書き換え帰納法に基づく帰納的定理の決定手続き

中嶋 辰成　青戸 等人　外山 芳人

等式論理において，自然数やリストなどのデータ構造上で成立する等式を帰納的定理とよぶ．等式が帰納的定理であるか否かは一般的には決定不能であるが，いくつかの部分クラスに対する決定手続きが知られている．本論文では，書き換え帰納法に基づく二つの従来手法を組み合わせることにより，従来知られていた等式が帰納的定理か否かの判定問題が決定可能となるための十分条件が拡張できることを示す．

1 はじめに

等式論理において，自然数やリストなどのデータ構造上で成立する等式を帰納的定理とよぶ．等式が帰納的定理か否かは一般に決定不能である．Giesl ら [4] [5] は項書き換えシステムの枠組みと被覆集合帰納法に基いて，決定可能な帰納的定理のクラスを特徴付けた．さらに，Falke ら [2] は被覆集合帰納法のかわりに書き換え帰納法 [6] に基づいて，決定可能なクラスの拡張を試みている．また，外山 [3] は書き換え帰納法に基づいて，帰納的定理の判定問題を抽象的なリダクションシステムの等価性判定問題としてとらえることで，判定が決定可能となる条件を示した．

Falke ら [2] の手法では，書き換え規則の右辺で定義関数記号が入れ子になることを禁止するなど，書き換え規則に対する制限は必要であるが，判定すべき等式の定義関数の引数は変数でなくともよい．一方，外山 [3] の手法は，書き換え規則に対する制限は不要であるが，判定すべき等式の定義関数の引数は変数でなければならない．したがって，それぞれの手法で保証される決定可能な帰納的定理のクラス間には包含関係がない．

本研究では，この両者の手法を組み合わせることにより，等式については Falke ら [2] の条件，書き換え規則については外山 [3] の条件をもちいることで，従来よりも広い決定可能な帰納的定理のクラスを示す．

2 項書き換えシステム

本節では，項書き換えシステムおよび帰納的定理について文献 [1] [3] を参考に説明する．

2.1 項書き換えシステム

関数記号の集合 F，変数の集合 V 上の項の集合を $T(F,V)$ で表す．また，項 t に現れる変数を $V(t)$ とする．$V(t)=\emptyset$ なる項 t を基底項といい，その集合を $T(F)$ で表す．D,C はそれぞれ定義関数記号と構成子記号の集合で，$F=D\cup C$ かつ $D\cap C=\emptyset$ とする．項 t の部分項が s であることを $s \trianglelefteq t$ と表す．また項 $f(t_1,\ldots,t_n)$ について，$f\in D, t_i\in T(C,V)$ $(i=1,\ldots,n)$ となるとき $f(t_1,\ldots,t_n)$ を基本項という．代入 θ は V から $T(F,V)$ への写像であり，$dom(\theta)=\{x \mid \theta(x)\neq x\}$，$ran(\theta)=\{\theta(x) \mid x\in dom(\theta)\}$ とする．項 s に対する代入を $s\theta$ と記す．項 s と t の最汎単一化子を $mgu(s,t)$ と記す．

書き換え規則 $l\to r$ は，$l\notin V$ かつ $V(r)\subseteq V(l)$ をみたす項 l と r の組であり，項書き換えシステム

Decision Procedure for Inductive Theorems based on Rewriting Induction.

Tatsunari Nakajima, Takahito Aoto, Yoshihito Toyama, 東北大学 電気通信研究所, Research Institute of Electrical Communication, Tohoku University.

R は書き換え規則の集合である．ある $l \to r \in R$ と文脈 C と代入 θ が存在するとき，項 $s = C[l\theta]$ は $t = C[r\theta]$ に書き換えることができる．この書き換え関係を $s \to_R t$ あるいは $s \to t$ と記す．$\xrightarrow{*}, \xleftrightarrow{*}$ をそれぞれ $\to$ の反射推移閉包，$\to$ の等価閉包とする．無限書き換え $s_0 \to s_1 \to \cdots$ が存在しないとき，R は停止性をもつという．また，R が以下の条件をみたすとき，合流性をもつという．

$\forall s,t,u.[s \xrightarrow{*} t \wedge s \xrightarrow{*} u \Rightarrow \exists v.\ t \xrightarrow{*} v \wedge u \xrightarrow{*} v]$

R が十分完全とは $\forall s \in T(F).\exists t \in T(C).[s \xrightarrow{*} t]$ が成立することである．項書き換えシステムが構成子システムであるとは，すべての書き換え規則の左辺が基本項となることである．

以下では，項書き換えシステム R を**合流性，停止性，十分完全性をみたす構成子システム**と仮定する．

2.2 帰納的定理

等式 $s \approx t$ が項書き換えシステム R における帰納的定理であるとは，s と t に対する任意の基底代入 $\theta_g : V \to T(F)$ に対して $s\theta_g \xleftrightarrow{*} t\theta_g$ となることである．

例 1. 次の項書き換えシステム R を考える．

$$R : \begin{cases} 0 + y \to y \\ s(x) + y \to s(x+y) \end{cases}$$

このとき，$x + 0 \xleftrightarrow{*} x$ は成立しない．しかし，$\forall\theta_g.[(x+0)\theta_g \xleftrightarrow{*} x\theta_g]$ は成立するので，等式 $x+0 \approx x$ は R の帰納的定理となる． □

R が合流性と停止性をみたすなら，等式 $s \approx t$ が R の定理 (つまり $s \xleftrightarrow{*} t$) であるか否かはよく知られているように決定可能である [1]．しかし，R が合流性，停止性，十分完全性をみたしたとしても，$s \approx t$ が R の帰納的定理であるかどうかは一般には決定不能である [3]．

3 帰納的定理の決定可能性

本節では，項書き換えシステム R のもとで等式 $s \approx t$ が帰納的定理か否かが決定可能となる十分条件を与える．文献 [3] [6] から以下の命題が成りたつ．

命題 1. $R' = R \cup \{s \to t\}$ とし，R' は停止性をみたす項書き換えシステムとする．さらに，以下をみたす s の基本部分項 u が存在するものとする．

$\forall l \to r \in R.\forall\sigma.\ [mgu(l,u) = \sigma \Rightarrow$
$\exists p,q \in T(C,V).\ s\sigma \to_R \xrightarrow{*}_{R'} p \wedge t\sigma \xrightarrow{*}_{R'} q]$

このとき，$p = q$ ならば $s \approx t$ は R の帰納的定理であり，$p \neq q$ ならば $s \approx t$ は R の帰納的定理でない．

外山 [3] はこの命題をもちいて等式 $s \approx t$ が単純，すなわち $s = f(x_1,\ldots,x_n)$ は線形で，$f \in D$，$t \in T(C,V)$ ならば，この等式が帰納的定理か否かは決定可能であることを示した．以降では，Falke ら [2] の手法でもちいられている帰納的位置の概念をもちいて決定可能となる条件の拡張を試みる．

項書き換えシステム R における定義関数記号 f の帰納的位置を以下のように定義する．

定義 1. 項書き換えシステム R で定義された関数記号 f の引数の位置 i が f の非帰納的位置であるとは以下をみたすことである．

任意の $f(l_1,\ldots,l_n) \to r \in R$ について，

1. $l_i \in V$,
2. $\forall f(r_1,\ldots,r_n) \trianglelefteq r.\ l_i = r_i$.

i が非帰納的位置でないとき，i は帰納的位置であるという．また，$Ind(f)$, $\overline{Ind}(f)$ はそれぞれ f の帰納的位置の集合，非帰納的位置の集合を表す．

例 2. 次の項書き換えシステム R を考える．

$$R : \begin{cases} 0 + y \to y \\ s(x) + y \to s(x+y) \end{cases}$$

このとき，$Ind(+) = \{1\}$, $\overline{Ind}(+) = \{2\}$ となる． □

例 3. 次の項書き換えシステム R を考える．

$$R : \begin{cases} f(0,y) \to y \\ f(s(x),y) \to f(f(x,y),y) \end{cases}$$

このとき，$Ind(f) = \{1\}$, $\overline{Ind}(f) = \{2\}$ となる． □

以下では，一般性を失うことなく，$f(l_1,\ldots,l_k) \to r \in R$ において $k = m + n, Ind(f) =$

$\{1,\ldots,m\}, \overline{Ind}(f) = \{m+1,\ldots,m+n\}$ として $f(l_1,\ldots,l_m,y_1,\ldots,y_n) \to r$ と表すことにする．このとき，任意の r の部分項 $r' = f(r_1,\ldots,r_k)$ について，$r_{m+i} = y_i (1 \leq i \leq n)$ なので，$r' = f(r_1,\ldots,r_m,y_1,\ldots,y_n)$ となることに注意する．

定理 1. $R' = R \cup \{f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n) \to t\}$ とおく．ここで，$f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n) \approx t$ が以下の条件をみたすものとする．

(i) R' は停止性をもつ．

(ii) $x_1,\ldots,x_m$ は相異なる変数．

(iii) $f \in D,\ s_1,\ldots,s_n,t \in T(C,V)$.

(iv) $x_i \notin V(s_j)\ (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$.

このとき，この等式が R の帰納的定理か否かは決定可能である．

証明 . R が十分完全なので，$\sigma = mgu(f(x_1,\ldots,x_m, s_1,\ldots,s_n), f(l_1,\ldots,l_m,y_1,\ldots,y_n))$ となる代入 σ と書き換え規則 $f(l_1,\ldots,l_m,y_1,\ldots,y_n) \to r \in R$ が存在して，$f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n)\sigma = f(l_1,\ldots,l_m,y_1,\ldots,y_n)\sigma \to_R r\sigma$ が成立する．このとき，$s_1,\ldots,s_n \in T(C,V)$ および R が構成子システムであることから，$ran(\sigma) \subseteq T(C,V)$ となることに注意する．いま，$r' \trianglelefteq r$ とすると，$r' = f(r_1,\ldots,r_m,y_1,\ldots,y_n)$ とおける．また，σ は最汎単一化子だから $y_i\sigma = s_i\sigma\ (1 \leq i \leq n)$ となる．よって，$r'\sigma = f(r_1,\ldots,r_m,y_1,\ldots,y_n)\sigma = f(r_1\sigma,\ldots,r_m\sigma,y_1\sigma,\ldots,y_n\sigma) = f(r_1\sigma,\ldots,r_m\sigma,s_1\sigma, \ldots,s_n\sigma)$ となる．これより，

$$\theta(x) = \begin{cases} r_i\sigma & (x = x_i のとき) \\ x\sigma & (それ以外) \end{cases}$$

とおくと，条件 (iv) より，$x_i\theta = r_i\sigma, s_i\theta = s_i\sigma$ となるので，$r'\sigma = f(x_1,\ldots,x_n,s_1,\ldots,s_n)\theta$. 以下では，$f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n) \to t \in R'$ をもちいて $r'\sigma$ が構成子項に書き換えることが可能であることを示す．まず，$r'\sigma$ が基本項のとき，$r'\sigma = f(r_1\sigma,\ldots,r_m\sigma,y_1\sigma,\ldots,y_n\sigma) = f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n)\theta \to_{R'} t\theta$, $r_i\sigma \in T(C,V)$ $(1 \leq i \leq m)$ となる．ここで，θ の定義より $ran(\theta) \subseteq T(C,V)$ となることと，$t \in T(C,V)$ より $t\theta \in T(C,V)$. また，$r'\sigma$ が基本項でないときは，$r_1\sigma,\ldots,r_m\sigma$ について，これらに含まれる最内の部分項 $r'\sigma$ から上と同様の書き換えを繰り返すことで，構成子項にすべて書き換えることが可能である．よって，この場合も $r'\sigma$ を $f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n) \to t \in R'$ をもちいて構成子項に書き換えることができる．以上より，$r\sigma \xrightarrow{*}_{R'} p \in T(C,V)$ が得られる．ここで，$q = t\sigma \in T(C,V)$ であることに注意すると，命題 1 より等式 $f(x_1,\ldots,x_m,s_1,\ldots,s_n) \approx t$ が帰納的定理か否かは決定可能となる． □

例 4. 次の項書き換えシステム R を考える．

$$R : \begin{cases} f(0,y,z) \to z \\ f(s(x),y,z) \to s(f(x,f(x,y,z),z)) \end{cases}$$

このとき，等式 $f(x',y',s(0)) \approx s(x')$ は帰納的定理か否かを判定する．$Ind(f) = \{1,2\}, \overline{Ind}(f) = \{3\}$ であることに注意すると，$s(0) \in T(C,V), x',y' \notin V(s(0))$ であるから，この等式は定理 1 の条件をみたしている．よって，帰納的定理か否かは決定可能である．実際，$f(0,y,z) \to z \in R$ について $\sigma = mgu(f(x',y',s(0)), f(0,y,z)) = [x' := 0, y' := y, z := s(0)]$ とおくと，$f(x',y',s(0))\sigma = f(0,y,s(0)) \to_R s(0) = s(x')\sigma$ となる．また，$f(s(x),y,z) \to s(f(x,f(x,y,z),z)) \in R$ について $\sigma = mgu(f(x',y',s(0)), f(s(x),y,z)) = [x' := s(x), y' := y, z := s(0)]$ とおくと，$f(x',y',s(0))\sigma = f(s(x),y,s(0)) \to_R s(f(x,f(x,y,s(0)),s(0))) \to_{R'} s(f(x,s(x),s(0))) \to_{R'} s(s(x)) = s(x')\sigma$ となる．よって，命題 1 からこの等式は帰納的定理である． □

例 5. 次の項書き換えシステム R を考える．

$$R : \begin{cases} f(0,y,z) \to z \\ f(s(x),y,z) \to f(x,f(x,y,z),z) \end{cases}$$

このとき，等式 $f(x',y',s(0)) \approx s(x')$ は帰納的定理か否かを判定する．$Ind(f) = \{1,2\}, \overline{Ind}(f) = \{3\}$ であることに注意すると，$s(0) \in T(C,V), x',y' \notin V(s(0))$ であるから，この等式は定理 1 の条件をみたしている．よって，帰納的定理か否かは決

定可能である．実際，$f(0,y,z) \to z \in R$ について $\sigma = mgu(f(x',y',s(0)), f(0,y,z)) = [x' := 0, y' := y, z := s(0)]$ とおくと，$f(x',y',s(0))\sigma = f(0,y,s(0)) \to_R s(0) = s(x')\sigma$ となる．また，$f(s(x),y,z) \to f(x,f(x,y,z),z) \in R$ について $\sigma = mgu(f(x',y',s(0)), f(s(x),y,z)) = [x' := s(x), y' := y, z := s(0)]$ とおくと，$f(x',y',s(0))\sigma = f(s(x),y,s(0)) \to_R f(x,f(x,y,s(0)),s(0)) \to_{R'} f(x,s(x),s(0)) \to_{R'} s(x) \neq s(s(x)) = s(x')\sigma$ となる．よって，命題 1 からこの等式は帰納的定理でない． □

例 4 と例 5 では，書き換え規則の右辺において定義関数記号が入れ子状に出現しているため Falke ら [2] の十分条件は適用できず，また，等式については左辺の部分項に構成子が含まれているため外山 [3] の十分条件も適用できない．一方，我々の手法は，両者の手法を組み合わせているため，例 4 と例 5 に対して適用可能である．

4 まとめと今後の課題

本研究では，外山 [3] の手法と Falke ら [2] の手法を組み合わせることで，従来よりも広いクラスの等式について，帰納的定理の判定問題が決定可能となることを示した．Falke ら [2] の手法で判定可能な，複数の定義関数記号や帰納的位置における同一変数が出現する複雑な等式に対しても，本論文の手法を適用できるように拡張することは今後の課題である．

参 考 文 献

[1] F. Baader and T. Nipkow, *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press 1998.
[2] S. Falke and D. Kapur, Inductive decidability using implicit induction, LNAI 4246 (2006), 45–59.
[3] 外山芳人，書き換え帰納法による帰納的定理の決定手続き，信学技報 COMP2002-45 (2002)，41–45.
[4] J. Giesl and D. Kapur, Decidable class of inductive theorems, LNCS 2083 (2001)，469–484.
[5] J. Giesl and D. Kapur, Deciding inductive validity of equations, LNCS 2741 (2003)，17–31.
[6] U. S. Reddy, Term rewriting inducion, LNCS 449 (1990), 162–177