基底項書き換え系の多項式時間合流性判定法の改良

村井 正勝 [1], 青戸 等人 [1], 外山 芳人 [1]

[1] 東北大学 電気通信研究所

{murai, aoto, toyama}@nue.riec.tohoku.ac.jp

概 要　基底項書き換え系の合流性は決定可能であることが知られている．また，基底項書き換え系の合流性を判定する多項式時間判定法も Comon-Godoy-Nieuwenhuis (2001) や Godoy-Tiwari-Verma (2004) によって提案されている．これらの多項式時間判定法では，与えられた基底項書き換え系をカリー変換とフラット変換で変形して新しい項書き換え系を求め，それに対して閉包操作を行うことで合流性判定を行う．しかし，これらの合流性判定法は，カリー変換とフラット変換という前処理を含んでいるため，実用的な合流性判定システムの構築には適しておらず，判定法の正当性の証明も見通しの良いものではない．本論文では，与えられた基底項書き換え系に対して，カリー変換とフラット変換を使わずに，閉包操作を直接行うことで合流性を判定する多項式時間判定法を提案する．さらに，安定度と強安定項という概念を導入することにより，従来よりも簡明で理解しやすい正当性の証明を与える．

1　はじめに

基底項書き換え系の合流性は決定可能であることが知られている [7, 4]．また，基底項書き換え系の合流性を判定する多項式時間判定法も Comon-Godoy-Nieuwenhuis[3] や Godoy-Tiwari-Verma[6] によって提案されている．これらの多項式時間判定法では，与えられた基底項書き換え系をカリー変換とフラット変換で変形して新しい項書き換え系を求め，それに対して閉包操作を行うことで合流性判定を行う (図 1)．しかし，これらの合流性判定法は，カリー変換とフラット変換という前処理を含んでいるため，実用的な合流性判定システムの構築には適していない．また，判定法の正当性の証明も，帰納法に用いる測度が不適切であるため，非常に分かりにくい構造となっている．

本論文では，カリー変換やフラット変換を使わずに，閉包操作を直接行うことで合流性を判定する多項式時間判定法を提案し (図 2)，その正当性を証明する．文献 [3] では判定法の正当性を項の高さに関する帰納法で証明しているが，カリー変換やフラット変換を仮定しない一般的な基底項書き換え系に対しては，同様な証明法は適用することができない．そこで，本論文では，安定度と強安定項という新しい概念を導入し，それにもとづいた帰納法による証明を構築する．文献 [3] の証明では，カリー変換やフラット変換の性質を利用した複雑な場合分けが必要であり，帰納法の論理構造が非常に混み入っている．一方，本論文の正当性の証明は，安定度と強安定項をもちいることで論理構造が整理され，単純な場合分けのみをもちいた見通しのよい自然な帰納法となっている．

本論文の構成は以下のとおりである．第 2 節では，項書き換えシステムの基本的な説明を行う．第 3 節では，基底項書換え系の Plaisted 変換について述べ，基底項書き換え系の基本的な性質を示す．第 4 節では，合流性の必要条件について述べる．第 5 節では，合流性判定法を示し，その正当性を証明する．第 6 節で，実験結果について述べ，第 7 節で，本論文の結果と今後の課題についてまとめる．

2　準備

本節では，項書き換え系に関する基本的な定義と記法を説明する (詳細は [2] を参考)．**項書き換え系**は**書き換え規則**の有限集合である．自然数 $0, 1, 2, \ldots$ を $0, S(0), S(S(0)), \ldots$ と表現すると，自

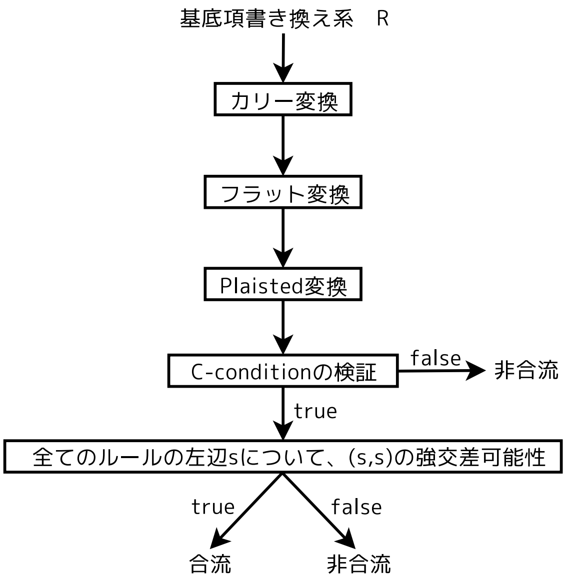

図 **1.** 従来の判定アルゴリズム

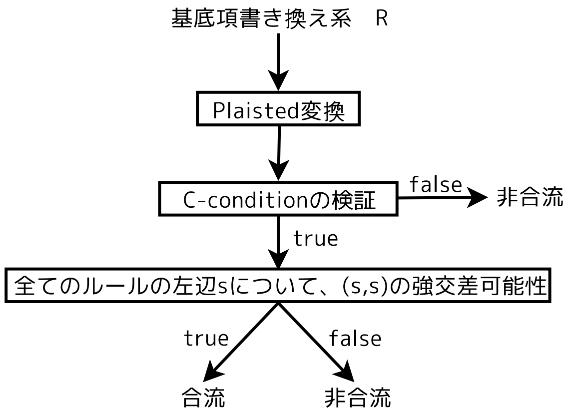

図 **2.** 本論文の判定アルゴリズム

然数上での加算は以下の項書き換え系で与えられる．

$$R = \begin{cases} x + 0 & \to & x \\ x + S(y) & \to & S(x+y) \end{cases}$$

たとえば，$1+1=2$ の計算は，R では $S(0)+S(0) \to S(S(0)+0) \to S(S(0))$ なる書き換えで実現できる．ここで，$S(S(0))$ のようにこれ以上書き換えられない項を**正規形**とよぶ．また，$S(0)$ のように変数を含まない項を**基底項**といい，基底項のみで構成される書き換え規則の有限集合を**基底項書き換え系 (GTRS)** という．**本論文では基底項書き換え系のみを考える．**

項の**位置**を自然数の有限列で表す．空列を λ と記し，項の根 (top) 位置を表わす．位置 p, q において，$p = q.q'$ なる q' が存在するとき，$p \geq q$ と記す．また，$p \geq q \wedge p \neq q$ のとき，$p > q$ と記す．項 t の位置 p にある**部分項**$t|_p$ を，$t|_\lambda = t$，$f(t_1, ..., t_n)|_{i.p} = t_i|_p \quad (1 \leq i \leq n)$ と定義し，項 t の位置 p にある項を s に置き換えて得られる項を $t[s]_p$ と表す．また，項 u が項 t の部分項であることを $u \trianglelefteq t$ と記す．項 t の根位置の記号を $root(t)$ ，$root(t)$ のアリティを $arity(t)$ と記す．とくに，$arity(t) = 0$ となる項 t を定数という．

位置 p で項 s から項 t への**書き換え**を $s {\to_p} t$ または $s {\to} t$ と記す．ここで，$q \geq p$ をみたす位置 q での書き換えを $\to_{\geq p}$，$q > p$ をみたす位置 q での書き換えを $\to_{>p}$ で表す．さらに，項書き換え系 R で項 $f(s_1, ..., s_n)$ の任意の s_i に対して $s_i \to t_i$ となるとき，$f(s_1, ..., s_n) \overset{Arg}{\rightarrowtriangle} f(t_1, ..., t_n)$ または $f(s_1, ..., s_n) \overset{Arg}{\rightarrowtriangle}_R f(t_1, ..., t_n)$ と表す．このとき，任意の定数 c に対して $c \overset{Arg}{\rightarrowtriangle} c$ となることに注意する．また，$s {\to_\lambda} t$ を**トップリダクション**と言う．項 s から項 t に k 回で書き換えられるとき $s \overset{k}{\to} t$ と記す．ここで，$k'(<k)$ 回の書き換えを $\overset{<k}{\to}$，$k'(\leq k)$ 回の書き換えを $\overset{\leq k}{\to}$ 及び 0 回以上の書き換えを $\overset{*}{\to}$ で表す．

項 t_1, t_2 について，ある項 s が存在して $t_1 \overset{*}{\to} s \overset{*}{\leftarrow} t_2$ となるとき，t_1, t_2 は**交差する**といい，$t_1 \downarrow t_2$ と記す．特に，$t_1 \overset{*}{\to}_{>\lambda} s \overset{*}{\leftarrow}_{>\lambda} t_2$ のとき，$t_1 \downarrow_{>\lambda} t_2$ と表す．ここで，$\neg(t_1 \downarrow t_2)$ や $\neg(t_1 \downarrow_{>\lambda} t_2)$ をそれぞれ $t_1 \not\downarrow t_2$，$t_1 \not\downarrow_{>\lambda} t_2$ と表す．このとき，$t_1 \not\downarrow t_2$ ならば $t_1 \not\downarrow_{>\lambda} t_2$ となることに注意する．任意の項 t, t_1, t_2 について，$t_1 \overset{*}{\leftarrow} t \overset{*}{\to} t_2$ ならば，ある項 s が存在して $t_1 \overset{*}{\to} s \overset{*}{\leftarrow} t_2$ となるとき，項書き換え系 R は**合流性**をもつという．

項の大きさを $|f(t_1, ..., t_n)| = 1 + \sum_{k=1}^{n} |t_k|$，項書き換え系 R の**複雑さ**を $||R|| = \sum_{l \to r \in R}(|l| + |r|)$ と定義する．

3　Plaisted 変換と閉包 GTRS の性質

本節では，入力した GTRS R に対して行う Plaisted 変換 [3] について説明した後で，交差性や安定項等の合流性を検証する上で重要な基底項の性質について述べる．以下では $i = 1, \cdots, n$ を $i \in [1, n]$ と略記する．

定義 1 (項の集合 Sub(R))　R を GTRS とするとき，項の集合 $\mathbf{Sub}(R)$ を $\mathrm{Sub}(R) = \{s \mid \exists l \to r \in R.\ s \trianglelefteq l \vee s \trianglelefteq r\}$ により定義する．

定義より，$u \trianglelefteq s \in \mathrm{Sub}(R)$ ならば，$u \in \mathrm{Sub}(R)$ となる．また，R が GTRS であることから，$s \to_\lambda t \ \Rightarrow \ s, t \in \mathrm{Sub}(R)$ となることにも注意する．

定義 2 (GTRS closure(R))　R を GTRS とするとき，GTRS $\mathbf{closure}(R)$ を $\mathrm{closure}(R) = \{s \to t \mid s \xrightarrow{*} t \wedge s, t \in \mathrm{Sub}(R)\}$ と定義する．

このとき，R が合流性をもつことと closure(R) が合流性をもつことが等価であることは定義より明らかである．次に，closure(R) は以下の GTRS R_∞ で構成できることを示す [3]．

定義 3 (GTRS R_∞)　R を GTRS とするとき，GTRS $R_0, R_1, \ldots$ を以下のように定義する．

$$\begin{array}{rcl} R_0 & = & R \cup \{s \to s \mid s \in \mathrm{Sub}(R)\} \\ R_{i+1} & = & R_i \cup \{s \to t \mid s \to u \in R_i \wedge u \to t \in R_i\} \cup \{s \to t \mid s \overset{Arg}{\rightarrowtriangle}_{R_i} t \wedge s, t \in \mathrm{Sub}(R)\} \end{array}$$

このとき，GTRS R_∞ を $R_\infty = \bigcup_i R_i$ と定義する．

補題 4　$s, t \in \mathrm{Sub}(R)$ について $s \to t \in R_\infty \ \Leftrightarrow \ s \xrightarrow{*} t$.

(証明)

($\Rightarrow$) R_∞ の定義より自明.

($\Leftarrow$) $s, t \in \mathrm{Sub}(R)$ について $s \xrightarrow{k} t$ を仮定して，$s \to t \in R_\infty$ を辞書式順序 $\langle k, |s| \rangle$ に関する帰納法で示す.

(B.S.) $k = 0$ なので，$s = t$．よって，$s \to t \in R_0$.

(I.S.) 以下のように場合分けを考える.

(a) $s \xrightarrow{k} t$ 中にトップリダクションがあるとき.

このとき，ある $l \to r \in R$ に対して，$s \xrightarrow{\leq k} l \to_\lambda r \xrightarrow{\leq k}_{>\lambda} t$ となる．ここで，$s, l, r, t \in \mathrm{Sub}(R)$ に注意すると，帰納法の仮定より $s \to l \in R_\infty$, $r \to t \in R_\infty$．したがって，定義より $s \to t \in R_\infty$ が成り立つ.

(b) $s \xrightarrow{k} t$ 中にトップリダクションがないとき.

この場合，$s = f(u_1, \ldots, u_n)$，$t = f(v_1, \ldots, v_n)$ とおけて，任意の $j \in [1, n]$ について $u_j \xrightarrow{\leq k} v_j$ が成り立つので，$s, t \in \mathrm{Sub}(R)$ より $u_j, v_j \in \mathrm{Sub}(R)$ となることに注意すると， 帰納法の仮定より $u_j \to v_j \in R_\infty$ となるため，$s = f(u_1, \ldots, u_n) \overset{Arg}{\rightarrowtriangle} f(v_1, \ldots, v_n) = t$ とできる．したがって，$s, t \in \mathrm{Sub}(R)$ なので，定義より $s \to t \in R_\infty$ が成り立つ.　□

R_∞ は $||R||$ の多項式時間で構成でき，上記補題より $\mathrm{closure}(R) = R_\infty$ が成立する [3]．したがって，**以降では基底項書き換え系 R は $R = \mathbf{closure}(R)$ であると仮定する．** このとき，任意の $s \in \mathrm{Sub}(R)$ に対して，$s \xrightarrow{*} s$ より $s \to s \in R$ となることに注意する．closure(R) の性質から以下の補題が成立する.

補題 5　項 s, t について，$s \in \mathrm{Sub}(R)$ かつ $s \xrightarrow{*} t$ ならば $s \to_\lambda s' \xrightarrow{*}_{>\lambda} t$ をみたす s' が存在する．

(証明)

$s \xrightarrow{*} t$ について以下のような場合分けをする．

(a) $s \xrightarrow{k} t$ 中にトップリダクションがあるとき．

このとき，ある $l \to r \in R$ に対して，$s \xrightarrow{*} l \to_\lambda r \xrightarrow{*}_{>\lambda} t$ となる．これは，$s, r \in \mathrm{Sub}(R)$, $R = \mathrm{closure}(R)$ 及び補題 4 より，$s \to_\lambda r \xrightarrow{*}_{>\lambda} t$ とできるので，$s' = r$ ととれば成立する．

(b) $s \xrightarrow{k} t$ 中にトップリダクションがないとき．

$s \in \mathrm{Sub}(R)$ と補題 4 より，$s \to s \in R$．したがって，$s \to_\lambda s \xrightarrow{*}_{>\lambda} t$ となる．□

補題 6　項 s, t について，$s \xrightarrow{*} t \Leftrightarrow s \to t \in \mathrm{closure}(R \cup \{s \to s,\ t \to t\})$ が成立する．

(証明)

定義 2 より自明．□

$\mathrm{closure}(R)$ が $||R||$ の多項式時間で求めることができることから，上記補題により任意の項 s, t について，$s \xrightarrow{*} t$ は多項式時間で判定できる [3].

次に，交差性 $t_1 \downarrow t_2$ は以下の集合 $Join_\infty$ を求めることにより判定できることを示す．

定義 7 (項対の集合 $Join_\infty$)　項対の集合 $Join_0, Join_1, \ldots$ を以下のように定義する．

$$\begin{array}{rcl} Join_0 & = & \{\langle s, s\rangle \mid s \in \mathrm{Sub}(R)\} \\ Join_{i+1} & = & Join_i \cup \{\langle l, s\rangle \mid l \to r \in R \wedge \langle r, s\rangle \in Join_i\} \\ & & \cup \{\langle s, l\rangle \mid l \to r \in R \wedge \langle s, r\rangle \in Join_i\} \\ & & \cup \{\langle f(l_1, \ldots, l_n), f(r_1, \ldots, r_n)\rangle \mid \forall j \in [1, n].\ [\langle l_j, r_j\rangle \in Join_i] \wedge \\ & & \qquad\qquad f(l_1, \ldots, l_n), f(r_1, \ldots, r_n) \in \mathrm{Sub}(R)\} \end{array}$$

このとき，項対の集合 $Join_\infty$ を $Join_\infty = \bigcup_i Join_i$ と定義する．

補題 8　$t_1, t_2 \in \mathrm{Sub}(R)$ について，$\langle t_1, t_2\rangle \in Join_\infty \Leftrightarrow t_1 \downarrow t_2$．

(証明)

($\Rightarrow$) $Join_\infty$ の定義より自明．

($\Leftarrow$) $t_1, t_2 \in \mathrm{Sub}(R)$ について $t_1 \xrightarrow{k_1} u \xleftarrow{k_2} t_2$ をみたす u が存在するとき，$\langle t_1, t_2\rangle \in Join_\infty$ となることを辞書式順序 $\langle k_1 + k_2, |t_1| + |t_2|\rangle$ に関する帰納法で示す．

(B.S.) $k_1 = k_2 = 0$ のとき，$t_1 = u = t_2$ より $\langle t_1, t_2\rangle \in Join_0$.

(I.S.) 以下のように場合分けを考える．

(a) $t_1 \xrightarrow{k_1} u \xleftarrow{k_2} t_2$ 中にトップリダクションがあるとき．

一般性を失うことなく，$t_1 \xrightarrow{k_1} u$ 中にトップリダクションがあると仮定する．このとき，ある $l \to r \in R$ に対して，$t_1 \xrightarrow{*} l \to_\lambda r \xrightarrow{<k_1}_{>\lambda} u$ が存在し，$t_1, r \in \mathrm{Sub}(R)$ と $R = \mathrm{closure}(R)$ より $t_1 \to r \in R$ が成り立つので，$t_1 \to_\lambda r \xrightarrow{<k_1}_{>\lambda} u \xleftarrow{k_2} t_2$ となる．ここで，$r, t_2 \in \mathrm{Sub}(R)$ かつ $r \xrightarrow{<k_1}_{>\lambda} u \xleftarrow{k_2} t_2$ に注意すると，帰納法の仮定より $\langle r, t_2\rangle \in Join_\infty$．したがって，$t_1, t_2 \in \mathrm{Sub}(R)$, $t_1 \to r \in R$ 及び $Join$ の定義より $\langle t_1, t_2\rangle \in Join_\infty$ が成り立つ．

(b) $t_1 \xrightarrow{k_1} u \xleftarrow{k_2} t_2$ 中にトップリダクションがないとき．

条件より，$root(t_1) = root(t_2) = root(u)$ かつ $arity(t_1) = arity(t_2)$．このとき，任意の $i \in [1, arity(t_1)]$ について，$t_1|_i \xrightarrow{\leq k_1} u|_i \xleftarrow{\leq k_2} t_2|_i$ をみたし，$t_1, t_2 \in \mathrm{Sub}(R)$ より $t_1|_i, t_2|_i \in \mathrm{Sub}(R)$ と成り立つので，$|t_1|_i| + |t_2|_i| < |t_1| + |t_2|$ に注意すると，帰納法の仮定より $\langle t_1|_i, t_2|_i\rangle \in Join_\infty$ となる．したがって，$t_1, t_2 \in \mathrm{Sub}(R)$, $Join$ の定義より $\langle t_1, t_2\rangle \in Join_\infty$ が成り立つ．□

ここで，$Join_\infty$ は $||R||$ の多項式時間で求めることができるので，$s \downarrow t$ は多項式時間で判定できる [3].

以下では文献 [3] を参考に，安定項と安定可能項について定義する．なお，本論文ではカリー変換とフラット変換を仮定しない一般的な基底項書き換え系に対して適用できるように文献 [3] の定義は一般化されている．

定義 9 (安定項) 項 s が**安定項**とは，任意の $t \in \mathrm{Sub}(R)$ について $\neg(s \xrightarrow{*} t)$ をみたすときをいう．

安定項でない項を**非安定項**とよぶ．s が安定項かつ $s \xrightarrow{*} t$ ならば，t は安定項となることに注意する．項 s が安定項であるかどうかは，すべての $t \in \mathrm{Sub}(R)$ について，$s \xrightarrow{*} t$ を検証すれば十分である．また，補題 6 より $s \xrightarrow{*} t$ が多項式時間で決定可能なので，項 s が安定項であるかどうかは多項式時間で決定可能である．

補題 10

1. s が安定項ならば，すべての $l \to r \in R$ について，$\neg(s \xrightarrow{*} l)$ が成り立つ．
2. $u|_i$ が安定項になる $i \in [1, arity(u)]$ が存在するならば，u も安定項となる．

(証明)

(1) $l \to r \in R$ ならば $l \in \mathrm{Sub}(R)$ より自明．

(2) u が非安定項ならば，任意の $i \in [1, arity(u)]$ について，$u|_i$ は非安定項になることを示す．非安定項の定義より，$u \xrightarrow{*} t$ かつ $t \in \mathrm{Sub}(R)$ となる t が存在する．$u \xrightarrow{*}_{>\lambda} t$ の場合，任意の $i \in [1, arity(u)]$ について，$u|_i \xrightarrow{*} t|_i$ かつ $t|_i \in \mathrm{Sub}(R)$ となるので，$u|_i$ も非安定項となる．次に，$u \xrightarrow{*} t$ はトップリダクションをもつ場合，ある $l \to r \in R$ に対して，$u \xrightarrow{*}_{>\lambda} l \to_\lambda r \xrightarrow{*} t$ となる．このとき，任意の $i \in [1, arity(u)]$ について，$u|_i \xrightarrow{*} l|_i$ かつ $l|_i \in \mathrm{Sub}(R)$ となるため，$u|_i$ は非安定項となる． $\square$

s が安定項のとき，上記補題より $s \xrightarrow{*} t$ ならば $s \xrightarrow{*}_{>\lambda} t$ となることに注意する．

定義 11 (安定可能項) 項 s が**安定可能項**とは，$s \xrightarrow{*} t$ をみたす安定項 t が存在するときをいう．

安定可能項でない項を**安定不能項**とよぶ．このとき，以下の性質は定義から明らかである．

1. t が安定可能項かつ $s \xrightarrow{*} t$ ならば s は安定可能項.
2. s が安定不能項かつ $s \xrightarrow{*} t$ ならば t は安定不能項.
3. s が安定不能項ならば $s \xrightarrow{*} t$ をみたす $t \in \mathrm{Sub}(R)$ が存在する．

例 12 (安定項，安定可能項)

$$R \begin{cases} A \to F(B,B) \\ B \to F(A,A) \\ F(A,B) \to A \\ F(A,B) \to C \end{cases}$$

- $F(F(A,A),F(A,A))$ は，安定項である．
- $F(B,B)$ は，非安定項であるが，安定可能項である．
- A は，非安定項であるが，安定可能項である．
- C は，安定項に書き換えられないので，安定不能項である．

次に，$s \in \mathrm{Sub}(R)$ の場合，以下の集合 ST_∞ を求めることにより s が安定可能項かどうかを決定できることを示す．

定義 13 (項の集合 ST_∞) 項の集合 $ST_0, ST_1, \ldots$ を以下のように定義する．

$$\begin{array}{rcl} ST_0 & = & \{s \mid s \in \mathrm{Sub}(R) \land s \overset{Arg}{\rightarrowtriangle} t \land t \text{ は安定項 }\} \\ ST_{i+1} & = & ST_i \cup \{s \mid s \in \mathrm{Sub}(R) \land \exists t \in ST_i.\ s \xrightarrow{*} t\} \\ & & \cup \{f(s_1,\ldots,s_n) \mid f(s_1,\ldots,s_n) \in \mathrm{Sub}(R) \land \exists t \in ST_i.\ \exists j \in [1,n].\ s_j \xrightarrow{*} t\} \end{array}$$

このとき，項の集合 ST_∞ を $ST_\infty = \bigcup_i ST_i$ と定義する．

補題 14 $s \in \mathrm{Sub}(R)$ について，$s \in ST_\infty \Leftrightarrow s$ が安定可能項．

(証明)

($\Rightarrow$) $s \in ST_k$ ならば，s は安定可能項となることを k に関する帰納法で示す．

(B.S.) $k = 0$ のとき，定義より自明．

(I.S.) $s \in ST_{k+1}$ を仮定すると，ST の定義より以下のように場合分けできる．

(a) $s \xrightarrow{*} t$ をみたす $t \in ST_k$ が存在するとき．

帰納法の仮定より t が安定可能項なので，定義から $t \xrightarrow{*} \tilde{t}$ をみたす安定項 $\tilde{t}$ が存在する．したがって，$s \xrightarrow{*} t \xrightarrow{*} \tilde{t}$ となり，s は安定可能項となる．

(b) $s = f(s_1,\ldots,s_n)$ かつ，ある $j \in [1,n]$ に対して $s|_j \xrightarrow{*} t$ をみたす $t \in ST_k$ が存在するとき．

帰納法の仮定より t が安定可能項なので，定義から $t \xrightarrow{*} \tilde{t}$ をみたす安定項 $\tilde{t}$ が存在し，$s \xrightarrow{*}_{\geq j} s[t]_j \xrightarrow{*} s[\tilde{t}]_j$ となる．また，$\tilde{t}$ が安定項なので，補題 10 より $s[\tilde{t}]_j$ も安定項となる．したがって，s は安定可能項となる．

(c) $s \in ST_k$ のとき．

帰納法の仮定より自明．

($\Leftarrow$) 以下の命題を示せば十分である．

$\forall k.\ \forall s \in \mathrm{Sub}(R).\ [\exists \tilde{s}\ [\tilde{s}\text{が安定項} \land |\tilde{s}| \leq k \land s \xrightarrow{*} \tilde{s}] \ \Rightarrow\ s \in ST_\infty]$

k に関する帰納法で示す．

(B.S.) $k = 0$ のとき，$\tilde{s}$ が存在しないので自明．

(I.S.) 最初に $s \xrightarrow{*} \tilde{s}$ がトップリダクションを持たない場合を考える．このとき，$s = f(s_1,\ldots,s_n)$，$\tilde{s} = f(\tilde{s}_1,\ldots,\tilde{s}_n)$ とおくと，すべての $i \in [1,n]$ について，$s_i \xrightarrow{*} \tilde{s}_i$ が成り立つ．以下のように場合分けをする．

(a) すべての $i \in [1,n]$ について，$\tilde{s_i}$ が非安定項のとき．

定義より，各 $i \in [1,n]$ について，$\tilde{s_i} \xrightarrow{*} t_i$ をみたす $t_i \in \mathrm{Sub}(R)$ が存在し，$s \xrightarrow{*}_{>\lambda} \tilde{s} \xrightarrow{*}_{>\lambda} f(t_1,\ldots,t_n)$ となる．このとき，$\tilde{s}$ が安定項なので $f(t_1,\ldots,t_n)$ も安定項となる．ここで，各 $i \in [1,n]$ について，$s_i, t_i \in \mathrm{Sub}(R)$ かつ $R = \mathrm{closure}(R)$ より，$s_i \to t_i \in R$ が成り立つ．よって，$s = f(s_1,\ldots,s_n) \overset{Arg}{\rightarrowtriangle} f(t_1,\ldots,t_n)$ となるので，ST の定義より $s \in ST_0$．

(b) ある $i \in [1,n]$ について，$\tilde{s_i}$ が安定項のとき．

$s_i \xrightarrow{*} \tilde{s}_i$，$|\tilde{s}_i| < |\tilde{s}| \leq k$ なので，帰納法の仮定より $s_i \in ST_\infty$．したがって，ST の定義より $s \in ST_\infty$．

次に，$s \xrightarrow{*}_R \tilde{s}$ がトップリダクションを持つ場合を考える．ある $l \to r \in R$ に対して，$s \xrightarrow{*} l \to_\lambda r \xrightarrow{*}_{>\lambda} \tilde{s}$ となる．$r \xrightarrow{*}_{>\lambda} \tilde{s}$ はトップリダクションを持たず，$r \in \mathrm{Sub}(R)$ であるから，前述の議論と同様に $r \in ST_\infty$．よって，ST の定義より $s \in ST_\infty$． □

ここで，ST_∞ は $||R||$ の多項式時間で求めることができるので，任意の $s \in \mathrm{Sub}(R)$ が安定可能項かどうかは多項式時間で判定できる [3]．

4　基底項書き換え系の合流性の必要条件

本節では文献 [3] を参考にして，基底項書き換え系の合流性判定に必要となる C-condition について説明する．ただし，前節と同様に本論文ではカリー変換とフラット変換を仮定していないので，一般的な基底項書き換え系に対して適用可能となるように文献 [3] 中の集合 $Left, Right$ をまとめて $Subtop$ とし，前節の安定項と安定可能項の定義の変更に基づいて定義を与えている．まず，文献 [3] と同様に，C-condition の判定に必要となる項の集合 $Topsteps(s)$ と $Subtop(s)$ を定義する．

定義 15 (項の集合 $Topsteps(s)$，$Subtop(s)$)　$s \in \mathrm{Sub}(R)$ に対して以下のような項の集合を定義する．

$Topsteps(s) = \{t \mid s \rightarrow_{\lambda} \overset{Arg}{\rightarrow\!\!\triangleright} t\}$
$Subtop(s) = \{f(t_1, \ldots, t_n) \mid f(t_1, \ldots, t_n) \in Topsteps(s) \wedge \exists i \in [1, n].\ t_i$が安定可能項 $\}$

ここで，$s \in Sub(R)$ について，以下が成立することに注意する．

1. $s \in Topsteps(s)$.
2. $s \xrightarrow{*} s' \in Sub(R)$ ならば $s' \in Topsteps(s)$.
3. $u \in Topsteps(s)$ ならば任意の $i \in [1, arity(u)]$ について $u|_i \in Sub(R)$.

定義 16 (C-condition(s),C-condition(R))　項 $s \in \mathrm{Sub}(R)$ が以下の条件 1–4 を満たすとき，項 s は **C-condition** をみたすといい，C-condition(s) と記す．

1. $\forall t, t' \in Topsteps(s).\ t \downarrow t'$
2. $\forall u_1, u_2 \in Subtop(s).\ [root(u_1) = root(u_2) \wedge u_1 \downarrow_{>\lambda} u_2]$
3. $Subtop(s) \neq \emptyset \ \Rightarrow\ \forall t \in Topsteps(s).\ \exists u \in Subtop(s).\ (t \xrightarrow{*} u)$
4. $Subtop(s) \neq \emptyset \ \Rightarrow\ \exists f.\ \forall l, r \in Subtop(s).\ [l = f(l_1, \ldots, l_n) \wedge r = f(r_1, \ldots, r_n)$
$\wedge \forall i \in [1, n].\ [l_i$が安定可能項 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r_i}$が安定可能項$]]$

また，すべての項 $s \in \mathrm{Sub}(R)$ が C-condition をみたすとき，R は C-condition をみたすといい，C-condition(R) と記す．

上記の C-condition の条件 1，2，3 は文献 [3] と同様な条件である．しかし，安定可能項の定義を変更しているので，条件 4 は文献 [3] より一般的な条件に修正してある．

補題 17　C-condition(R) は多項式時間で決定可能．

(証明)
項が $Topsteps, Subtop$ に属しているか否かは，定義より多項式時間で決定可能．以下では，ある項 $s \in \mathrm{Sub}(R)$ について，C-condition(s) の各条件が多項式時間で決定可能であることを示す．
条件 1，条件 2．補題 8 より，多項式時間で決定可能．
条件 3．補題 6 より，多項式時間で決定可能．
条件 4．$Subtop$ の性質より，任意の項 $u \in Subtop(s)$ について，すべての $i \in [1, arity(u)]$ で，$u|_i \in \mathrm{Sub}(R)$ となるので，補題 14 より多項式時間で決定可能．□

補題 18　GTRS R が合流するならば C-condition(R) が成り立つ．

(証明)

R が合流するならば，任意の項 $s \in \mathrm{Sub}(R)$ について，C-condition(s) の各条件が成立することを示す．

条件 1．自明．

条件 2．$u_1, u_2 \in \mathit{Subtop}(s)$ を仮定する．Subtop の定義より，ある $i \in [1, \mathit{arity}(u_1)]$，$j \in [1, \mathit{arity}(u_2)]$ について，$u_1|_i, u_2|_j$ は安定可能項なので，$u_1|_i \xrightarrow{*} \tilde{u}_1$，$u_2|_j \xrightarrow{*} \tilde{u}_2$ をみたす安定項 $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ が存在する．また，R は合流するので，$u_1 \xrightarrow{*}_{\geq i} u_1[\tilde{u}_1]_i \downarrow u_2[\tilde{u}_2]_j \xleftarrow{*}_{\geq j} u_2$ となる．このとき，$\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ が安定項なので補題 10 より $u_1[\tilde{u}_1]_i, u_2[\tilde{u}_2]_j$ は安定項となり，トップリダクションできない．したがって，$u_1[\tilde{u}_1]_i \downarrow_{>\lambda} u_2[\tilde{u}_2]_j$ となるので，$\mathit{root}(u_1) = \mathit{root}(u_2)$ かつ $u_1 \downarrow_{>\lambda} u_2$ が成り立つ．

条件 3．$t \in \mathit{Topsteps}(s)$ を仮定する．また，$\mathit{Subtop}(s) \neq \emptyset$ よりある $u' \in \mathit{Subtop}(s)$ が存在する．Subtop の定義より，ある位置 $i \in [1, \mathit{arity}(u')]$ について，$u'|_i$ が安定可能項なので，$u'|_i \xrightarrow{*} \tilde{u}$ をみたす安定項 $\tilde{u}$ が存在する．また，R は合流するので，$t \xrightarrow{*} v \xleftarrow{*} u'[\tilde{u}]_i \xleftarrow{*}_{\geq i} u'$ となる．ここで，$\tilde{u}$ は安定項なので補題 10 より，$u'[\tilde{u}]_i$ も安定項となり，$u'[\tilde{u}]_i \xrightarrow{*}_{>\lambda} v$ とでき，$\tilde{u} \xrightarrow{*} v|_i$ より $\tilde{u}$ が安定項なので，$v|_i$ は安定項となる．最初に，$t \xrightarrow{*} v$ 中にトップリダクションがない場合を考える．このとき，$t|_i \xrightarrow{*} v|_i$ より，$t|_i$ は安定可能項．ゆえに，$t \in \mathit{Subtop}(s)$．次に，$t \xrightarrow{*} v$ 中にトップリダクションがある場合を考える．このとき，ある $l \to u \in R$ に対して，$t \xrightarrow{*} l \to_\lambda u \xrightarrow{*}_{>\lambda} v$ が存在し，$v|_i$ が安定項なので安定可能項の定義より $u|_i$ は安定可能項となる．また，$s \xrightarrow{*} u$ かつ $s, u \in \mathrm{Sub}(R)$ より $s \to u \in R$ なので $u \in \mathit{Topsteps}(s)$ となる．したがって，$u \in \mathit{Topsteps}(s)$ かつ $u|_i$ が安定可能項であることより $t \xrightarrow{*} u \in \mathit{Subtop}(s)$ となる．

条件 4．すでに条件 2 が成立することは示されているので，任意の $u, v \in \mathit{Subtop}(s)$ に対して，$\mathit{root}(u) = \mathit{root}(v)$ は成立する．ここで，$u = f(u_1, \ldots, u_n)$，$v = f(v_1, \ldots, v_n)$ とおく．このとき，定義より $u_1, \ldots, u_n$ のうち少なくとも 1 つが安定可能項なので，u_p が安定可能項である $p \in [1, n]$ について，$u_p \xrightarrow{*} \tilde{u}_p$ をみたす安定項 $\tilde{u}_p$ が存在する．また，項 v も同様に，$v_1, \ldots, v_n$ のうち少なくとも 1 つが安定可能項なので，v_q が安定可能項である $q \in [1, n]$ について，$v_q \xrightarrow{*} \tilde{v}_q$ をみたす安定項 $\tilde{v}_q$ が存在する．ここで，u, v の各安定可能項 u_p, v_q を安定項 $\tilde{u}_p, \tilde{v}_q$ に書き換えた項をそれぞれ $\tilde{u}, \tilde{v}$ とおくと，R は合流するので，$u \xrightarrow{*}_{>\lambda} \tilde{u} \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} \tilde{v} \xleftarrow{*}_{>\lambda} v$ をみたす項 w が存在する．ここで，補題 10 より，$\tilde{u}, \tilde{v}$ は安定項なので，$\tilde{u} \xrightarrow{*}_{>\lambda} w \xleftarrow{*}_{>\lambda} \tilde{v}$．よって，$w = f(w_1, \ldots, w_n)$ となり，任意の $i \in [1, n]$ について $u_i \xrightarrow{*} \tilde{u}|_i \xrightarrow{*} w_i \xleftarrow{*} \tilde{v}|_i \xleftarrow{*} v_i$．最初に $\tilde{u}|_i$ が安定項の場合を考える．このとき，定義より u_i が安定可能項，w_i が安定項となる．ここで，w_i が安定項なので，$v_i \xrightarrow{*} w_i$ より v_i は安定可能項となる．したがって，u_i が安定可能項であるとき，v_i も安定可能項となる． 次に，$\tilde{v}|_i$ が安定項のときも同様にすると，v_i が安定可能項であるとき，u_i も安定可能項となる．したがって，u_i が安定可能項 $\Leftrightarrow$ v_i が安定可能項となる． □

GTRS R が C-condition をみたさないとき非合流と判定できるので，**以降では GTRS R は C-condition をみたすものとする．** なお，R が C-condition をみたすとき，安定可能項について以下のような性質がいえる．

補題 19　安定可能項 $s \in \mathit{Sub}(R)$ について，$s \xrightarrow{*} s'$ ならば s' は安定可能項．

(証明)

背理法で示す．s が安定可能項で $s \xrightarrow{*} s'$ をみたす安定不能項 s' が存在すると仮定する．s' は安定不能項なので，安定不能項の性質より，$s' \xrightarrow{*} w$ をみたす安定不能項 $w \in \mathrm{Sub}(R)$ が存在する．また，$s \xrightarrow{*} w$ かつ $s, w \in \mathrm{Sub}(R)$ より $s \to w \in R$ となるので，定義から $w \in \mathit{Topsteps}(s)$．ここで，以下のように場合分けをする．

(1) $\mathit{Subtop}(s) = \emptyset$ のとき．

$s \in \mathrm{Sub}(R)$ と補題 5 に注意すると，s が安定可能項より $s \to_\lambda t \xrightarrow{*}_{>\lambda} \tilde{s}$ をみたす安定項 $\tilde{s}$ と $t \in Topsteps(s)$ が存在する．また，条件より $t \notin Subtop(s)$ となることから，すべての $i \in [1, arity(t)]$ について，$t|_i$ が安定不能項なので $t|_i \xrightarrow{*} \tilde{s}|_i$ より $\tilde{s}|_i$ は安定不能項となり，定義より $\tilde{s}|_i \xrightarrow{*} \tilde{u}_i$ をみたす $\tilde{u}_i \in \mathrm{Sub}(R)$ が存在し，$t_i, \tilde{u}_i \in Sub(R)$ から $t|_i \to \tilde{u}|_i \in R$ が成り立つ．ここで，$f = root(t)$，$n = arity(t)$ とおくと，$f(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n) \in Topsteps(s)$ をみたすので，C-condition(s) の条件 1 より，$w \xrightarrow{*} v \xleftarrow{*} f(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n)$ が成り立つ．このとき，$\tilde{s} \xrightarrow{*} f(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n) \xrightarrow{*} v$ かつ $\tilde{s}$ が安定項なので，v も安定項となる．したがって，$w \xrightarrow{*} v$ より w が安定可能項となり矛盾．

(2) $Subtop(s) \neq \emptyset$ のとき．

C-condition(s) をみたすので条件 3 より，$w \xrightarrow{*} u$ をみたす $u \in Subtop(s)$ が存在する．また，$Subtop$ の定義より，ある $i \in [1, arity(u)]$ について，$u|_i$ が安定可能項なので，$u|_i \xrightarrow{*} \tilde{u}$ をみたす安定項 $\tilde{u}$ と書き換え列 $u \xrightarrow{*}_{\geq i} u[\tilde{u}]_i$ が存在する．ここで，補題 10 より $u[\tilde{u}]_i$ は安定項となる．したがって，$w \xrightarrow{*} u \xrightarrow{*} u[\tilde{u}]_i$ より，w が安定可能項となり矛盾． □

上記の補題から $s \in \mathrm{Sub}(R)$ に対して，以下のことも成り立つことに注意する．

1. $s \xrightarrow{*} t$ ならば，s が安定可能項 $\Leftrightarrow$ t が安定可能項.
2. s が安定可能項，項 t が安定不能項ならば，$s \not\downarrow t$.

5　基底項書き換え系の合流性判定

本節では文献 [3] を参考にして，基底項書き換え系の多項式時間合流性判定法を説明し，その正当性の証明を与える．ただし，本論文ではカリー変換とフラット変換を仮定していないので，文献 [3] の正当性の証明をそのままもちいることはできない．そこで，項の安定度と強安定項という新しい概念を導入することにより，一般的な基底項書き換え系に対しても正当性が証明できるように修正を行う．最初に，強交差性の定義とその必要条件について説明する．

定義 20 (強交差性)　項 s, t が強交差するとは，$s \xrightarrow{*} s'$，$t \xrightarrow{*} t'$ をみたす任意の s', t' が $s' \downarrow t'$ となることである．s, t が強交差するとき，$s \downarrow_D t$ と記す.

ここで，$\neg(s \downarrow_D t)$ を $s \not\downarrow_D t$ と表す.

定義 21 (DJ-condition(s_1, s_2))　$s_1, s_2 \in \mathrm{Sub}(R)$ に対して以下の条件 1–3 が成り立つとき，**DJ-condition** をみたすといい，DJ-condition(s_1, s_2) と記す.

1. $\forall t \in Topsteps(s_1).\ \forall t' \in Topsteps(s_2).\ t \downarrow t'$
2. $Subtop(s_1) = \emptyset \ \Leftrightarrow \ Subtop(s_2) = \emptyset$
3. $\forall u_1 \in Subtop(s_1).\ \forall u_2 \in Subtop(s_2).\ [root(u_1) = root(u_2) \wedge u_1 \downarrow_{>\lambda} u_2]$

上記の DJ-condition は文献 [3] と同様な条件である．

補題 22　$s_1, s_2 \in \mathrm{Sub}(R)$ に対して DJ-condition(s_1, s_2) は多項式時間で決定可能.

(証明)
補題 17 と同様. □

補題 23　$s_1, s_2 \in \mathrm{Sub}(R)$ に対して $s_1 \downarrow_D s_2$ ならば DJ-condition(s_1, s_2) が成り立つ．

(証明)

$s_1 \downarrow_D s_2$ をみたす $s_1, s_2 \in \mathrm{Sub}(R)$ に対して，DJ-condition(s_1, s_2) の各条件が成立することを示す.

条件 1．自明.

条件 2．$u_1 \in \mathit{Subtop}(s_1)$ を仮定して，対偶により示す．Subtop の定義より，ある $i \in [1, \mathit{arity}(u_1)]$ が存在して，$u_1|_i$ が安定可能項となる．このような i について，$u_1|_i \xrightarrow{*} \tilde{u}_1$ をみたす安定項 $\tilde{u}_1$ が存在する．また，$s_1 \downarrow_D s_2$ なので，$u_1 \xrightarrow{*}_{\geq i} u_1[\tilde{u}_1]_i \xrightarrow{*} v \xleftarrow{*} s_2$ をみたす書き換え列が存在する．ここで，補題 10 より，$u_1[\tilde{u}_1]_i$ は安定項となり，$u_1[\tilde{u}_1]_i \xrightarrow{*}_{>\lambda} v$ とできる．よって，$\tilde{u}_1 \xrightarrow{*} v|_i$ かつ $\tilde{u}_1$ が安定項なので，$v|_i$ は安定項となる．次に，$s_2 \in \mathrm{Sub}(R)$ なので，補題 5 より $s_2 \to_\lambda \hat{s} \xrightarrow{*}_{>\lambda} v$ が存在する．このとき，$\hat{s}|_i \xrightarrow{*} v|_i$ かつ $v|_i$ が安定項なので，$\hat{s}|_i$ は安定可能項となる．また，$\hat{s} \in \mathit{Topsteps}(s_2)$ なので，$\hat{s} \in \mathit{Subtop}(s_2)$．したがって，$\mathit{Subtop}(s_2) \neq \emptyset$.

条件 3．$u_1 \in \mathit{Subtop}(s_1), u_2 \in \mathit{Subtop}(s_2)$ を仮定する．Subtop の定義より，ある $i \in [1, \mathit{arity}(u_1)]$, $j \in [1, \mathit{arity}(u_2)]$ が存在して，$u_1|_i, u_2|_j$ は安定可能項なので，$u_1|_i \xrightarrow{*} \tilde{u}_1$，$u_2|_j \xrightarrow{*} \tilde{u}_2$ をみたす安定項 $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ が存在する．また，$s_1 \downarrow_D s_2$ なので，$u_1 \xrightarrow{*}_{\geq i} u_1[\tilde{u}_1]_i \downarrow u_2[\tilde{u}_2]_j \xleftarrow{*}_{\geq j} u_2$ となる．このとき，$\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ が安定項なので補題 10 より，$u_1[\tilde{u}_1]_i, u_2[\tilde{u}_2]_i$ も安定項となり，トップリダクションできない．したがって，$u_1[\tilde{u}_1]_i \downarrow_{>\lambda} u_2[\tilde{u}_2]_j$ なので，$\mathit{root}(u_1) = \mathit{root}(u_2)$ かつ $u_1 \downarrow_{>\lambda} u_2$ が成り立つ． □

次に，合流性判定法の正当性の証明に必要となる補題を示す.

補題 24 $s_1, s_2 \in \mathrm{Sub}(R)$ について，ある $i \in [1, n]$ で $u_i \not\downarrow_D v_i$ をみたす $f(u_1, \ldots, u_n) \in \mathit{Subtop}(s_1)$ と $f(v_1, \ldots, v_n) \in \mathit{Subtop}(s_2)$ が存在するならば，$s_1 \not\downarrow_D s_2$ が成り立つ.

(証明)

$u = f(u_1, \ldots, u_n) \in \mathit{Subtop}(s_1)$，$v = f(v_1, \ldots, v_n) \in \mathit{Subtop}(s_2)$，ある $i \in [1, n]$ について $u_i \not\downarrow_D v_i$ をみたす u, v を仮定する．また，$u_i \not\downarrow_D v_i$ より，$u_i \xrightarrow{*} u'$，$v_i \xrightarrow{*} v'$，$u' \not\downarrow v'$ をみたす項 u', v' が存在する．このとき，以下のように場合分けをする.

(a)u_i, v_i が安定不能項のとき.

$u_i \xrightarrow{*} u'$，$v_i \xrightarrow{*} v'$ より，u', v' も安定不能項となる．よって，$u' \xrightarrow{*} \tilde{u}$，$v' \xrightarrow{*} \tilde{v}$ をみたす $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathrm{Sub}(R)$ が存在する．また，$u' \not\downarrow v'$ なので，$\tilde{u} \not\downarrow \tilde{v}$ となる．ここで，$u_i, v_i, \tilde{u}, \tilde{v} \in \mathrm{Sub}(R)$ より $u_i \to \tilde{u}, v_i \to \tilde{v} \in R$ なので，$u[\tilde{u}]_i \in \mathit{Topsteps}(s_1)$，$v[\tilde{v}]_i \in \mathit{Topsteps}(s_2)$ となる．また，$u, v \in \mathit{Subtop}(s)$ より，$p \neq i$，$q \neq i$ なる p, q が存在して，$u|_p, v|_q$ は安定可能項となる．よって，$u[\tilde{u}]_i|_p = u_p$，$v[\tilde{v}]_i|_q = v_q$ となるので，$u[\tilde{u}]_i \in \mathit{Subtop}(s_1)$，$v[\tilde{v}]_i \in \mathit{Subtop}(s_2)$ となる．したがって，DJ-condition(s_1, s_2) の条件 3 をみたさないので，補題 23 の対偶から，$s_1 \not\downarrow_D s_2$.

(b)u_i, v_i が安定可能項のとき.

Subtop の定義より，$u_i, v_i \in \mathrm{Sub}(R)$ なので，補題 19 より u', v' は安定可能項となり，$u' \xrightarrow{*} \tilde{u}$, $v' \xrightarrow{*} \tilde{v}$ をみたす安定項 $\tilde{u}, \tilde{v}$ が存在する．また，$u' \not\downarrow v'$ より，$\tilde{u} \not\downarrow \tilde{v}$ となる．ここで，$\tilde{u}, \tilde{v}$ が安定項なので補題 10 より，$u[\tilde{u}]_i, v[\tilde{v}]_i$ は安定項となる．よって，$\tilde{u} \not\downarrow \tilde{v}$ より，$u[\tilde{u}]_i \not\downarrow v[\tilde{v}]_i$ となる．したがって，$s_1 \xrightarrow{*} u \xrightarrow{*} u[u']_i \xrightarrow{*} u[\tilde{u}]_i \not\downarrow v[\tilde{v}]_i \xleftarrow{*} v[v']_i \xleftarrow{*} v \xleftarrow{*} s_2$ をみたすので，$s_1 \not\downarrow_D s_2$.

(c) u_i, v_i の一方のみが 安定可能項 のとき.

一般性を失うことなく，u_i を安定可能項，v_i を安定不能項とする．このとき，補題 19 より，$u_i \not\downarrow v_i$ なので，DJ-condition(s_1, s_2) の条件 3 をみたさない．したがって，補題 23 の対偶から，$s_1 \not\downarrow_D s_2$.
□

補題 25 $s_1, s_2 \in \mathrm{Sub}(R)$ が，DJ-condition(s_1, s_2) をみたすとき，$\mathit{Subtop}(s_1) = \mathit{Subtop}(s_2) = \emptyset$ ならば $s_1 \downarrow_D s_2$ が成り立つ.

(証明)

$s_1, s_2 \in \mathrm{Sub}(R)$ について，DJ-condition(s_1, s_2) が成り立ち，$\mathit{Subtop}(s_1) = \mathit{Subtop}(s_2) = \emptyset$ となることを仮定する．このとき，$j = 1, 2$ に対して，$s_j \xrightarrow{*} s'_j$ をみたす任意の項 s'_j について，$s'_j \xrightarrow{*} s''_j$ をみたす $s''_j \in \mathit{Topsteps}(s_j)$ が存在することを示せば，DJ-condition(s_1, s_2) の条件 1 より，$s''_1 \downarrow s''_2$ となるため，$s_1 \downarrow_D s_2$ がいえる．したがって，$j = 1$ のときのみを示せば十分である．$n = \mathit{arity}(s'_1)$，$f = \mathit{root}(s'_1)$ とおく．$s'_1 \in \mathit{Topsteps}(s_1)$ のときは自明なので，$s'_1 \notin \mathit{Topsteps}(s_1)$ のときを示す．$s_1 \in \mathrm{Sub}(R)$ と補題 5 より，書き換え列 $s_1 \to_\lambda \hat{s}_1 \xrightarrow{*}_{>\lambda} s'_1$ が存在する．また，$\hat{s}_1 \in \mathit{Topsteps}(s_1)$ も成り立つ．ここで，$\mathit{Subtop}(s_1) = \emptyset$ なので $\hat{s}_1 \notin \mathit{Subtop}(s_1)$ となり，Subtop の定義から，すべての $i \in [1, n]$ について，$\hat{s}_1|_i$ は安定不能項なので，$s'_1|_i$ も安定不能項．したがって，すべての $i \in [1, n]$ について $s'_1|_i \xrightarrow{*} t_i$ をみたす項 $t_i \in \mathrm{Sub}(R)$ と $s'_1 \xrightarrow{*} f(t_1, \ldots, t_n)$ という書き換え列が存在し，$\hat{s}_1|_i, t_i \in \mathrm{Sub}(R)$ かつ $\hat{s}_1|_i \xrightarrow{*} s'_1|_i \xrightarrow{*} t_i$ より，$\hat{s}_1|_i \to t_i \in R$ となる．よって，$s_1 \to_\lambda \hat{s}_1 \overset{Arg}{\rhd} f(t_1, \ldots, t_n)$ となるので，$f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathit{Topsteps}(s_1)$ となる．したがって，$s''_1 = f(t_1, \ldots, t_n)$ ととればよい．
□

以下では，強交差性を利用した合流条件を文献 [3] と同様に与える．

補題 26　R が合流する $\Leftrightarrow$ 任意の $t \in \mathrm{Sub}(R)$ について $t \downarrow_D t$.

(証明)

($\Rightarrow$) 自明.

($\Leftarrow$) $\forall s, t_1, t_2.\ [s \xrightarrow{*} t_1 \wedge s \xrightarrow{*} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2]$ を $|s|$ に関する帰納法で示す.

(B.S.) $|s| = 1$ のとき.

(a) s が正規形のとき.

自明.

(b) (a) 以外のとき.

R は GTRS なので $s \to r \in R$ が存在する．したがって，$s \in \mathrm{Sub}(R)$ となり，仮定より $s \downarrow_D s$ が成り立つ.

(I.S.) $s = f(s_1, \ldots, s_n)$ と仮定する．以下のように場合分けをする

(a) $s \in \mathrm{Sub}(R)$ のとき.

自明.

(b) $s \notin \mathrm{Sub}(R)$ のとき，$t_1 \xleftarrow{*} s \xrightarrow{*} t_2$ という書き換え列を仮定し，以下のように場合分けをする.

(b-1)$s \xrightarrow{*}_{>\lambda} t_i (i = 1, 2)$ のとき.

$t_1 \xleftarrow{*} s \xrightarrow{*} t_2$ 中にトップリダクションがないので，$\mathit{root}(t_1) = \mathit{root}(t_2)$ となり，$n = \mathit{arity}(t_1) = \mathit{arity}(t_2)$ とおける．よって，すべての $i \in [1, n]$ について，$|s_i| < |s|$ に注意すると帰納法の仮定より，$t_1|_i \xrightarrow{*} p_i \xleftarrow{*} t_2|_i$ をみたす項 $p_1, \ldots, p_n$ が存在する．したがって，$t_1 \xrightarrow{*} f(p_1, \ldots, p_n) \xleftarrow{*} t_2$ なので，$t_1 \downarrow t_2$.

(b-2)$s \xrightarrow{*} t_i (i = 1, 2)$ 中のそれぞれにトップリダクションが存在するとき.

このとき，$i = 1, 2$ に対して，$s \xrightarrow{*}_{>\lambda} s'_i \to_\lambda r_i \xrightarrow{*} t_i$ となる．$s'_1 \xleftarrow{*} s \xrightarrow{*} s'_2$ 中にトップリダクションがないので，$f = \mathit{root}(s'_1) = \mathit{root}(s'_2)$，$n = \mathit{arity}(s'_1) = \mathit{arity}(s'_2)$ とおける. また，すべての $j \in [1, n]$ について，$|s_j| < |s|$ に注意すると帰納法の仮定より，$s'_1|_j \xrightarrow{*} p_j \xleftarrow{*} s'_2|_j$ をみたす項 $p_1, \ldots, p_n$ が存在する．ここで，$p = f(p_1, \ldots, p_n)$ とおくと，$p \xleftarrow{*} s'_1 \to r_1 \xrightarrow{*} t_1$ となり，$s'_1 \in \mathrm{Sub}(R)$ に注意すると仮定より $t_1 \xrightarrow{*} t' \xleftarrow{*} f(p_1, \ldots, p_n)$ をみたす t' が存在する．同様に，$t' \xleftarrow{*} p \xleftarrow{*} s'_2 \to r_2 \xrightarrow{*} t_2$ から，$s'_2 \in \mathit{Sub}(R)$ に注意すると仮定より $t' \xrightarrow{*} t'' \xleftarrow{*} t_2$ をみたす t'' が存在する．したがって，$t_1 \xrightarrow{*} t' \xrightarrow{*} t'' \xleftarrow{*} t_2$ なので $t_1 \downarrow t_2$(図 3).

(b-3)$s \xrightarrow{*} t_i (i = 1, 2)$ 中の一方のみにトップリダクションが存在するとき.

一般性を失うことなく，$s \xrightarrow{*} t_1$ にトップリダクションが存在すると仮定する．このとき，$s \xrightarrow{*}_{>\lambda} s' \to_\lambda r \xrightarrow{*} t_1$ となる．$s'_1 \xleftarrow{*} s \xrightarrow{*} t_2$ 中にトップリダクションがないので，$f = root(s'_1) = root(t_2)$，$n = arity(s'_1) = arity(t_2)$ とおける. また，すべての $j \in [1,n]$ について，$|s_j| < |s|$ に注意すると帰納法の仮定より，$s'|_j \xrightarrow{*} p_j \xleftarrow{*} t_2|_j$ をみたす $p_1, \dots, p_n$ が存在する．ここで，$p = f(p_1, \dots, p_n)$ とおくと，$t_1 \xleftarrow{*} r \leftarrow s'_1 \xrightarrow{*} p$ となり，$s'_1 \in \mathrm{Sub}(R)$ に注意すると仮定より $t_1 \xrightarrow{*} t' \xleftarrow{*} p$ をみたす t' が存在する．したがって，$t_1 \xrightarrow{*} t' \xleftarrow{*} p \xleftarrow{*} t_2$ なので $t_1 \downarrow t_2$(図 4). □

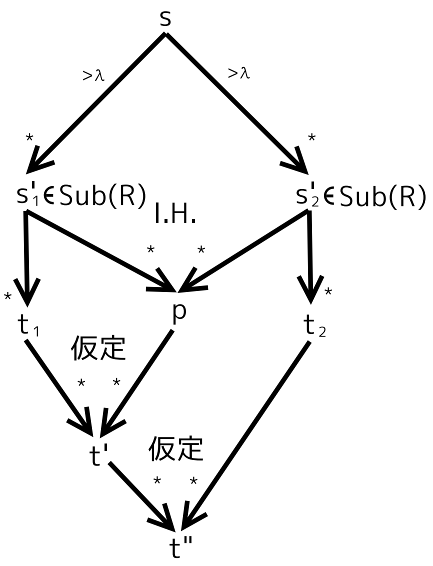

図 **3.** (b-2) の図解

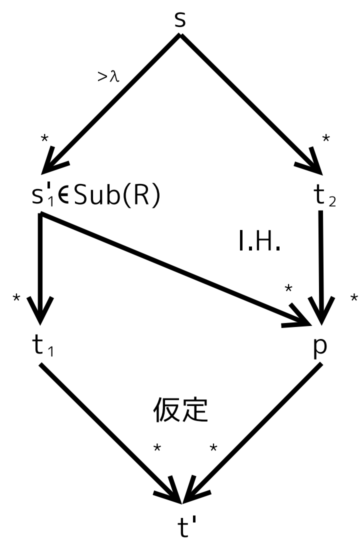

図 **4.** (b-3) の図解

以下では，集合 NDJ_∞ をもちいることにより，$s_1, s_2 \in Sub(R)$ に対して $s_1 \downarrow_D s_2$ が決定できることを示す.

定義 27 (項対の集合 NDJ_∞) 項対の集合 $NDJ_0, NDJ_1, \dots$ を以下のように定義する．

$$\begin{array}{lcl} NDJ_0 & = & \{(s,s') \mid s, s' \in \mathrm{Sub}(R) \wedge \neg \mathit{DJ\text{-}condition}(s,s')\} \\ NDJ_{i+1} & = & NDJ_i \cup \{(s,s') \mid s, s' \in \mathrm{Sub}(R) \wedge u = f(u_1, \dots, u_n) \in Subtop(s) \\ & & \qquad \wedge v = f(v_1, \dots, v_n) \in Subtop(s') \wedge \exists j \in [1,n].\ (u_j, v_j) \in NDJ_i\} \end{array}$$

このとき，項対の集合 NDJ_∞ を $NDJ_\infty = \bigcup_i NDJ_i$ と定義する．

以下では，命題 $\forall s_1, s_2 \in \mathrm{Sub}(R).\ [(s_1, s_2) \in NDJ_\infty \iff s_1 \not\downarrow_D s_2]$ を証明するために，安定度と強安定項という概念を新たに導入する．この概念をもちいることによって，カリー変換やフラット変換を仮定しない一般的な基底項書き換え系に対して証明を与えることが可能となる．

定義 28 (安定度) 項 s の**安定度** $sdep(s)$ を次のように定める．

$$sdep(s) = \begin{cases} 0 & s \text{ が非安定項の場合} \\ 1 + max\{sdep(s_i) \mid 1 \leq i \leq n\} & s = f(s_1, \dots, s_n) \text{ が安定項の場合} \end{cases}$$

定義 29 (強安定項) 項 $s = f(s_1, \dots, s_n)$ が**強安定項**とは，$s_1, \dots, s_n$ の少なくとも 1 つが安定項のときをいう．

補題 10 より，s が強安定項ならば s は安定項になることに注意する．

補題 30 $s_1, s_2 \in \mathrm{Sub}(R)$ に対して，$(s_1, s_2) \in NDJ_\infty \iff s_1 \not\downarrow_D s_2$.

(証明)

($\Rightarrow$) $(s_1, s_2) \in NDJ_k$ を仮定して k に関する帰納法で示す．

(B.S.) DJ-condition(s_1, s_2) をみたさないので，補題 23 の対偶を考えると，$s_1 \not\downarrow_D s_2$ となる．

(I.S.) $(s_1, s_2) \in NDJ_{k+1}$ と仮定する．このとき，ある $j \in [1, n]$ について，$(u_j, v_j) \in NDJ_k$ をみたす $f(u_1, \ldots, u_n) \in Subtop(s_1)$，$f(v_1, \ldots, v_n) \in Subtop(s_2)$ が存在する．帰納法の仮定より $u_j \not\downarrow_D v_j$ が成り立つ．したがって，補題 24 より，$s_1 \not\downarrow_D s_2$．

($\Leftarrow$) 以下の命題を示せば十分である．

$$\forall k.\ \forall s_1, s_2 \in \mathrm{Sub}(R).\ [\exists t_1, t_2 [s_1 \xrightarrow{*} t_1 \land s_2 \xrightarrow{*} t_2 \land t_1 \not\downarrow t_2 \land max(sdep(t_1), sdep(t_2)) \le k] \Rightarrow\ (s_1, s_2) \in NDJ_\infty]$$

証明は k に関する帰納法で示す．

(B.S.) $sdep(t_1) = sdep(t_2) = 0$ のとき．このとき，t_1, t_2 は非安定項．ここで，安定項の定義より，$i = 1, 2$ について，$t_i \xrightarrow{*} \tilde{t}_i$ をみたす $\tilde{t}_i \in \mathrm{Sub}(R)$ が存在し，$s_i, \tilde{t}_i \in \mathrm{Sub}(R)$ より $s_i \to \tilde{t}_i \in R$ なので，$Topsteps$ の定義から $\tilde{t}_i \in Topsteps(s_i)$ が成り立つ．よって，$t_1 \not\downarrow t_2$ より $\tilde{t}_1 \not\downarrow \tilde{t}_2$ となるため，DJ-condition(s_1, s_2) の条件 1 をみたさない．したがって，$(s_1, s_2) \in NDJ_0$ が成り立つ．

(I.S.) 以下のように場合分けをする．

(a) t_1, t_2 がともに強安定項でないとき．

このとき，$t_1 = f(u_1, \ldots, u_n)$ $(n \ge 0)$ とおくと，任意の $j \in [1, n]$ について，u_j は非安定項なので，$u_j \xrightarrow{*} w_j$ なる $w_j \in \mathrm{Sub}(R)$ が存在する．ここで $\tilde{t}_1 = f(w_1, \ldots, w_n)$ とおくと，$s_1 \xrightarrow{*} t_1 \xrightarrow{*} \tilde{t}_1$．また，補題 5 より $s_1 \to_\lambda \xrightarrow{*}_{>\lambda} \tilde{t}_1$．よって，$n > 0$ の場合は任意の $j \in [1, n]$ に対して $w_j \in \mathrm{Sub}(R)$，$n = 0$ の場合は $t_1 = \tilde{t}_1 \in \mathrm{Sub}(R)$ に注意すると，$s_1 \to_\lambda \overset{Arg}{\twoheadrightarrow} \tilde{t}_1$ となるので，$\tilde{t}_1 \in Topsteps(s_1)$．同様に，$s_2 \xrightarrow{*} t_2 \xrightarrow{*} \tilde{t}_2$ かつ $\tilde{t}_2 \in Topsteps(s_2)$ なる $\tilde{t}_2$ が存在する．また，$t_1 \not\downarrow t_2$ より，$\tilde{t}_1 \not\downarrow \tilde{t}_2$ も成り立つ．したがって，DJ-condition(s_1, s_2) の条件 1 をみたさないので，$(s_1, s_2) \in NDJ_0$．

(b) t_1, t_2 のうち少なくとも 1 つが 強安定項 のとき．

一般性を失うことなく，$t_1 = f(u_1, \ldots, u_n)$ を強安定項とする．$s_1 \in \mathrm{Sub}(R)$ かつ t_1 が強安定項なので補題 5 より，$s_1 \to_\lambda u \xrightarrow{*}_{>\lambda} t_1$ をみたす項 $u = f(u'_1, \ldots, u'_n) \in Subtop(s_1)$ が存在し，すべての $i \in [1, n]$ に対して，$u'_i \xrightarrow{*} u_i$ となる．また，DJ-condition(s_1, s_2) をみたさないとき，$(s_1, s_2) \in NDJ_0$ となるので，以下では DJ-condition(s_1, s_2) をみたすと仮定する．ここで，以下のように場合分けをする．

(b-1) t_2 が 強安定項 のとき．

$t_2 = g(v_1, \ldots, v_m)$ と仮定すると，$s_2 \in \mathrm{Sub}(R)$ かつ t_2 が強安定項なので補題 5 より，書き換え列 $s_2 \to_\lambda v \xrightarrow{*}_{>\lambda} t_2$ をみたす項 $v = g(v'_1, \ldots, v'_m) \in Subtop(s_2)$ が存在し，すべての $j \in [1, m]$ に対して，$v'_j \xrightarrow{*} v_j$ となる．DJ-condition(s_1, s_2) の条件 3 より，$f = g$ が成立する．したがって，t_1, t_2 が安定項より $t_1 \not\downarrow_{>\lambda} t_2$ となるので，ある $i \in [1, n]$ が存在して $u_i \not\downarrow v_i$ となる．ここで，$u'_i \xrightarrow{*} u_i \not\downarrow v_i \xleftarrow{*} v'_i$ および $max(sdep(u_i), sdep(v_i)) < k$ に注意すると，帰納法の仮定より $(u'_i, v'_i) \in NDJ_\infty$ が成り立つ．したがって，NDJ の定義より，$(s_1, s_2) \in NDJ_\infty$．

(b-2) t_2 が強安定項ではないが安定可能項のとき．

このとき，$t_2 = g(v_1, \ldots, v_m)$ $(m \ge 0)$ と仮定すると，t_2 は強安定項でないので，すべての $i \in [1, m]$ について，v_i は非安定項となり，$v_i \xrightarrow{*} w_i$ をみたすある $w_i \in \mathrm{Sub}(R)$ が存在する．また，$s_2 \in \mathrm{Sub}(R)$ なので補題 5 より，$s_2 \to_\lambda s'_2 \xrightarrow{*}_{>\lambda} t_2$ をみたす項 $s'_2 = g(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_m) \in \mathrm{Sub}(R)$ が存在する．さらに，$g(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_m) \xrightarrow{*}_{>\lambda} g(w_1, \ldots, w_m)$ より $s_2 \to_\lambda g(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_m) \xrightarrow{*}_{>\lambda} g(w_1, \ldots, w_m)$．また，各 $i \in [1, m]$ に対して $\tilde{v}_i \xrightarrow{*} w_i$ かつ $\tilde{v}_i, w_i \in \mathrm{Sub}(R)$ より $\tilde{v}_i \to w_i \in R$ となるので，$s_2 \to_\lambda \overset{Arg}{\twoheadrightarrow} g(w_1, \ldots, w_m)$ となり，$g(w_1, \ldots, w_m) \in Topsteps(s_2)$ が成り立つ．よって，$u \in Subtop(s_1) \neq \emptyset$ と DJ-condition(s_1, s_2) より $Subtop(s_2) \neq \emptyset$ に注意すると，C-condition(s_2) の条件 3 より $g(w_1, \ldots, w_m) \xrightarrow{*} v$ をみたすある $v \in Subtop(s_2)$ が存在する．DJ-condition(s_1, s_2) の条件 3 より $f = root(v)$ が成立し，$v = f(v'_1, \ldots, v'_n)$ とおける．このとき，$t_1 \not\downarrow t_2$ より $s_1 \xrightarrow{*}$

$u \xrightarrow{*}_{>\lambda} t_1 \not\downarrow v \xleftarrow{*} t_2 \xleftarrow{*} s_2$ となる．さらに $t_1 = f(u_1,\ldots,u_n)$ と $v = f(v'_1,\ldots,v'_n)$，$t_1 \not\downarrow v$ より $t_1 \not\downarrow_{>\lambda} v$ となることに注意すると，$u_i \not\downarrow v'_i$ をみたす i が存在する．このとき，$Subtop$ の定義より，各 $i \in [1,n]$ について $v'_i \in \mathrm{Sub}(R)$ となるので安定度の定義より $sdep(v'_i) = 0$ に注意すると，$max(sdep(u_i), sdep(v'_i)) < k$．よって，$u'_i \xrightarrow{*} u_i \not\downarrow v'_i$ を $u'_i \xrightarrow{*} u_i \not\downarrow v'_i \xleftarrow{*} v'_i$ と表せるので帰納法の仮定から，$(u'_i, v'_i) \in NDJ_\infty$ が成り立つ．したがって，NDJ の定義より，$(s_1, s_2) \in NDJ_\infty$．

(b-3) t_2 が 安定不能項 のとき．

このとき，補題 19 より s_1 が 安定可能項，s_2 が 安定不能項 となるため，$s_1 \not\downarrow s_2$．したがって，DJ-condition(s_1, s_2) の条件 1 をみたさないので，$(s_1, s_2) \in NDJ_0$． □

ここで，NDJ_∞ は文献 [3] と同様に $||R||$ の多項式時間で求めることができ，補題 22 より DJ-condition も多項式時間で決定することができる．したがって，補題 30 より任意の $s, t \in \mathrm{Sub}(R)$ に対して，$s \downarrow_D t$ は多項式時間で判定できる．このとき，以下の定理が成立する．

定理 31 基底項書き換え系 R の合流性は多項式時間で決定可能である [3]．

(証明)

合流性判定は，R の変換と合流条件の判定部分に分割できる．R の変換は，補題 4 より，closure$(R) = R_\infty$ を導出可能．よって，R_∞ は，$||R||$ の多項式時間で計算可能なので，closure(R) は多項式時間で計算可能．

合流条件の検証では，補題 18 の背反を考えると，C-condition(R) をみたさないとき，非合流．また，C-condition(R) は，補題 17 より $||R||$ の多項式時間で決定可能．

次に，C-condition(R) をみたすときについて考える．このとき，R が合流する必要十分条件は，補題 26 より，任意の項 $s \in Sub(R)$ について，$s \downarrow_D s$ が成立することである．これは，補題 30 より，任意の項 $s \in Sub(R)$ に対して $(s, s) \notin NDJ_\infty$ が成立することと同値であり，この場合は，$||R||$ の多項式時間で検証できる．したがって，GTRS R の合流性判定は $||R||$ の多項式時間で決定可能． □

6 実験

Comon-Godoy-Nieuwenhaus による合流性判定アルゴリズム **CGN**[3] と**本論文**の合流性判定アルゴリズムを SML/NJ で実装して実行時間を比較した．実験は Intel Core2 Duo プロセッサ E7400 @ 2.80GHz およびメモリ 1GB を搭載した PC 上で行った．実験は，21 例の基底項書き換え系に対して，R の書き換え規則数 $|R|$，$closure(R)$ の書き換え規則数 $|closure(R)|$ および判定時間を比較した (表 1)．また，判定結果が合流のときは ∘，非合流のときは × で表した．

本論文のアルゴリズムを CGN[3] と比較すると，カリー変換やフラット変換による書き換え規則の増加が顕著の場合には判定時間が大幅に短縮されており，約 20〜60 倍高速化された例もあった．一方，これらの変換による書き換え規則の増加が小さい場合には判定時間の改善はなかった (表 1)．

7 おわりに

本論文では，基底項書き換え系の多項式時間合流性判定法を提案し，その正当性の証明を行った．本手法の特徴は，従来の判定法では必要とされていたカリー変換とフラット変換を行わずに，基底項書き換え系に閉包操作を直接適用することで合流性を判定する点にある．

基底項書き換え系よりも広いクラスであるシャロー項書き換え系に対する合流性判定法も近年提案されている [5, 6]．しかし，これらの合流性判定法でも，基底項書き換え系の場合と同様にカリー変換とフラット変換を利用している．本論文の結果を拡張することで，これらの変換を省いた直接

表 **1.** 合流性判定アルゴリズムの実行時間の比較

例	$\|R\|$	$\|closure(R)\|$		判定時間		判定
		CGN	本論文	CGN	本論文	
1	3	18	9	0	0	×
2	6	24	15	4	4	×
3	4	19	10	0	4	○
4	5	26	13	4	4	○
5	4	21	12	12	16	○
6	5	26	13	4	4	×
7	3	31	12	4	4	×
8	8	54	20	12	20	×
9	5	30	13	8	12	○
10	4	31	14	92	120	○
11	5	30	13	8	12	○
12	8	83	22	1164	288	○
13	3	83	19	8	8	×
14	3	50	13	8	4	×
15	8	85	24	1232	304	○
16	8	131	29	5136	720	○
17	8	171	34	8033	1512	○
18	8	161	34	500	204	×
19	11	112	27	3296	136	×
20	8	77	22	1296	200	○
21	11	148	27	10897	184	×

的なシャロー項書き換え系の合流性判定法を実現することは興味深い問題である．また，本論文で提案した合流性判定法を項書き換え系の合流性自動判定システム ACP[1] に組み込むことも今後の課題である．

8　謝辞

有益なコメントをお寄せ下さった査読者に深く感謝致します．なお，本研究は一部日本学術振興会科学研究費 20500002，22500002 の補助を受けて行われた．

参考文献

[1] T. Aoto, J. Yoshida and Y. Toyama, Proving confluence of term rewriting systems automatically, *In Proceedings of the 20th International Conference on Rewriting Techniques and Applications(RTA 2009), LNCS, 5595*, pp.93-102, 2009.

[2] F. Baader and T. Nipkow, *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[3] H. Comon, G. Godoy and R. Nieuwenhauis, The Confluence of ground term rewrite systems is decidable in polynomial time, *In Proceedings of 42th Annual IEEE symposium of Foundadation of Computer Science(FOCS)*, pp.298–307, 2001.

[4] M. Dauchet, T. Heuillard, P. Lescanne and S. Tison, Decidability of the confluence of finite ground term rewrite systems and of other related term rewrite systems, *Information and Computation, 88(2)*, pp.187–201, 1990.

[5] G. Godoy and A. Tiwari, Confluence of shallow right-linear rewrite systems, *In Proceedings of the 19th Annual Conference of the European Association for Computer Science Logic(CSL'05), LNCS, 3634*, pp.541–556, 2005.

[6] G. Godoy, A. Tiwari and R. Verma, Deciding confluence of certain term rewriting system in polynomial time, *Annual of Pure and Apllied Logic, 130(1-3)*, pp.33–59, 2004.

[7] M. Oyamaguchi, The Church-Rosser property for ground term-rewriting system is decidable, *Theoretical Computer Science, 49(1)*, pp.43–79, 1987.