ボトムアップ書き換えに基づく到達可能性の判定法

高橋翔大　青戸等人　外山芳人

いくつかの項書き換えシステムのクラスにおいては，木オートマトンによる到達可能性の判定法が知られている．近年，ボトムアップ書き換えに基づく新しい到達可能性判定法が提案されている．本研究では，ボトムアップ項書き換えシステムのクラス (BU) を最内書き換えに変更した最内ボトムアップ項書き換えシステムのクラス (IBU) を提案し，IBU に含まれる項書き換えシステムについて最内書き換えの到達可能性が判定可能であることを示す．

1　はじめに

項書き換えシステムの到達可能性は，リダクションの正規戦略や合流性の条件の判定などに広く利用される重要な性質である．いくつかのクラス [6] [8] [9] に関しては木オートマトンによる到達可能性判定手続きが知られている．また，最内書き換えの到達可能性についても研究されている [5] [7]．しかし，これらは書き換え規則に出現する変数の深さを制限にするなど，書き換えシステムになんらかの構文的な制限をもうけている．

近年，書き換え規則の構文ではなくて書き換え系列に制限をもうけた到達可能性判定法が提案されている．例えば，ボトムアップ書き換え [3] [4] では内側から優先して書き換えていくことで到達可能性の判定を可能としている．

本論文では，ボトムアップ書き換えに概念を最内書き換えに適用することで，最内書き換えの到達可能性の新しい判定方法を提案する．

2　準備

ここでは，本論文でもちいる項書き換えシステムの記法 [1] と木オートマトン [3] [4] について説明する．

2.1　項書き換えシステム

関数記号の集合を $\mathcal{F} = \{f, g, h, \ldots\}$，変数集合を $\mathcal{V} = \{x, y, z, \ldots\}$，項の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$，基底項の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ と表す．項 t に出現する変数の集合を $Var(t)$ と記す．項 t に 2 回以上出現する変数がないとき t を線形とよぶ．項 t の部分項の位置は正整数の列で表し，項 t の位置集合を $Pos(t)$ と記す．位置集合 P'，P が $\forall u \in P, i \in \mathbb{N}.(ui \in P' \wedge u(i+1) \in P) \Rightarrow u(i+1) \in P'$ をみたすとき P' を P の部分領域といい $P' \subseteq P$ と記す．$u = vw$ となる w が存在するとき，$v \preceq u$ と表す．項 t の位置 u での関数記号を $t(u)$，部分項を t/u と記す．線形な項 t に出現する変数 x の位置を $pos(t, x)$ と記す．項 t の変数の位置の集合を $Pos_{\mathcal{V}}(t)$ と表し，変数でない位置の集合を $Pos_{\overline{\mathcal{V}}}(t)$ と表す．項 t の深さを $dpt(t) = sup\{|u| \mid u \in Pos_{\overline{\mathcal{V}}}(t)\}$ と与える．代入 θ は変数集合 $\mathcal{V}$ から項の集合 $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ への写像であり，代入 θ による項 t への代入 $t\theta$ で表す．ホールは特別な定数記号 $\square$ であり，ホールを部分項として含む項を文脈という．文脈 C において位置 p_i のホールを項 t_i で置き換えて得られる項を $C[t_1, t_2, \ldots, t_n]_{p_1, p_2, \ldots, p_n}$ あるいは略して $C[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ で表す．

書き換え規則 $l \to r$ は，$l \notin \mathcal{V}$ かつ $Var(r) \subseteq Var(l)$ をみたす項 l と r の組であり，項書き換えシステム $\mathcal{R}$ は書き換え規則の集合である．任意の書き

Deciding Reachability based on Bottom-Up Rewriting

Shota Takahashi,Takahito Aoto,Yoshihito Toyama, 東北大学電気通信研究所, Research Institute of Electrical Comunication,Tohoku University.

換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ について l，r が線形のとき $\mathcal{R}$ を線形とよび，l，r が基底項のとき $\mathcal{R}$ を基底とよぶ．ある $l \to r \in \mathcal{R}$ と文脈 C と代入 θ が存在するとき，項 $s = C[l\theta]_p$ は項 $t = C[r\theta]_p$ に書き換えることができる．この書き換え関係を $s \to t$ と表し，$\to$ の反射推移閉包を $\xrightarrow{*}$ と書く．また，項 t の部分項 $l\theta$ をリデックスとよび，$l\theta$ の真部分項にリデックスを含まないとき $l\theta$ を最内リデックスとよぶ．最内リデックスの書き換えを $\underset{i}{\to}$ と記す．リデックスをもたない項を正規形といい，$\mathcal{R}$ の正規形の集合を $NF_{\mathcal{R}}$ と記す．$s \xrightarrow{*} t \in NF_{\mathcal{R}}$ のとき，t を s の正規形という．$s \xrightarrow{*} t$ のとき t は s から到達可能であるという．項書き換えシステム $\mathcal{R}$，項の集合 T が与えられたとき $(\xrightarrow{*})[T] = \{s \in \mathcal{T}(\mathcal{F}) \mid \exists t \in T.s \xrightarrow{*} t\}$ と定義する．

2.2 木オートマトン

(ボトムアップ) 木オートマトン A は $(\mathcal{F}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}_f, \Delta)$ の 4 つ組で，$\mathcal{F}$ は関数記号の集合，$\mathcal{Q}$ は状態の集合、$\mathcal{Q}_f$ は終了状態の集合，Δ は遷移規則の集合である．Δ は $\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}$ 上の基底項書き換えシステムとみなすことが出来る．Δ により出来る書き換え関係を $\to_\Delta$ または $\to_A$ と記す．$\mathcal{L}_q(A) = \{t \mid t \xrightarrow{*}_A q\}$ と定める．木オートマトン A で受理される項の集合を $\mathcal{L}(A) = \bigcup_{q \in \mathcal{Q}_f} \mathcal{L}_q(A)$ と定める．項の集合 T に対してある木オートマトン A が存在し $T = \mathcal{L}(A)$ となるとき T は認識可能であるという．木オートマトン A が決定的であるとは，任意の関数記号 $f \in \mathcal{F}$，状態 $q_1, \ldots, q_n \in \mathcal{Q}$ に対して $f(q_1, \ldots, q_n) \to q \in \Delta$ の形をした規則が高々1 つしかないことであり，木オートマトン A が完全であるとは，任意の関数記号 $f \in \mathcal{F}$，状態 $q_1, \ldots, q_n \in \mathcal{Q}$ に対して $f(q_1, \ldots, q_n) \to q \in \Delta$ の形をした規則が少なくとも 1 つあることである．P を $Pos(t)$ の部分領域とする．このとき $Red_A(t, P)$ を $t \xrightarrow{*}_A t'$ かつ $Pos(t') = P$ をみたす項 $t' \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q})$ とする．

補題 1 [3] A を $\mathcal{F}$ 上の決定的かつ完全な木オートマトン，$t, t_1, t_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q})$ とする．$t \xrightarrow{*}_A t_1$，$t \xrightarrow{*}_A t_2$ かつ $Pos(t_1) = Pos(t_2)$ ならば $t_1 = t_2$ である．

補題 2 [3] A を $\mathcal{F}$ 上の決定的かつ完全な木オートマトン，$t, t_1, t_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{Q})$ とする．$t \xrightarrow{*}_A t_1$，$t \xrightarrow{*}_A t_2$ かつ $Pos(t_1) \supseteq Pos(t_2)$ ならば $t_1 \xrightarrow{*}_A t_2$ である．

3 最内ボトムアップ書き換え

ここでは，文献 [3] [4] にもとづいてボトムアップ書き換えにを説明するとともに，最内ボトムアップ書き換えの概念を導入する．以下では，基底項上の書き換えのみを考える．

3.1 マーク

自然数の集合を $\mathbb{N}$ とする．

定義 1 マーク付けされた関数記号の集合を $\mathcal{F}^{\mathbb{N}} = \{f^i \mid f \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}\}$ で定義する．f^0 と f は同一視する．任意の $k \in \mathbb{N}$ について，$\mathcal{F}^{\leq k} = \{f^i \mid f \in \mathcal{F}, 0 \leq i \leq k\}$ とする．

定義 2 $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}}, \mathcal{V})$，$i \in \mathbb{N}$ とする．すべての関数記号に i をマークした項を t^i と記す．このマーク付けを項の集合 S，代入 σ について $S^i = \{t^i \mid t \in S\}$、$\sigma^i : x \mapsto x\sigma^i$ と拡張する．

以下では $\bar{t}$，$\hat{t}$，$\tilde{t}$ 等は $\bar{t}^0 = \hat{t}^0 = \tilde{t}^0 = t$ となる項を表すこととする．文脈，代入についても同様に表す．$\bar{t}(\epsilon)$ のマークを $m(\bar{t})$ で表す．ただし，$\bar{t} \in \mathcal{V}$ のとき $m(\bar{t}) = 0$．マーク付けされた項 $\bar{t}$ に出現するマークの最大値を $mmax(\bar{t})$ と記す．

有限木オートマトン $A = (\mathcal{F}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}_f, \Delta)$ を $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ 上の木オートマトンに以下のように自然に拡張する．

$$\Delta^{\mathbb{N}} = \{f^j(q_1^{j_1}, \ldots, q_n^{j_n}) \to q^j \mid f(q_1, \ldots, q_n) \to q \in \Delta, j, j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}\}$$

$$A^{\mathbb{N}} = (\mathcal{F}^{\mathbb{N}}, \mathcal{Q}^{\mathbb{N}}, \mathcal{Q}_f^{\mathbb{N}}, \Delta^{\mathbb{N}})$$

二項関係 $\to_{A^{\mathbb{N}}}$ は $\to_A$ の $\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}}) \times \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}})$ への拡張になっている．以下では，A を $\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}})$ 上で考える場合は $A^{\mathbb{N}}$ とみなすこととする．

定義 3 $\bar{t} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}}, \mathcal{V})$，$n \in \mathbb{N}$ とする．このとき $\bar{t} \odot n$ を以下で定義する．

$$\bar{t} \odot n = \begin{cases} \bar{t} & (\bar{t} \in \mathcal{V} \text{ のとき}) \\ f^{max(i,n)}(\bar{t}_1 \odot n, \ldots, \bar{t}_m \odot n) & \\ \qquad (\bar{t} = f^i(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_m) \text{ のとき}) \end{cases}$$

補題 3 [3] A を $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ 上の有限木オートマトン，$\bar{s}, \bar{t} \in \mathcal{T}((\mathcal{F} \cup \mathcal{Q})^{\mathbb{N}})$，$n \in \mathbb{N}$ とする．このとき $\bar{s} \xrightarrow{*}_A \bar{t}$ な

らば $\overline{s}\odot n \xrightarrow{*}_A \overline{t}\odot n$ である．

定義 4 任意のマーク付けされた線形項 $\overline{t}\in\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}},\mathcal{V})$，変数 $x\in Var(\overline{t})$ について $M(\overline{t},x)$ を以下で定義する．

$$M(\overline{t},x) = sup\{m(\overline{t}/u) \mid u \prec pos(\overline{t},x)\}+1$$

書き換え規則 $l\to r\in\mathcal{R}$，文脈 $\overline{C}[\,]$，代入 $\overline{\sigma}$ が存在して $\overline{s}=\overline{C}[\overline{l\sigma}]$，$\overline{t}=\overline{C}[r\hat{\sigma}]$，$\hat{\sigma}(x)=\overline{\sigma}(x)\odot M(\overline{C}[\overline{l}],x)$ となるとき，$\overline{s}$ から $\overline{t}$ へマーク書き換え可能であるといい，$\overline{s}\circ\!\!\to\overline{t}$ と表す．また，$\overline{l\sigma}$ が $\overline{s}$ の $\circ\!\!\to$ に関する最内リデックスのとき $\overline{s}\underset{i}{\circ\!\!\to}\overline{t}$ と記す．

3.2 最内ボトムアップ項書き換えシステム

定義 5 マーク付けされた書き換え系列 $\overline{s}_0\circ\!\!\to\overline{s}_1\circ\!\!\to\cdots\circ\!\!\to\overline{s}_n$ における i 番目のリデックスを $\overline{l}_i\overline{\sigma}_i$ としたとき，任意の i について $l_i\notin\mathcal{V}\Rightarrow m(\overline{l}_i)=0$ となるとき，この書き換え系列を弱ボトムアップであるという．

定義 6 任意の位置 $u,v\in Pos(\overline{t})$ について，$u\prec v\Rightarrow m(\overline{t}/u)\leq m(\overline{t}/v)$ のとき $\overline{t}$ はマーク増加であるという．

補題 4 [3] $\overline{s},\overline{t}\in\mathcal{T}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}},\mathcal{V})$，$\overline{s}\overset{*}{\underset{i}{\circ\!\!\to}}\overline{t}$ とする．このとき $\overline{s}$ がマーク増加ならば $\overline{t}$ もマーク増加である．

定義 7 マーク付けされた書き換え系列 $\overline{s}_0\circ\!\!\to\overline{s}_1\circ\!\!\to\cdots\circ\!\!\to\overline{s}_n$ が，弱ボトムアップかつ $\forall i\ (0\leq i\leq n)$. $mmax(\overline{s}_i)\leq k$ ならば，その書き換え系列は $bu(k)$ であるといい，$\overline{s}_0\ {}_k\!\overset{*}{\circ\!\!\to}\ \overline{s}_n$ と記す．書き換え系列 $\overline{s}_0\underset{i}{\circ\!\!\to}\overline{s}_1\underset{i}{\circ\!\!\to}\cdots\underset{i}{\circ\!\!\to}\overline{s}_n$ が，弱ボトムアップかつ $\forall i\ (0\leq i\leq n)$. $mmax(\overline{s}_i)\leq k$ ならば，その書き換え系列は $ibu(k)$ であるといい，$\overline{s}_0\ {}_k\!\overset{*}{\underset{i}{\circ\!\!\to}}\ \overline{s}_n$ と記す．

s から t への $bu(k)$ (もしくは $ibu(k)$) 書き換え系列が存在するとは，s から $\overline{t}$ への $bu(k)$ (もしくは $ibu(k)$) 書き換え系列が存在することをいい，$s\ {}_k\!\overset{*}{\to}\ t$ (もしくは $s\ {}_k\!\overset{*}{\underset{i}{\to}}\ t$) と記す．

定義 8 $\mathcal{R}$ を項書き換えシステムとする．$s\overset{*}{\to}t$ (もしくは $s\overset{*}{\underset{i}{\to}}t$) となる任意の $s,t\in\mathcal{T}(\mathcal{F})$ に対して，s から t への $bu(k)$ (もしくは $ibu(k)$) 書き換え系列が存在するとき，$\mathcal{R}$ は $bu(k)$ (もしくは $ibu(k)$) であるという．

$bu(k)$ (もしくは $ibu(k)$) 項書き換えシステムのクラスを $BU(k)$ (もしくは $IBU(k)$) と表し，$BU=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}BU(k)$，$IBU=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}IBU(k)$ とする．

例 1 以下の項書き換えシステム $\mathcal{R}$ を考える．

$$\mathcal{R}=\left\{\begin{array}{lcl} g(f(x)) & \to & g(g(x)) \\ f(f(x)) & \to & x \end{array}\right.$$

$g(f(\cdots f(a)\cdots))$ からの書き換えをを考える．

$$\begin{array}{lll} g(f(\cdots f(a)\cdots)) & \circ\!\!\to & g(g(f^1(\cdots f^1(a^1)\cdots))) \\ & \circ\!\!\to & g(g(g(f^2(\cdots f^2(a^2)\cdots)))) \\ & & \vdots \\ & \circ\!\!\to & g(g(\cdots g(a^n)\cdots)) \end{array}$$

このような書き換えを考えると f の数が増えるとマークの最大値も増加する．よって $\mathcal{R}\notin BU$．しかし，$g(f(\cdots f(a)\cdots))$ からの最内書き換えの場合，上記のような書き換えはなく以下の場合のみ考えればよい．

$$\begin{array}{lll} g(f(\cdots f(a)\cdots)) & \underset{i}{\circ\!\!\to} & g(f(\cdots f(a^1)\cdots)) \\ & \underset{i}{\circ\!\!\to} & g(f(\cdots f(a^1)\cdots)) \\ & & \vdots \\ & \underset{i}{\circ\!\!\to} & g(a^1) \end{array}$$

これ以外の書き換えについても最内書き換えの場合マークの上限は 1 である．よって $\mathcal{R}\in IBU(1)$ である． □

4 最内ボトムアップ書き換えの到達可能性

この節では，以下の命題 1 の結果を線形な項書き換えシステムの $ibu(k)$ 書き換え系列に拡張することで，IBU に含まれる項書き換えシステム $\mathcal{R}$ について，T が認識可能な項集合のとき $({}_k\!\overset{*}{\underset{i}{\to}}{}_{\mathcal{R}})[T]$ が認識可能であることを示す．

命題 1 [2] $\mathcal{R}$ を基底項書き換えシステム，T を認識可能な項集合とする．このとき $(\overset{*}{\to}_{\mathcal{R}})[T]$ は認識可能である．

本節では，線形な項書き換えシステム R，項集合 $T\subseteq\mathcal{T}(\mathcal{F})$，$\mathcal{L}(A)=T$ となる木オートマトン $A=(\mathcal{F},\mathcal{Q},\mathcal{Q}_f,\Delta)$，$\mathcal{L}(A')=NF_{\mathcal{R}}$ となる木オートマトン $A'=(\mathcal{F},\mathcal{Q}',\mathcal{Q}'_f,\Delta')$，自然数 k は固定されているものとする．また，A，A' は一般性を失うことなく決定的かつ完全であると仮定する．整数 d を $d=max\{dpt(l)\mid l\to r\in\mathcal{R}\}$ と定める．

以下で定義する木オートマトン A_{in} と基底項書き換えシステム S_{in} をもちいて ${}_k\!\overset{*}{\underset{i}{\circ\!\!\to}}$ を模倣する．

定義 9 $A_{in} = (\mathcal{F}, \mathcal{Q}_{in}, \mathcal{Q}_{fin}, \Delta_{in})$

$\mathcal{Q}_{in} = \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}'$

$\mathcal{Q}_{fin} = Q_f \times Q'$

$\Delta_{in} = \{f((q_1, q'_1), \ldots, (q_n, q'_n)) \to (q, q') \mid$

$f(q_1, \ldots, q_n) \to q \in \Delta, f(q'_1, \ldots, q'_n) \to q' \in \Delta'\}$

このとき，A_{in} は決定的かつ完全，$\mathcal{L}(A_{in}) = \mathcal{L}(A)$．また，$q' \in Q'_f$ のとき $\mathcal{L}_{(q,q')}(A) \subseteq NF_{\mathcal{R}}$ となる．

定義 10 $\mathcal{T}((\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}_{in})^{\leq k})$ 上の基底項書き換えシステム S_{in} は，以下の条件をみたす $\bar{l}\tilde{\tau} \to r\tilde{\tau}$ の形をした規則の集合である．

(i)．$l \to r \in R$,

(ii)．$m(\bar{l}) = 0$,

(iii)．$\overline{\tau}, \tilde{\tau} : \mathcal{V} \to \mathcal{T}((\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}_{in})^{\leq k})$,

(iv)．任意の $x \in Var(l)$ について $dpt(x\overline{\tau}) \leq kd$ かつ $x\tilde{\tau} = x\overline{\tau} \odot M(\bar{l}, x)$,

(v)．$\bar{l} = f(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n)$ としたとき，$\exists q' \in \mathcal{Q}'_f.\ \overline{t_i}\overline{\tau} \overset{*}{\to}_{A_{in}} (q, q')$.

補題 5 $\overline{s}, \overline{t} \in \mathcal{T}((\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}_{in})^{\leq k})$ をマーク増加，$\overline{s'} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ とする．$\overline{s}' \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{s}$，$\overline{s} \to_{S_{in} \cup A_{in}} \overline{t}$ のとき，$\overline{s}\ {}_k\!\overset{*}{\underset{i}{\circ\!\!\to}} \overline{t}'$，$\overline{t}' \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{t}$ となる $t' \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ が存在する．

証明．

1．$\overline{s} \to_{A_{in}} \overline{t}$ のとき．

$\overline{t}' = \overline{s'}$ とすれば，$\overline{s}'\ {}_k\!\overset{*}{\underset{i}{\circ\!\!\to}} \overline{t}$，$\overline{t}' \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{t}$ をみたす．

2．$\overline{s} \to_{S_{in}} \overline{t}$ のとき．

$\overline{s} \to_{S_{in}} \overline{t}$ なので $\overline{s} = \overline{C}[\bar{l}\overline{\tau}]$，$\overline{t} = \overline{C}[\bar{l}\tilde{\tau}]$ となる規則 $l \to r \in \mathcal{R}$，文脈 $\overline{C}$，代入 $\overline{\tau}, \tilde{\tau}$ が存在する．$\overline{s}' = \overline{C'}[\bar{l}\overline{\sigma}]$ とすると $\overline{s}' \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{s}$ より，$\overline{C}' \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{C}$，任意の $x \in Var(l)$ について $x\overline{\sigma} \overset{*}{\to}_{A_{in}} x\overline{\tau}$ となる．$\overline{t}' = \overline{C}'[r\hat{\sigma}]$，$\forall x. x\hat{\sigma} = x\overline{\tau} \odot M(\overline{C}'[\bar{l}], x)$ とおくと $\overline{s}' \circ\!\!\to \overline{t}'$ である．$\bar{l} = f(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n)$ とすると S_{in} の定義より，$t_i\overline{\tau} \overset{*}{\to}_{A_{in}} (q, q')$ $(q' \in Q'_f)$ である．$x\overline{\sigma} \overset{*}{\to}_{A_{in}} x\overline{\tau}$ より $t_i\overline{\sigma} \overset{*}{\to}_{A_{in}} t_i\overline{\tau} \overset{*}{\to}_{A_{in}} (q, q')$ $(q' \in Q'_f)$ となるので，$t_i\overline{\sigma} \in NF_{\mathcal{R}}$ である．したがって，$\bar{l}\overline{\sigma}$ は $\overline{s}'$ の最内リデックスなので $\overline{s}' \underset{i}{\circ\!\!\to} \overline{t}'$．$\overline{t} = \overline{C}[r\tilde{\tau}]$ のマークがすべて k 以下なので任意の $x \in Var(l)$ について $M(\bar{l}, x) \leq k$ である．$\overline{s}'$ がマーク増加かつ $m(\bar{l}) = 0$ なので $M(\overline{C}'[\bar{l}], x) = M(\bar{l}, x)$ となる．よって $mmax(\overline{t}') \leq k$ となるので，$\overline{s}'\ {}_k\!\underset{i}{\circ\!\!\to} \overline{t}'$ である．

任意の $x \in Var(l)$ について $x\overline{\sigma} \overset{*}{\to}_{A_{in}} x\overline{\tau}$ と補題 3 より $x\hat{\sigma} = x\overline{\sigma} \odot M(\bar{l}, x) \overset{*}{\to}_{A_{in}} x\overline{\tau} \odot M(\bar{l}, x) = x\tilde{\tau}$ である．したがって，$\overline{t}' = \overline{C}'[\bar{l}\hat{\sigma}] \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{C}[\bar{l}\tilde{\tau}] = \overline{t}$ が成り立つ． □

補題 6 $\overline{s}, \overline{t} \in \mathcal{T}((\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}_{in})^{\leq k})$，$\overline{s'} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ とする．ただし，$\overline{s}$ はマーク増加．$\overline{s}' \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{s}$，$\overline{s} \overset{*}{\to}_{S_{in} \cup A_{in}} \overline{t}$ のとき，$\overline{s}'\ {}_k\!\overset{*}{\underset{i}{\circ\!\!\to}} \overline{t}'$，$\overline{t}' \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{t}$ となる $t' \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ が存在する．

証明．書き換え系列 $\overset{*}{\to}_{S_{in} \cup A_{in}}$ の長さ n に関する帰納法で示す．

$(B.S.)$ $n = 0$ のとき．$\overline{t}' = \overline{s'}$ とすれば，$\overline{s}' \underset{i}{\circ\!\!\to} \overline{t}$，$\overline{t}' \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{t}$ をみたす．

$(I.S.)$ $\overline{s} \overset{*}{\to}_{S_{in} \cup A_{in}} \overline{u} \to_{S_{in} \cup A_{in}} \overline{t}$ とする．$\overline{s}'$，$\overline{s}$，$\overline{u}$ について帰納法の仮定より $\overline{s}'\ {}_k\!\overset{*}{\underset{i}{\circ\!\!\to}} \overline{u}' \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{u}$ となる $\overline{u}'$ が存在する．$\overline{u}'$，$\overline{u}$，$\overline{t}$ について補題 5 より $\overline{u}'{}_k \underset{i}{\circ\!\!\to} \overline{t}' \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{t}$ となる $\overline{t}'$ が存在する．したがって，$\overline{s}'\ {}_k\!\underset{i}{\circ\!\!\to} \overline{t}' \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{t}$ となる $\overline{t}'$ が存在する． □

定義 11 $\overline{t} \in \mathcal{T}((\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}_{in})^{\leq k} \cup \{\Box\})$ とする．このとき，$\overline{t}$ のトップ領域 $Topd(\overline{t})$ を以下の条件をみたす位置 u の最大の集合と定義する．

1. $u \in Pos(\overline{t})$
2. 任意の $u' \preceq u$ について $m(\overline{t}/u') > 0 \Rightarrow |u| - |u'| \leq (k + 1 - m(\overline{t}/u'))d$.

定義 12 任意の $\overline{t} \in \mathcal{T}((\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}_{in})^{\leq k} \cup \{\Box\})$ ついて $Top(\overline{t}) = Red_{A_{in}}(\overline{t}, Topd(\overline{t}))$ と定義する．代入 $\overline{\sigma}$ に対する Top を $Top(\overline{\sigma})(x) = Top(\overline{\sigma}(x))$ とする．

補題 7 [3] $\overline{t} \in \mathcal{T}((\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}_{in}^{\leq k})$，$\overline{C} \in \mathcal{T}((\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}_{in})^{\leq k} \cup \{\Box\})$ とする．$\overline{C}/u = \Box$ とする．任意の位置 $u \preceq v$ に対して $m(\overline{C}[\ ]/u) = 0$ のとき $Top(\overline{C}[\overline{t}]) = Top(\overline{C})[Top(\overline{t})]$.

補題 8 [3] $l \to r \in \mathcal{R}$ について，$Pos(Top(\bar{l}\overline{\sigma})) \supseteq Pos(\bar{l}Top(\hat{\sigma}))$．ただし，$\forall x \in Var(l).\ x\hat{\sigma} = x\overline{\sigma} \odot M(\bar{l}, x)$ とし，出現するマークはすべて k 以下とする．

補題 9 マーク増加な $\overline{s}, \overline{t} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ において $\overline{s} \underset{i}{\circ\!\!\to} \overline{t}$ が弱ボトムアップならば，$Top(\overline{s}) \overset{*}{\to}_{A_{in}} \to_{S_{in}} Top(\overline{t})$ である．

証明．$\overline{s} = \overline{C}[\bar{l}\overline{\sigma}]$，$\overline{t} = \overline{C}[r\hat{\sigma}]$，$\forall x \in Var(l). x\hat{\sigma} = x\overline{\sigma} \odot M(\overline{C}[\bar{l}], x)$，$\overline{D} = Top(\overline{C})$，$\tilde{\tau} = Top(\hat{\sigma})$,

$\overline{\tau}(x) = Red\{\overline{\sigma}(x), Pos(\tilde{\tau}(x))\}$ とする．このとき $Top(\overline{s}) \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{D}[\bar{l}\overline{\tau}] \to_{S_{in}} \overline{D}[r\tilde{\tau}] = Top(\bar{t})$ を示す.

１．$Top(\overline{s}) \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{D}[\bar{l}\overline{\tau}]$ を示す.

$Pos(Top(\overline{s})) \supseteq Pos(\overline{D}[\bar{l}\overline{\tau}])$ を示せば補題 2 より成立する．弱ボトムアップより $m(\bar{l}) = 0$ となることと $\overline{s}$ がマーク増加であることから，$\overline{D}$ の □ より上の位置でのマークは 0 である．したがって，補題 7 より

$$Top(\overline{s}) = Top(\overline{C}[\bar{l}\overline{\sigma}]) = Top(\overline{C})[Top(\bar{l}\overline{\sigma})] \qquad (1)$$

である．よって $Pos(Top(\overline{s})) = Pos(\overline{D}[Top(\bar{l}\overline{\sigma})])$ ．また，

$$\begin{aligned} Pos(\overline{D}[\bar{l}\overline{\tau}]) &= Pos(\overline{D}[\bar{l}\tilde{\tau}]) \\ &= Pos(\overline{D}[\bar{l}Top(\hat{\sigma})]) \end{aligned} \qquad (2)$$

なので (1)，(2) と補題 8 より $Pos(Top(\bar{l}\overline{\sigma})) \supseteq Pos(\bar{l}Top(\hat{\sigma}))$ が成り立つ.

２．$\overline{D}[\bar{l}\overline{\tau}] \to_{S_{in}} \overline{D}[\hat{\tau}]$ を示す.

$\overline{s} \underset{i}{\circ\!\!\to} \bar{t}$ が弱ボトムアップなので $\bar{l}\overline{\tau} \to r\tilde{\tau}$ は定義 10 の条件 (i),(ii) はみたす．$\overline{s}, \bar{t} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ なので $\overline{\sigma}, \hat{\sigma} : \mathcal{V} \to \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ である．任意の $x \in Var(l)$ について $x\overline{\sigma} \overset{*}{\to}_{A_{in}} x\overline{\tau}$，$x\hat{\sigma} \overset{*}{\to}_{A_{in}} x\tilde{\tau}$ なので $\overline{\tau}, \tilde{\tau} : \mathcal{V} \to \mathcal{T}((\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}_{in})^{\leq k}))$．よって，条件 (iii) もみたす．$\overline{C}$ の □ より上の位置でのマークは 0 なので任意の $x \in Var(l)$ について $M(\overline{C}[\bar{l}], x) = M(\bar{l}, x)$ である．よって，$x\tilde{\tau} = x\overline{\tau} \odot M(\bar{l}, x)$．また，$M(\bar{l}, x) \geq 1$ なので $dpt(x\overline{\tau}) = dpt(x\tilde{\tau}) = dpt(xTop(\hat{\sigma}))$ と定義 11 より $dpt(x\overline{\tau}) \leq (k+1-m(xTop(\hat{\sigma})))d \leq kd$．したがって，定義 10 の条件 (iv) をみたす．$\bar{l}\overline{\sigma}$ が $\overline{s}$ の最内リデックスなので $\bar{l} = f(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n)$ とすれば $\bar{t}_i\overline{\sigma} \overset{*}{\to}_{A_{in}} (q, q')$ かつ $q' \in \mathcal{Q}'_f$．任意の $x \in Var(l)$ について $x\overline{\sigma} \overset{*}{\to}_{A_{in}} x\overline{\tau}$ なので，$\bar{t}_i\overline{\sigma} \overset{*}{\to}_{A_{in}} \bar{t}_i\overline{\tau} \overset{*}{\to}_{A_{in}} (q, q')$ かつ $q' \in \mathcal{Q}'_f$ となるので，定義 10 の条件 (v) をみたしている．以上より，$\bar{l}\overline{\tau} \to r\tilde{\tau}$ は定義 10 のすべての条件をみたすので $\bar{l}\overline{\tau} \to r\tilde{\tau} \in S_{in}$ となる.

３．$\overline{D}[r\tilde{\tau}] = Top(\bar{t})$ を示す.

$$\begin{aligned} Top(\bar{t}) &= Top(\overline{C}[r\hat{\sigma}]) \\ &= Top(\overline{C})[Top(r\hat{\sigma})] && \text{(補題 7 より)} \\ &= \overline{D}[rTop(\hat{\sigma})] && \text{(補題 7 より)} \\ &= \overline{D}[r\tilde{\tau}] \end{aligned}$$

□

補題 10 $\overline{s}, \bar{t} \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ とする．$\overline{s}$ がマーク増加かつ $\overline{s} \;{}_{k}\underset{i}{\overset{*}{\circ\!\!\to}}\; \bar{t}$ ならば，$\overline{s} \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{s}'$，$\overline{s}' \overset{*}{\to}_{S_{in} \cup A_{in}} \bar{t}'$，$\bar{t} \overset{*}{\to}_{A_{in}} \bar{t}'$ となる $\overline{s}', \bar{t}' \in \mathcal{T}((\mathcal{F} \cup \mathcal{Q}_{in})^{\leq k})$ が存在する.

証明．$\overline{s} = \overline{s}_0 \;{}_{k}\underset{i}{\circ\!\!\to}\; \overline{s}_1 \;{}_{k}\underset{i}{\circ\!\!\to}\; \cdots \;{}_{k}\underset{i}{\circ\!\!\to}\; \overline{s}_n = \bar{t}$ とする．任意の i $(0 \leq i \leq n-1)$ について，補題 4 より s_i はマーク増加．$\overline{s}_i \underset{i}{\circ\!\!\to} \overline{s}_{i+1}$ に補題 9 を使うと $Top(\overline{s}_i) \overset{*}{\to}_{S_{in} \cup A_{in}} Top(\overline{s}_{i+1})$．したがって，$\overline{s}' = Top(\overline{s})$，$\bar{t}' = Top(\bar{t})$ とすれば $\overline{s} \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{s}'$，$\overline{s}' \overset{*}{\to}_{S_{in} \cup A_{in}} \bar{t}'$，$\bar{t} \overset{*}{\to}_{A_{in}} \bar{t}'$ が成立する. □

補題 11 $\mathcal{L}(A_{in}) = T \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F})$，$s \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ に対して以下が成立する.

$$\exists t \in T.\ s \;{}_{k}\underset{i}{\overset{*}{\to}}\; t \Leftrightarrow \exists q^j \in \mathcal{Q}^{\leq k}_{fin}.\ s \overset{*}{\to}_{S_{in} \cup A_{in}} q^j$$

証明．($\Rightarrow$) $s = \overline{s} \;{}_{k}\underset{i}{\overset{*}{\circ\!\!\to}}\; \bar{t}$ を考える．補題 10 より $\overline{s} \overset{*}{\to}_{A_{in}} \overline{s}' \overset{*}{\to}_{S_{in} \cup A_{in}} \bar{t}'$，$\bar{t} \overset{*}{\to}_{A_{in}} \bar{t}'$ となる $\bar{t}'$ が存在する．$t \in T$ より $\bar{t} \overset{*}{\to}_{A_{in}} q^j$ となる $q^j \in \mathcal{Q}^{\leq k}_{fin}$ が存在する．補題 2 より $\bar{t} \overset{*}{\to}_{A_{in}} \bar{t}' \overset{*}{\to}_{A_{in}} q^j$．したがって $s = \overline{s} \overset{*}{\to}_{S_{in} \cup A_{in}} q^j$ となる $q^j \in \mathcal{Q}^{\leq k}_{fin}$ が存在する.

($\Leftarrow$) 補題 6 において $\overline{s} = s$，$\overline{s}' = s$，$\bar{t} = q$ とすると，$s \;{}_{k}\underset{i}{\overset{*}{\circ\!\!\to}}\; \bar{t}' \overset{*}{\to}_{A_{in}} q^j$ となる $\bar{t}' \in \mathcal{T}(\mathcal{F}^{\leq k})$ が存在する．このとき，$t = \bar{t}'^0$ とすれば $s \;{}_{k}\underset{i}{\overset{*}{\to}}\; t$，$t \in T$ となるので成立する. □

定理 1 $\mathcal{R}$ を $\mathcal{F}$ 上の線形な項書き換えシステム，$T \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F})$ は認識可能な項集合とする．このとき，任意の $k \geq 0$ に対して $({}_{k}\underset{i}{\overset{*}{\to}})[T]$ は認識可能である.

証明．補題 11 より

$$({}_{k}\underset{i}{\overset{*}{\to}})[T] = (\overset{*}{\to}_{S_{in} \cup A_{in}})[\mathcal{Q}^{\leq k}_{fin}] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F})$$

である．$S_{in} \cup A_{in}$ は基底項書き換えシステムなので命題 1 より $(\overset{*}{\to}_{S_{in} \cup A_{in}})[\mathcal{Q}^{\leq k}_{fin}]$ は認識可能である．また，$\mathcal{T}(\mathcal{F})$ も認識可能なので $(\overset{*}{\to}_{S_{in} \cup A_{in}})[\mathcal{Q}^{\leq k}_{fin}] \cap \mathcal{T}(\mathcal{F})$ は認識可能である．したがって，$({}_{k}\underset{i}{\overset{*}{\to}})[T]$ も認識可能である. □

例 2 以下の項書き換えシステム $\mathcal{R}$ を考える.

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{array}{lcl} g(f(x)) & \to & g(g(x)) \\ f(f(x)) & \to & x \end{array} \right.$$

このとき $T = \{g(t) \mid t \in \mathcal{T}(\{f, a\})\}$ とする．このとき，$({}_{1}\underset{i}{\overset{*}{\to}})[T]$ は認識可能であり，$\mathcal{R}$ は $ibu(1)$ なので，任意の s，t について $s \underset{i}{\overset{*}{\to}}$ ならば，$s \;{}_{1}\underset{i}{\overset{*}{\to}}\; t$ である．よって $(\underset{i}{\overset{*}{\to}})[T] = ({}_{1}\underset{i}{\overset{*}{\to}})[T]$ なので $(\underset{i}{\overset{*}{\to}})[T]$ は認識可能である. □

5 まとめと今後の課題

本論文では，ボトムアップ書き換えに基づき，線形な項書き換えシステムの最内書き換えの到達可能性が，判定可能であることを示した．本論文の方法を，左線形な項書き換えシステムへ拡張することは，今後の課題である．

参 考 文 献

[1] F. Baader and T. Nipkow, *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[2] M. Dauchet, T. Heuillard, P. Lescanne, S. Tison, Decidability of the confluence of finite ground term rewrite systems and of other related term rewrite systems, *Information and Computation*, vol. 88, pp. 187–201, 1990.

[3] I. Durand, G. Senizergues, Bottom-up rewriting is inverse recognizability preserving, *Proceedings of the 18th International Conference on Rewriting Techniques and Applications (RTA 2007), Lecture Notes in Computer Science*, vol. 4533, pp. 107–121, 2007.

[4] I. Durand, G. Senizergues, Bottom-up rewriting for words and terms, http://arXiv.org/abs/0903.2554. 2009

[5] A. Gascon, G. Godoy, F. Jacquemard, Closure of tree automata languages under innermost, *Proceedings of the 8th International Workshop on Reduction Strategies in Rewriting and Programming (WRS 2008), Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, vol. 237, pp. 23–38, 2009

[6] F. Jacquemard, Decidable approximations of term rewriting systems, *Proceedings of the 7th International Conference on Rewriting Techniques and Applications (RTA 1996), Lecture Notes in Computer Science*, vol. 1103, pp. 362–376, 1996

[7] Y. Kojima, M. Sakai, N. Nishida, K. Kusakari,T. Sakabe, Context-sensitive innermost reachability is decidable for linear right-shallow term rewriting systems, *IPSJ Transactions on Programming*, vol. 2, No. 3, pp. 20–32, 2009

[8] T. Nagaya, Y. Toyama, Decidability for left-linear growing term rewriting systems, *Information and Computation* vol. 178, pp. 499–514, 2002

[9] T. Takai, Y. Kaji, H. Seki, Right-linear bouded finite path overlapping rewrite systems effectively preserve recognizability, *Scienticae Mathematicae Japonicae*, vol. 72, No. 2, pp. 127–153, 2010.