}^{*}_{\curlyvee\alpha} \cdot \overset{R_1}{\nleftarrow}{}_{\alpha} c_2$ をみたすようなラベリング関数が存在することを表す条件式を構成する．

(e) R_1 の R_2 に対する重なりが排他的，かつ，R_2 の R_1 に対する重なりが排他的でない場合，$c_1 \xrightarrow{R_2}{}^{*} \cdot \xleftarrow{R_1}{}^{*}_{\curlyvee\alpha} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow\!\!\!\!+\!\!\!+}{}_{\alpha} c_2$ をみたすようなラベリング関数が存在することを表す条件式を構成する．

(f) R_2 の R_1 に対する重なりが排他的，かつ，R_1 の R_2 に対する重なりが排他的でない場合，$c_1 \overset{R_2}{+\!\!\!\!+\!\!\!\!\rightarrow}{}_{\beta} \cdot \xrightarrow{R_2}{}^{*}_{\curlyvee\beta} \cdot \xleftarrow{R_1}{}^{*} c_2$ をみたすようなラベリング関数が存在することを表す条件式を構成する．

(g) R_1 と R_2 が左線形で R_1 の R_2 に対する重なりが排他的でなく，かつ，R_2 の R_1 に対する重なりが排他的でない場合，失敗を返す．

6. 5 で生成した条件式の論理和をみたすラベリング関数が存在するかを判定する．その結果，ラベリング関数が存在すれば成功を返し，存在しなければ失敗を返す．

例 5 例 3 で示した項書き換えシステムに対して可換性判定手続を用いて可換性を示す．

$$R_1 = \begin{cases} D(x) \to E \\ F(E, D(x)) \to F(F(D(x), D(x)), F(E, D(x))) \end{cases}$$

$$R_2 = \begin{cases} F(D(x), D(y)) \to E \\ F(E, E) \to G(E, E) \\ F(D(x), E) \to G(D(x), D(x)) \\ F(E, D(y)) \to G(D(y), D(y)) \\ G(x, y) \to E \end{cases}$$

1. まず，R_1 と R_2 の線形性を調べる．R_1,R_2 は共に真左線形である．
2. R_1, R_2 に以下のようにラベルをつける．

$$R_1 = \begin{cases} r_0 \ : \ D(x) \to E \\ r_1 \ : \ F(E, D(x)) \to F(F(D(x), D(x)), F(E, D(x))) \end{cases}$$

$$R_2 = \begin{cases} r_2 \ : \ F(D(x), D(y)) \to E \\ r_3 \ : \ F(E, E) \to G(E, E) \\ r_4 \ : \ F(D(x), E) \to G(D(x), D(x)) \\ r_5 \ : \ F(E, D(y)) \to G(D(y), D(y)) \\ r_6 \ : \ G(x, y) \to E \end{cases}$$

3. 危険対集合 $CP(R_1, R_2), CP(R_2, R_1)$ を求める．

$$CP(R_1, R_2) = \begin{cases} CP1 : \langle F(E, D(y)), E \rangle, \\ CP2 : \langle F(D(x), E), E \rangle, \\ CP3 : \langle F(E, E), G(D(x), D(x)) \rangle, \\ CP4 : \langle F(E, E), G(D(x), D(x)) \rangle, \\ CP5 : \langle F(F(D(x), D(x)), F(E, D(x))), G(D(x), D(x)) \rangle, \end{cases}$$

$$CP(R_2, R_1) = \emptyset$$

4. それぞれの危険対について，$c_1 \overset{R_2}{\to}{}^* u \overset{R_1}{\leftarrow}{}^* c_2$ なる u を求め，用いた書き換え規則から $(\alpha, \beta, [\beta_1, \ldots, \beta_n], [\alpha_1, \ldots, \alpha_m])$ を構成する．危険対 $CP1$–5 より以下が得られる．

$$\begin{cases} CP1 : (r_0, r_2, [r_5, r_6], [\ ]) \\ CP2 : (r_0, r_2, [r_4, r_6], [\ ]) \\ CP3 : (r_0, r_4, [r_3], [r_0, r_0]) \\ CP4 : (r_0, r_5, [r_3], [r_0, r_0]) \\ CP5 : (r_1, r_5, [r_5, r_2, r_6, r_3], [r_0, r_0]) \end{cases}$$

5. R_1,R_2 が真左線形で，R_2 の R_1 に対する重なりが排他的で，かつ R_1 の R_2 に対する重なりが排他的でないので，$c_1 \overset{R_2}{\nrightarrow}_\beta \cdot \overset{R_2}{\to}{}^*_{\curlyvee\beta} \cdot \overset{R_1}{\leftarrow}{}^* c_2$ が成立するようなラベリング関数が存在するかを調べる条件式を構成する．それぞれの危険対に対して以下のような条件を構成する．

$$\begin{cases} CP1 : (r_2 = r_5 \wedge r_2 > r_6) \vee (r_2 > r_5 \wedge r_2 > r_6) \\ CP2 : (r_2 = r_4 \wedge r_2 > r_6) \vee (r_2 > r_4 \wedge r_2 > r_6) \\ CP3 : r_4 = r_3 \vee r_4 > r_3 \\ CP4 : r_5 = r_3 \vee r_5 > r_3 \\ CP5 : (r_5 = r_5 \wedge r_5 = r_2 \wedge r_5 > r_6 \wedge r_5 > r_3) \\ \qquad \vee(r_5 = r_5 \wedge r_5 > r_2 \wedge r_5 > r_6 \wedge r_5 > r_3) \\ \qquad \vee(r_5 > r_5 \wedge r_5 > r_2 \wedge r_5 > r_6 \wedge r_5 > r_3) \end{cases}$$

6. 最後に条件式をみたすラベリング関数が存在するか判定する．$\delta(r_2), \delta(r_4), \delta(r_5) > \delta(r_0), \delta(r_1), \delta(r_3), \delta(r_6)$ をみたすラベリング関数 δ をとれば条件をみたすことがわかり，R_1 と R_2 の可換性の証明に成功する．

6　可換性自動判定システムの実装と実験

前節で説明した手続きを SML/NJ[14] を用いて実装した．条件式の判定には SMT ソルバ Yices[4] を使用した．実装は合流性自動判定システム ACP 上のデータ構造や関数を用いて行った．

- 手続き 4 は $c_1 \overset{R_2}{\to}{}^* u \overset{R_1}{\leftarrow}{}^* c_2$ なる書き換え列をステップ数の上限の中でステップ数が最小となるものを複数求めて，それぞれの条件の論理和を条件としている．
- 手続き 5 の項書き換えシステム R_1 の R_2 に対しての重なりが排他的かの判定手続きは，以下のようにして実装した．
  1. $overlap(R_1, R_2)$ および $ps = \{p \mid \langle l_1 \to r_1, l_2 \to r_2, p\rangle \in overlap(R_1, R_2)\}$ を求める．
  2. $\langle l_1 \to r_1, l_2 \to r_2, p\rangle \in overlap(R_1, R_2)$ のそれぞれに対して，
     (a) $Var(l_2[C]_p) = \emptyset$
     (b) 任意の位置 $p' \in ps$ について $\neg(p' || p)$
     を判定する．ここで C は適当な定数である．
- 手続き 5 の条件式は以下のように実装した．
  – (a) では $(\alpha, \beta, [\beta_1, \ldots, \beta_n], [\alpha_1, \ldots, \alpha_m])$ に対して，$\bigvee_{k=1}^{m} (\alpha \succ [\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}] \wedge \alpha_k = \beta \wedge \alpha, \beta \succ [\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m])$ かつ $\bigvee_{k}^{m} (\beta \succ [\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}] \wedge \beta_k = \alpha \wedge \alpha, \beta \succ [\beta_{k+1}, \ldots, \beta_m])$ なる条件式を構成．

– (b),(c) では条件式 $\beta \geq \beta_1 \wedge \beta \succ \{\beta_2, \ldots, \beta_n\}$ を構成.

– (d)-(f) では

1. $s = C[s_1, \ldots, s_n]_{p_1,\ldots,p_n} \overset{R_i}{+\!\!\!\!\rightarrow} C[t_1, \ldots, t_n]_{p_1,\ldots,p_n} = t$ ただし，$i = 1, \ldots, n$ について $s_i \xrightarrow{r_i} t_i$ となる最大の集合 $r = \{r_{k_1}, \ldots, r_{k_n}\}$ を求める.
2. $(\alpha, \beta, [\beta_1, \ldots, \beta_n], [\alpha_1, \ldots, \alpha_m])$ に対し，$\bigvee_{\beta_1,\ldots,\beta_k \in r} (\beta = \beta_1 = \cdots = \beta_k \wedge \beta \succ \{\beta_{k+1}, \ldots, \beta_n\})$ なる条件式を構成した.

例 6 例 3 で示した項書き換えシステムに対して，判定プログラムを実行した時の出力を以下にしめす．入力書き換え規則 $R_i(l) \to r$ は $l \to r \in R_i$ を意味する.

```
Rewrite Rules:
   [ R1(D(?x)) -> E,
     R1(F(E,D(?x))) -> F(F(D(?x),D(?x)),F(E,D(?x))),
     R2(F(D(?x),D(?y))) -> E,
     R2(F(E,E)) -> G(E,E),
     R2(F(D(?x),E)) -> G(D(?x),D(?x)),
     R2(F(E,D(?y))) -> G(D(?y),D(?y)),
     R2(G(?x,?y)) -> E ]
check Locally Decreasing Diagrams by Rule Labelling...
R1 : Left-Linear R2 : Left-Linear
overlap OK
variable OK
Critical Pair <F(E,D(?y)), E> by Rules <0, 2>Parallel Step <5>
joinable by a reduction of rules <[5,6], []>
 joinable by a reduction of rules <[5,6], []>
 joinable by a reduction of rules <[5,6], []>
Critical Pair <F(D(?x),E), E> by Rules <0, 2>Parallel Step <4>
joinable by a reduction of rules <[4,6], []>
 joinable by a reduction of rules <[4,6], []>
 joinable by a reduction of rules <[4,6], []>
Critical Pair <F(E,E), G(D(?x),D(?x))> by Rules <0, 4>Parallel Step <3>
joinable by a reduction of rules <[3], [0,0]>
 joinable by a reduction of rules <[3], [0,0]>
Critical Pair <F(E,E), G(D(?x),D(?x))> by Rules <0, 5>Parallel Step <3>
joinable by a reduction of rules <[3], [0,0]>
 joinable by a reduction of rules <[3], [0,0]>
Critical Pair <F(F(D(?x_1),D(?x_1)),F(E,D(?x_1))), G(D(?x_1),D(?x_1))>
by Rules <1, 5>Parallel Step <2,5>
joinable by a reduction of rules <[5,6,2,3], [0,0]>
 joinable by a reduction of rules <[5,6,2,3], [0,0]>
 joinable by a reduction of rules <[5,6,2,3], [0,0]>
 joinable by a reduction of rules <[5,6,2,3], [0,0]>
 joinable by a reduction of rules <[5,2,6,3], [0,0]>
 joinable by a reduction of rules <[5,2,6,3], [0,0]>
 joinable by a reduction of rules <[5,2,6,3], [0,0]>
 joinable by a reduction of rules <[5,2,6,3], [0,0]>
 joinable by a reduction of rules <[2,5,6,3], [0,0]>
 joinable by a reduction of rules <[2,5,6,3], [0,0]>
 joinable by a reduction of rules <[2,5,6,3], [0,0]>
 joinable by a reduction of rules <[2,5,6,3], [0,0]>
 joinable by a reduction of rules <[5,6,2,3], [0,0]>
 joinable by a reduction of rules <[5,6,2,3], [0,0]>
 joinable by a reduction of rules <[5,2,6,3], [0,0]>
 joinable by a reduction of rules <[5,2,6,3], [0,0]>
 joinable by a reduction of rules <[2,5,6,3], [0,0]>
```

```
 joinable by a reduction of rules <[2,5,6,3], [0,0]>
Satisfiable by 2,4,5>0,1,3,6
Diagram Decreasing
Direct Methods: Commute

Final result: Commute
commute_examples/test/ex16.trs: YES (0 msec.)
```

実装した可換性自動判定システムを用いて，用意した 17 例の可換性問題に対して実験を行った．その実験結果を表 1 に示す．書き換え列の上限ステップ数を 4 にしたところ，全ての例の可換性判定に成功した．上記の与えられた手続きで示したように，R_1, R_2 の両方が線形の場合は，定理 1 に基づく可換性判定を行い，R_1 もしくは R_2 が線形の場合は，定理 2 に基づく可換性判定を行っている．また R_1, R_2 の両方が真左線形の場合は，定理 3 に基づく可換性判定を行っている．表 1 の $R_i \setminus R_j$ は R_i の R_j に対する重なりが排他的かどうか，n は書き換え列の上限ステップ数を表す．実験に用いた例は http://www.nue.riec.tohoku.ac.jp/papers/12/ppl-matoba-appdx.pdf で公開している．

表 1. 可換性自動判定の実験結果

	R_1	R_2	$R_1 \setminus R_2$	$R_2 \setminus R_1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
例 1	線形	真左線形	○	○	×	×	○
例 2	真左線形	真左線形	×	○	×	×	○
例 3	線形	線形	×	×	○	○	○
例 4	線形	線形	○	○	○	○	○
例 5	真左線形	真左線形	○	○	○	○	○
例 6	線形	線形	○	○	○	○	○
例 7	線形	線形	○	○	○	○	○
例 8	線形	線形	○	○	○	○	○
例 9	線形	線形	○	○	○	○	○
例 10	線形	線形	○	○	○	○	○
例 11	真左線形	線形	○	○	×	×	○
例 12	真左線形	真左線形	○	○	×	×	○
例 13	真左線形	真左線形	○	○	○	○	○
例 14	線形	線形	×	○	×	○	○
例 15	線形	線形	×	○	×	○	○
例 16	線形	線形	○	○	○	○	○
例 17	真左線形	線形	×	○	×	○	○

7　まとめ

本論文では，片側減少ダイアグラムを提案するとともに，片側減少ダイアグラムに基づく項書き換えシステムの可換性証明法を提案した．

まず，抽象リダクションシステムにおいて，片側減少ダイアグラムに基づく可換性十分条件を減少ダイアグラム法に基づいて示した．そして，片側減少ダイアグラムに基づき，線形項書き換えシステムと左線形項書き換えシステムに対する可換性十分条件を与えた．次に，並行書き換えのアイデアを用いることで，重なりが排他的となる左線形項書き換えシステム同士に対する可換性の十分

条件を与えた．また，この 2 つの可換性十分条件が互いに包含していないことを示した．最後に，提案手法に基づく可換性自動証明システムを実装し，項書き換えシステムの可換性証明実験を行なった．本論文で提案した手法を用いることにより，従来の危険対解析に基づく十分条件が適用できない場合でも，可換性の自動証明に成功する場合があることを確認した．

今回提案した可換性証明法では，左線形項書き換えシステムに対して，全ての重なりが排他的となる項書き換えシステムに制限しているが，より多くの左線形項書き換えシステムの可換性証明が可能となるように，条件を緩和することは今後の課題である．また，危険対の精密な場合分けへの拡張も今後の課題である．

謝辞

本論文に貴重なコメントを頂きました査読者に感謝いたします．なお，本研究は一部日本学術振興会科学研究費 22500002, 23500002 の補助を受けて行われた．

参考文献

[1] Aoto, T.: Automated confluence proof by decreasing diagrams based on rule-labelling, *In proc of RTA 2010*, *LIPIcs*, Vol. 6, (2010), pp. 7–16.

[2] Aoto, T., Yoshida, J. and Toyama, Y. : Proving confluence of term rewriting systems automatically, *In Proc. of RTA 2009*, *LNCS*, Vol. 5595, Springer-Verlag (2009), pp. 93–102.

[3] Baader, F. and Nipkow, T.: *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press (1998).

[4] Dutertre, B. and de Moura, L.: The YICES SMT Solver, `http://yices.csl.sri.com/tool-paper.pdf`, 2006.

[5] Hirokawa, N. and Middeldorp, A.: Decreasing diagrams and relative termination, *In Proc. of IJCAR 2010*, *LNCS*, Vol. 6173, (2010), pp. 487–501.

[6] Huet, G.: Confluent reductions: abstract properties and applications to term rewriting systems, *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. 27, No. 4, (1980), pp. 797–821.

[7] Rosen, B. K.: Tree-manipulating systems and Church-Rosser theorems, *J. ACM 20*,(1973),pp. 160–187.

[8] Telese.: *Term Rewriting Systems*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, Vol. 55, Cambridge University Press, Cambridge, (2003).

[9] Toyama, Y.: Commutativity of term rewriting systems, *Programming of Future Generation Computers II*, North-Holland, (1988), pp. 393–407.

[10] van Oostrom, V.: Confluence by decreasing diagrams, *Theoretical Computer Science*, 175(1), (1997), pp. 159–181.

[11] van Oostrom, V.: Confluence by decreasing diagrams converted, *In Proc. of RTA 2008*, *LNCS*, Vol. 5117, Splinger-Verlag, (2008), pp. 306–320.

[12] Zankl, H., Felgenhauer, B., and Middeldorp, A.: Labelings for Decreasing Diagrams, *In Proc. of RTA 2011*, *LIPIcs*, Vol.10, Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik,(2011), pp. 1–16

[13] 吉田順一, 青戸等人, 外山芳人: 項書き換えシステムの合流性自動判定, コンピュータソフトウェア, Vol. 26, No. 2, (2009), pp. 76–92.

[14] Standard ML of New Jersey, `http://www.smlnj.org/`