多項式サイズ正規形を保証する項書き換えシステムの経路順序

磯部 耕己，青戸 等人，外山 芳人

東北大学　電気通信研究所

{isobe,aoto,toyama}@nue.riec.tohoku.ac.jp

概 要　項書き換えシステムを用いて記述したプログラムが，多項式時間で計算可能であること示す様々な手法が知られている．Marion (2003) は多項式サイズ正規形を保証する軽多重集合経路順序を提案し，この順序により方向付け可能な項書き換えシステムにおいては，任意の項は多項式時間で評価可能であることを示した．また，多項式時間で計算可能な任意の関数は，この軽多重集合経路順序によって方向付けが可能であるような項書き換えシステムによって記述できることも示されている．しかしながら，一般に項書き換えシステムを与えたとき，多項式サイズ正規形が保証される場合でも，軽多重集合経路順序で方向付けができないことがある．このため，より一般的な経路順序によって多項式サイズ正規形を保証できることが望ましい．本論文では，軽多重集合経路順序を拡張し，より一般的な項書き換えシステムに対して多項式サイズ正規形を保証する新しい経路順序を提案する．

1　はじめに

項書き換えシステムにおける停止性は，合流性判定や完備化手続きを用いる上で不可欠な性質であり，辞書式経路順序 [6] や多重集合経路順序 [6]，依存対法 [2]，多項式解釈による順序付け [8] など様々な判定法が知られている．しかし，項書き換えシステムで記述されたプログラムが停止するとしても，計算時間が現実的であることを保証するためには計算量の評価が必要である．

Bellantoni と Cook は原始帰納関数の原始再帰において再帰に用いる引数を制限することで多項式時間計算可能な関数を特徴付けした [7]．同様の特徴付けを停止性証明に用いられる経路順序に導入することによって，多項式時間計算可能であることを保証する手法が提案されている．Marion は軽多重集合経路順序 [11] を提案し，簡素な項書き換えシステムの多項式サイズ正規形を保証することで，正規形評価手続き EVAL での多項式時間計算可能性を示した．また，書き換えの導出列長が多項式であることにもとづいて多項式時間計算可能性を保証する手法として，新井と Moser が提案した FP のための経路順序 [1]，それを Avanzini と Moser が発展させた多項式経路順序 [3][4] がある．経路順序によらない計算量の解析法としては，Moser らによる行列解釈を用いた解析法 [9]，廣川と Moser の依存対法に基づく解析法 [10] などが提案されている．

本論文では，Marion の軽多重集合経路順序 [11] における置換順序による引数の比較をより一般的な比較に置き換えた新しい経路順序を提案する．そして，この新しい経路順序で方向付けが可能な項書き換えシステムにおいては多項式サイズ正規形が保証されることを証明する．提案する経路順序をもちいることで，より一般的な簡素な項書き換えシステムに対して多項式サイズ正規形の保証が可能となる．

2　準備

ソート集合 $\mathcal{S}$ と関数記号集合 $\mathcal{F}$ を有限集合とする．この 2 つの集合の対 $(\mathcal{S},\mathcal{F})$ をシグネチャとよぶ．$(\mathcal{S},\mathcal{F})$ 上の関数記号 $f \in \mathcal{F}$ は，それぞれアリティと型をもつ．f の型は，ソート $\mathsf{s},\mathsf{s}_1,\ldots,\mathsf{s}_n$ について $f : \mathsf{s}_1,\ldots,\mathsf{s}_n \to \mathsf{s}$ と記す $(n \geq 0)$．このとき，f のアリティは n である．特に，$n = 0$

の場合を定数とよび，その型は単に $f : \mathsf{s}$ と書く．変数集合を $\mathcal{V}$ と記し，ソート $\mathsf{s} \in \mathcal{S}$ の変数集合 $\mathcal{V}_\mathsf{s}$ は可算無限集合とする ($\mathcal{V} = \bigcup_{\mathsf{s}\in\mathcal{S}} \mathcal{V}_\mathsf{s}$)．ソート s の $\mathcal{F}, \mathcal{V}$ 上の項の集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})_\mathsf{s}$ と記し，(1)$\mathcal{V}_\mathsf{s} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})_\mathsf{s}$，(2)$f : \mathsf{s}_1, \ldots, \mathsf{s}_n \to \mathsf{s}$ かつ $t_i \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})_{\mathsf{s}_i}$ ならば，$f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})_\mathsf{s}$ と定義する ($\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V}) = \bigcup_{\mathsf{s}\in\mathcal{S}} \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})_\mathsf{s}$)．項 t に現れる変数の集合を $Var(t)$ と記す．$Var(t) = \emptyset$ となる t を基底項とよび，その集合を $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ と記す.

代入 σ とは $\mathcal{V}$ から $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ への写像である．また，$\mathcal{V}$ から $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ への写像である σ を基底代入とよぶ．各ソート $\mathsf{s} \in \mathcal{S}$ に対して，ソート s のホール $\Box_\mathsf{s}$ を特別な定数とする．文脈 $C\langle\ \rangle$ はホールを 1 つだけ含む項である．文脈 $C\langle\ \rangle$ のホール $\Box_\mathsf{s}$ を任意の項 $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})_\mathsf{s}$ で置き換えて得られる項を $C\langle t\rangle$ で表す．項 u が項 t の部分項であるとは，$t = C\langle u\rangle$ となる文脈 C があるときをいい，$t \trianglerighteq u$ と記す．項 $t \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ のサイズ $|t|$ は (1)t が変数または定数のとき 1，(2)$t = f(t_1, \ldots, t_n)$ のとき $\Sigma_{i=1}^{n} |t_i| + 1$ とする．また，高さ $ht(t)$ は (1)t が変数または定数のとき 1，(2)$t = f(t_1, \ldots, t_n)$ のとき $\max_{1\le i\le n} ht(t_i) + 1$ とする.

$l \notin \mathcal{V}$ かつ $Var(r) \subseteq Var(l)$ なる項 l, r の対を書き換え規則とよび，$l \to r$ と記す．ソート集合 $\mathcal{S}$，関数記号集合 $\mathcal{F}$，書き換え規則の有限集合 $\mathcal{R}$ の組 $\langle\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{R}\rangle$ を項書き換えシステムという．また，関数記号集合 $\mathcal{F}$ を定義関数記号集合 $\mathcal{D} = \{f |\ f(t_1, \ldots, t_n) \to r \in \mathcal{R}\}$ と構成子集合 $\mathcal{C} = \mathcal{F} \setminus \mathcal{D}$ に分割したとき，項 $t \in \mathcal{T}(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ を構成子項とよび，定義関数記号 $f \in \mathcal{D}$ と構成子項 $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{T}(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ からなる項 $f(v_1, \ldots, v_n)$ を基本項とよぶ．項書き換えシステム $\mathcal{R}$ が構成子システムであるとは，すべての書き換え規則の左辺が基本項であるときであり，構成子システムを $\langle\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{R}\rangle$ で表す.

ソート $\mathcal{S}$ 上の順序 $\succ_\mathcal{S}$ を次をみたす最小の順序とする．ある $c \in \mathcal{C}$ が存在して，$c : \mathsf{s}_1, \ldots, \mathsf{s}', \ldots, \mathsf{s}_n \to \mathsf{s}$ かつ $\mathsf{s} \neq \mathsf{s}'$ ならば $\mathsf{s} \succ_\mathcal{S} \mathsf{s}'$．また，構成子項が木構造とならず，リストのような一方向にだけ再帰することを表すために次のことを定義する．ソート集合 $\mathcal{S}$ が構成子集合 $\mathcal{C}$ において簡素である [11] とは，あらゆる $c \in \mathcal{C}$ の型 $\mathsf{s}_1, \ldots, \mathsf{s}_n \to \mathsf{s}$ について，$\mathsf{s}_i = \mathsf{s}$ となる i はただ 1 つ，かつ，$\succ_\mathcal{S}$ は非循環である[1]ときをいう．$\mathcal{S}$ が $\mathcal{C}$ において簡素であるとき，構成子システム $\langle\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{R}\rangle$ を簡素な構成子システムとよぶ.

例 2.1 以下で与える自然数上のリストの最小の要素を取り出す項書き換えシステム $\langle\mathcal{S}, \mathcal{C} \cup \mathcal{D}, \mathcal{R}\rangle$ は，簡素な構成子システム $\langle\mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{R}\rangle$ である.

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{S} & = & \{Nat,\ List(Nat)\} \\
\mathcal{C} & = & \{\mathbf{0} : Nat,\ \mathbf{suc} : Nat \to Nat,\ \mathbf{nil} : List(Nat),\ \mathbf{cons} : Nat, List(Nat) \to List(Nat)\} \\
\mathcal{D} & = & \{\mathsf{inf} : Nat, Nat \to Nat,\ \mathsf{listInf} : List(Nat) \to Nat\} \\
\mathcal{R} & = & \left\{ \begin{array}{lcl}
\mathsf{inf}(\mathbf{0}, y) & \to & \mathbf{0} \\
\mathsf{inf}(x, \mathbf{0}) & \to & \mathbf{0} \\
\mathsf{inf}(\mathbf{suc}(x), \mathbf{suc}(y)) & \to & \mathbf{suc}(\mathsf{inf}(x, y)) \\
\mathsf{listInf}(\mathbf{nil}) & \to & \mathbf{0} \\
\mathsf{listInf}(\mathbf{cons}(x, xs)) & \to & \mathsf{inf}(x, \mathsf{listInf}(xs))
\end{array} \right.
\end{array}
$$

$\mathcal{R}$ を項書き換えシステムとする．文脈 C，代入 σ，書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ が存在して，$t = C\langle l\sigma\rangle$ かつ $s = C\langle r\sigma\rangle$ となるとき，$t \to_\mathcal{R} s$ と記す．また，$\mathcal{R}$ が明らかなときは，単に $t \to s$ と記す．$\to_\mathcal{R}$ の推移閉包を $\xrightarrow{+}_\mathcal{R}$，反射推移閉包を $\xrightarrow{*}_\mathcal{R}$ と記す．$t \to_\mathcal{R} u$ となる項 u が存在しないとき，t を正規形とよぶ．$t \xrightarrow{!}_\mathcal{R} s$ と記すときは，$t \xrightarrow{*}_\mathcal{R} s$ となり s は正規形であることを意味する.

本論文では，関数記号集合 $\mathcal{F}$ 上の順序 $\succ_\mathcal{F}$ を以下の条件をみたすものとする．任意の $f \in \mathcal{D}, c \in \mathcal{C}$ について $f \succ_\mathcal{F} c$ が成立し，さらに，任意の $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ について $c_1 \not\succ_\mathcal{F} c_2$．$\succ_\mathcal{F}$ にもとづく関数記号 f のランクを $rank(f)$ と記し，以下の条件をみたす自然数と定義する．$c \in \mathcal{C}$ ならば $rank(c) = 0$，$f \succ_\mathcal{F} g$ ならば $rank(f) > rank(g)$.

項上の順序 $\succ$ から得られる多重集合経路順序 [6] を $\succ_{mpo}$，辞書式順序 [6] を $\succ_{lpo}$ と記す.

[1]文献 [11] にこの条件はないが，命題 5.9(文献 [11] の命題 17) を証明するのに必要である.

3 置換軽経路順序

この節では，軽多重集合経路順序 [11] について述べる．なお，軽多重集合経路順序の定義では実際には多重集合順序ではなく，置換順序を用いている．そのため，本論文では正確を期すため，置換軽経路順序と呼称する．

Bellantoni と Cook は原始帰納関数の原始再帰において再帰に用いる引数を制限することで多項式時間計算可能な関数を特徴付けした [7]．そこで用いられた多項式時間計算可能な関数を特徴付ける原始再帰は以下の式で表される．

$$\begin{array}{rcl} f(\mathbf{0}; y_1, \ldots, y_n) & = & g(y_1, \ldots, y_n) \\ f(\mathbf{s}_i(x); y_1, \ldots, y_n) & = & h_i(x; y_1, \ldots, y_n, f(x; y_1, \ldots, y_n)) \end{array}$$

この式ではセミコロン (;) を用いて再帰に用いられる引数の位置と，パラメータに用いられる引数の位置を区別している．同様の特徴付けを経路順序に導入するために数価を用いる．直観的には，再帰に使われる引数の位置の数価が 1，パラメータに用いられる引数の位置の数価が 0 となる．

アリティ n の関数記号 f の数価は写像 $v(f) : \{1, \ldots, n\} \mapsto \{0, 1\}$ である．このとき，v は数価関数であり，$v(f)(i)$ を項 $f(\ldots, t_i, \ldots)$ の位置 i における数価とよび，$v(f, i)$ とあらわす．また，$c \in \mathcal{C}$ の数価 $v(c)$ は，任意の i について $v(c, i) = 0$ とする．$f \in \mathcal{D}$ について数価 $v(f)$ が与えられているとき，一般性を失うことなく，$v(f, i) = 1$ $(i \leq p)$，$v(f, j) = 0$ $(j > p)$ と仮定する．さらに，$\mathcal{T}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}, \mathcal{V})$ 上の項 $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ での数価を明示したいときには，$f(t_1, \ldots, t_p; t_{p+1}, \ldots, t_n)$ とあらわす．このとき，f の型 $\mathsf{s}_1, \ldots, \mathsf{s}_n \to \mathsf{s}$ を $\mathsf{s}_1, \ldots, \mathsf{s}_p; \mathsf{s}_{p+1}, \ldots, \mathsf{s}_n \to \mathsf{s}$ と記す．また，ルートが構成子である項 $c(t_1, \ldots, t_n)$ をこの表記であらわすと，$c(; t_1, \ldots, t_n)$ となるが以下では省略する．

定義 3.1 (置換順序) $\succ$ を $\mathcal{T}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}, \mathcal{V})$ 上の項における順序とするとき，$\{t_1, \ldots, t_n\} \succ^{\mathcal{P}} \{s_1, \ldots, s_n\}$ を次のように定義する．ただし，π は $\{1, \ldots, n\} \mapsto \{1, \ldots, n\}$ となる置換である．

$$\{t_1, \ldots, t_n\} \succ^{\mathcal{P}} \{s_1, \ldots, s_n\} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \pi.(1 \leq \forall i \leq n. t_i \succeq s_{\pi(i)}) \wedge (1 \leq \exists j \leq n. t_j \succ s_{\pi(j)})$$

ここで，書き換え規則における順序として軽経路順序 [11] を定義し，さらに，それを用いて置換軽経路順序 (軽多重集合経路順序 [11]) を定義する．

定義 3.2 (軽経路順序 [11]) $\succ_{\mathcal{F}}$ を $\mathcal{F}$ 上の順序とする．$\mathcal{T}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}, \mathcal{V})$ の項における軽経路順序 $\succ_{\mathsf{L}}$ を次のように再帰的に定義する．

1. $c(\ldots, t_i, \ldots) \succ_{\mathsf{L}} s$ $\quad$ ($c \in \mathcal{C}$ かつ $t_i \succeq_{\mathsf{L}} s$ のとき)
2. $f(\ldots, t_i, \ldots; \ldots) \succ_{\mathsf{L}} s$ $\quad$ ($f \in \mathcal{D}$ かつ $t_i \succeq_{\mathsf{L}} s$ のとき)
3. $f(t_1, \ldots, t_n) \succ_{\mathsf{L}} g(s_1, \ldots, s_m)$
   ($f \succ_{\mathcal{F}} g$ であり，あらゆる $1 \leq i \leq m$ について $f(t_1, \ldots, t_n) \succ_{\mathsf{L}} s_i$ であるとき)

定義 3.3 (置換軽経路順序 (軽多重集合経路順序 [11])) $\succ_{\mathcal{F}}$ を $\mathcal{F}$ 上の順序とする．$\mathcal{T}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}, \mathcal{V})$ 上の置換軽経路順序 $\succ_{\mathsf{PL}}$ は，次のように再帰的に定義される．

1. $t \succ_{\mathsf{PL}} s$ $\quad$ ($t \succ_{\mathsf{L}} s$ のとき)
2. $f(\ldots, t_i, \ldots) \succ_{\mathsf{PL}} s$ $\quad$ ($t_i \succeq_{\mathsf{PL}} s$ のとき)
3. $f(t_1, \ldots, t_n) \succ_{\mathsf{PL}} g(s_1, \ldots, s_q; s_{q+1}, \ldots, s_m)$
   ($f \succ_{\mathcal{F}} g$ であり，すべての $1 \leq i \leq q$ について $f(t_1, \ldots, t_n) \succ_{\mathsf{L}} s_i$ かつ，すべての $q+1 \leq j \leq m$ について $f(t_1, \ldots, t_n) \succ_{\mathsf{PL}} s_j$ であるとき)
4. $f(t_1, \ldots, t_p; t_{p+1}, \ldots, t_n) \succ_{\mathsf{PL}} f(s_1, \ldots, s_p; s_{p+1}, \ldots, s_n)$
   ($f \in \mathcal{D}$ かつ，$\{t_1, \ldots, t_p\} \succ_{\mathsf{L}}^{\mathcal{P}} \{s_1, \ldots, s_p\}$，$\{t_{p+1}, \ldots, t_n\} \succeq_{\mathsf{PL}}^{\mathcal{P}} \{s_{p+1}, \ldots, s_n\}$ のとき)

また，置換軽経路順序 (軽多重集合経路順序 [11]) は次の特性を持つ．

命題 3.4 [11] (a) $t \succ_{\mathsf{L}} s \Rightarrow t \succ_{\mathsf{PL}} s$，(b) $t \succ_{\mathsf{PL}} s \Rightarrow t \succ_{mpo} s$.

命題 3.5 [11] s,t を $\mathcal{T}(\mathcal{C},\mathcal{V})$ 上の項とする．このとき，$t \succ_{\mathsf{L}} s \Leftrightarrow t \succ_{\mathsf{PL}} s \Leftrightarrow t \rhd s$.

ここで，実際に置換軽経路順序 (軽多重集合経路順序) での書き換え規則の順序付けを考える．

例 3.6 例 2.1 の項書換えシステムについて，$\succ_{\mathsf{PL}}$ で順序付け可能か考える．ただし，$\mathsf{listInf} \succ_{\mathcal{F}} \mathsf{inf}$ とし，$\mathsf{inf} : Nat; Nat \rightarrow Nat$，$\mathsf{listInf} : List(Nat); \rightarrow Nat$ とする．

ここで，3 つめの書き換え規則を考える．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{suc}(x) \succ_{\mathsf{L}} x}{\{\mathbf{suc}(x)\} \succ^{\mathcal{P}}_{\mathsf{L}} \{x\}} \qquad \dfrac{\mathbf{suc}(y) \succ_{\mathsf{PL}} y}{\{\mathbf{suc}(y)\} \succeq^{\mathcal{P}}_{\mathsf{PL}} \{y\}}}{\mathsf{inf}(\mathbf{suc}(x);\mathbf{suc}(y)) \succ_{\mathsf{PL}} \mathsf{inf}(x;y)} \qquad \mathsf{inf} \succ_{\mathsf{F}} \mathbf{suc}}{\mathsf{inf}(\mathbf{suc}(x);\mathbf{suc}(y)) \succ_{\mathsf{PL}} \mathbf{suc}(\mathsf{inf}(x;y))}$$

また，最後の書き換え規則を考えると，

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{cons}(x,xs) \succ_{\mathsf{L}} x}{\mathsf{listInf}(\mathbf{cons}(x,xs);) \succ_{\mathsf{L}} x} \qquad \dfrac{\mathbf{cons}(x,xs) \succ_{\mathsf{L}} xs}{\mathsf{listInf}(\mathbf{cons}(x,xs);) \succ_{\mathsf{PL}} \mathsf{listInf}(xs;)} \qquad \mathsf{listInf} \succ_{\mathsf{F}} \mathsf{inf}}{\mathsf{listInf}(\mathbf{cons}(x,xs);) \succ_{\mathsf{PL}} \mathsf{inf}(x;\mathsf{listInf}(xs;))}$$

となり置換軽経路順序で順序付けできることがわかる．

しかし，置換軽経路順序 (軽多重集合経路順序) では次のような例に対して順序付けはできない．

例 3.7 n 個の偶数のリストを求める書き換え規則の集合を考える．ただし，$\mathsf{lev} \succ_{\mathcal{F}} \mathsf{lev1}$ とし，$\mathsf{lev1} : Nat; Nat, List(Nat) \rightarrow List(Nat)$，$\mathsf{lev} : Nat; \rightarrow List(Nat)$ とする．

$$\mathcal{R}_{\mathsf{lev}} = \begin{cases} \mathsf{lev1}(\mathbf{0}; y, z) & \rightarrow \quad z \\ \mathsf{lev1}(\mathbf{suc}(x); y, z) & \rightarrow \quad \mathsf{lev1}(x; \mathbf{suc}(\mathbf{suc}(y)), \mathbf{cons}(y, z)) \\ \mathsf{lev}(x;) & \rightarrow \quad \mathsf{lev1}(x; \mathbf{0}, \mathbf{nil}) \end{cases}$$

2 つめの書き換え規則について，$\succ_{\mathsf{PL}}$ 順序付けを試みる．このとき，$\mathbf{suc}(x) \succ_{\mathsf{L}} x$，$y \succ_{\mathsf{PL}} \mathbf{suc}(\mathbf{suc}(y))$，$z \succ_{\mathsf{PL}} \mathbf{cons}(y, z)$ となる必要があるが後者 2 つは成り立たない．

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{suc}(x) \succ_{\mathsf{L}} x}{\{\mathbf{suc}(x)\} \succ^{\mathcal{P}}_{\mathsf{L}} \{x\}} \qquad \dfrac{\dfrac{\perp}{y \succ_{\mathsf{PL}} \mathbf{suc}(\mathbf{suc}(y))} \qquad \dfrac{\perp}{z \succ_{\mathsf{PL}} \mathbf{cons}(y,z)}}{\{y, z\} \succ^{\mathcal{P}}_{\mathsf{PL}} \{\mathbf{suc}(\mathbf{suc}(y)), \mathbf{cons}(y, z)\}}}{\mathsf{lev1}(\mathbf{suc}(x); y, z) \succ_{\mathsf{PL}} \mathsf{lev1}(x; \mathbf{suc}(\mathbf{suc}(y)), \mathbf{cons}(y, z))}$$

$y \not\succ_{\mathsf{PL}} \mathbf{suc}(\mathbf{suc}(y))$，$z \not\succ_{\mathsf{PL}} \mathbf{cons}(y, z)$ であるので，置換軽経路順序では順序付けはできない．

例 3.7 は $\succ_{\mathsf{PL}}$ で順序付けできないが，正規形は多項式サイズとなる．このような項書き換えシステムについても，多項式サイズ正規形を保証できるように拡張する方法を次節で提案する．

4 擬置換軽経路順序

この節では，前節の置換軽経路順序 (軽多重集合経路順序 [11]) を拡張した擬置換軽経路順序を提案する．置換軽経路順序は，両辺のルート記号が同じである書き換え規則の順序付けについて置換順序を用い，書き換え規則の両辺のすべての引数を置換順序を用いて比較している．しかし，数価 0 となる位置はパラメータとして用いられるので置換順序では必要以上に制限してしまう．このため，一般的にアキュムレータを持つような項書き換えシステムにおいては置換軽経路順序は成り立たない．そのため，置換順序の適用を数価 1 となる位置にのみ留め，数価 0 の位置については辞書式経路順序で用いられる項全体と比較するように変更することで，置換軽経路順序を拡張することが可能である．以下では，このような考え方に基づいた新しい経路順序を提案する．

定義 4.1 (擬置換軽経路順序，擬軽経路順序) $\succ_{\mathcal{F}}$ を $\mathcal{F}$ 上の順序とする．$\mathcal{T}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}, \mathcal{V})$ 上の擬置換軽経路順序 $\succ_{\mathsf{QPL}}$ と擬軽経路順序 $\succ_{\mathsf{QL}}$ を，次のように再帰的に定義する．

1-1 $t \succ_{\mathsf{QPL}} s$ $\qquad$ ($t \succ_{\mathsf{L}} s$ のとき)

1-2 $f(\ldots, t_i, \ldots) \succ_{\mathsf{QPL}} s$ $\qquad$ ($t_i \succeq_{\mathsf{QPL}} s$ のとき)

1-3 $f(t_1, \ldots, t_n) \succ_{\mathsf{QPL}} g(s_1, \ldots, s_q; s_{q+1}, \ldots, s_m)$
($f \succ_{\mathcal{F}} g$ であり，すべての $1 \leq i \leq q$ について $f(t_1, \ldots, t_n) \succ_{\mathsf{L}} s_i$ かつ，すべての $q+1 \leq j \leq m$ について $f(t_1, \ldots, t_n) \succ_{\mathsf{QPL}} s_j$ であるとき)

1-4 $f(t_1, \ldots, t_p; t_{p+1}, \ldots, t_n) \succ_{\mathsf{QPL}} f(s_1, \ldots, s_p; s_{p+1}, \ldots, s_n)$
($f \in \mathcal{D}$ かつ，$\{t_1, \ldots, t_p\} \succ_{\mathsf{L}}^{\mathcal{P}} \{s_1, \ldots, s_p\}$ かつ，
すべての $p+1 \leq j \leq n$ について $f(t_1, \ldots, t_p; t_{p+1}, \ldots, t_n) \succ_{\mathsf{QL}} s_j$ であるとき)

2-1 $t \succ_{\mathsf{QL}} s$ $\qquad$ ($t \succ_{\mathsf{L}} s$ のとき)

2-2 $f(\ldots, t_i, \ldots) \succ_{\mathsf{QL}} s$ $\qquad$ ($f \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ かつ，$t_i \succeq_{\mathsf{QPL}} s$ のとき)

2-3 $f(t_1, \ldots, t_n) \succ_{\mathsf{QL}} g(s_1, \ldots, s_q; s_{q+1}, \ldots, s_m)$
($f \succ_{\mathcal{F}} g$ であり，すべての $1 \leq i \leq q$ について $f(t_1, \ldots, t_n) \succ_{\mathsf{L}} s_i$ かつ，すべての $q+1 \leq j \leq m$ について $f(t_1, \ldots, t_n) \succ_{\mathsf{QL}} s_j$ であるとき)

擬置換軽経路順序 $\succ_{\mathsf{QPL}}$ の定義 (1-1)，(1-2)，(1-3) は，それぞれ置換軽経路順序 $\succ_{\mathsf{PL}}$(定義 3.3) の (1)，(2)，(3) に対応している．また，(1-4) は t と s_i $(1 \leq i \leq p)$ の比較は $\succ_{\mathsf{PL}}$ と同じく置換順序であるが，t と s_j $(p+1 \leq j \leq n)$ には擬軽経路順序 $\succ_{\mathsf{QL}}$ を用いる．ここで，t と s_j の比較に $\succ_{\mathsf{QPL}}$ を用いてしまうと，後述に示す例 4.5 のような多項式サイズ正規形とならないものについても成り立ってしまうので，ここは $\succ_{\mathsf{QL}}$ で比較しなければならない．$\succ_{\mathsf{QL}}$ の定義は，$\succ_{\mathsf{QPL}}$ の定義 (1-1) から (1-3) と似ているが，(2-2) では $t_i \succeq_{\mathsf{QPL}} s$ となることに注意する．

ここで前述の例について考えると，確かに順序付けができるようになっている．

例 4.2 例 3.7 について，$\succ_{\mathsf{QPL}}$ で順序付け可能か考える．ここで，$t = \mathsf{lev1}(\mathbf{suc}(x); y, z)$ とし，2 つめの書き換え規則について考える．$\succ_{\mathsf{PL}}$ で順序付け可能となるには，$\mathbf{suc}(x) \succ_{\mathsf{L}} x$，$y \succ_{\mathsf{PL}} \mathbf{suc}(\mathbf{suc}(y))$，$z \succ_{\mathsf{PL}} \mathbf{cons}(y, z)$ となる必要があり，実際には $y \not\succ_{\mathsf{PL}} \mathbf{suc}(\mathbf{suc}(y))$，$z \not\succ_{\mathsf{PL}} \mathbf{cons}(y, z)$ であるので成り立たなかった．しかし，$\succ_{\mathsf{QPL}}$ での順序付けでは，$\mathbf{suc}(x) \succ_{\mathsf{L}} x$，$t \succ_{\mathsf{QL}} \mathbf{suc}(\mathbf{suc}(y))$，$t \succ_{\mathsf{QL}} \mathbf{cons}(y, z)$ であればよいので，条件は緩くなっている．したがって，

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{suc}(x) \succ_{\mathsf{L}} x}{\{\mathbf{suc}(x)\} \succ_{\mathsf{L}}^{\mathcal{P}} \{x\}} \quad \dfrac{t \succ_{\mathsf{QL}} \mathbf{suc}(y) \qquad \mathsf{lev1} \succ_{\mathcal{F}} \mathbf{suc}}{t \succ_{\mathsf{QL}} \mathbf{suc}(\mathbf{suc}(y))} \quad \dfrac{t \succ_{\mathsf{QL}} y \quad t \succ_{\mathsf{QL}} z \qquad \mathsf{lev1} \succ_{\mathcal{F}} \mathbf{cons}}{t \succ_{\mathsf{QL}} \mathbf{cons}(y, z)}}{t \succ_{\mathsf{QPL}} \mathsf{lev1}(x; \mathbf{suc}(\mathbf{suc}(y)), \mathbf{cons}(y, z))}$$

となるので，$\succ_{\mathsf{QPL}}$ では順序付けできる．

また，置換軽経路順序 (軽多重集合経路順序 [11]) で順序付けできるものについても，擬置換軽経路順序での順序付けができることを示す．

例 4.3 例 2.1 の項書き換えシステムについて例 3.6 の条件のもとで $\succ_{\mathsf{QPL}}$ で順序付け可能か考える．

ここで，3 つめの書き換え規則を考えると，

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{suc}(x) \succ_{\mathsf{L}} x}{\{\mathbf{suc}(x)\} \succ_{\mathsf{L}}^{\mathcal{P}} \{x\}} \quad \dfrac{\mathbf{suc}(y) \succ_{\mathsf{QPL}} y}{\mathsf{inf}(\mathbf{suc}(x); \mathbf{suc}(y)) \succ_{\mathsf{QL}} y}}{\mathsf{inf}(\mathbf{suc}(x); \mathbf{suc}(y)) \succ_{\mathsf{QPL}} \mathsf{inf}(x; y)} \quad \mathsf{inf} \succ_{\mathsf{F}} \mathbf{suc}}{\mathsf{inf}(\mathbf{suc}(x); \mathbf{suc}(y)) \succ_{\mathsf{QPL}} \mathbf{suc}(\mathsf{inf}(x; y))}$$

であり，最後の書き換え規則を考えると，

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{cons}(x,xs) \succ_{\mathsf{L}} x}{\mathsf{listInf}(\mathbf{cons}(x,xs);) \succ_{\mathsf{L}} x} \quad \dfrac{\mathbf{cons}(x,xs) \succ_{\mathsf{L}} xs}{\mathsf{listInf}(\mathbf{cons}(x,xs);) \succ_{\mathsf{QPL}} \mathsf{listInf}(xs;)} \quad \mathsf{listInf} \succ_{\mathsf{F}} \mathsf{inf}}{\mathsf{listInf}(\mathbf{cons}(x,xs);) \succ_{\mathsf{QPL}} \mathsf{inf}(x;\mathsf{listInf}(xs;))}$$

となるので，$\succ_{\mathsf{QPL}}$ で順序付けできることがわかる．

例 4.4 リストを反転させる書き換え規則の集合 $\mathcal{R}_{\mathsf{rev}}$ は，$\succ_{\mathsf{QPL}}$ で順序付け可能である．ただし，$\mathsf{rev} \succ_{\mathcal{F}} \mathsf{rev1}$ とし，$\mathsf{rev1} : List(Nat); List(Nat) \to List(Nat)$，$\mathsf{rev} : Nat; \to List(Nat)$ とする．

$$\mathcal{R}_{\mathsf{rev}} = \begin{cases} \mathsf{rev1}(\mathbf{nil}; ys) & \to \quad ys \\ \mathsf{rev1}(\mathbf{cons}(x,xs); ys) & \to \quad \mathsf{rev1}(xs; \mathbf{cons}(x,ys)) \\ \mathsf{rev}(xs;) & \to \quad \mathsf{rev1}(xs; \mathbf{nil}) \end{cases}$$

2つめの書き換え規則は以下のように $\succ_{\mathsf{QPL}}$ で順序付けできる．ただし，$s = \mathsf{rev1}(\mathbf{cons}(x,xs); ys)$ とする．

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{cons}(x,xs) \succ_{\mathsf{L}} xs}{\{\mathbf{cons}(x,xs)\} \succ^{\mathcal{P}}_{\mathsf{L}} \{xs\}} \quad \dfrac{s \succ_{\mathsf{QL}} x \quad s \succ_{\mathsf{QL}} ys \quad \mathsf{rev1} \succ_{\mathcal{F}} \mathbf{cons}}{s \succ_{\mathsf{QPL}} \mathbf{cons}(x,xs)}}{s \succ_{\mathsf{QPL}} \mathsf{rev1}(xs; \mathbf{cons}(x,ys))}$$

例 4.5 2^n を求める書き換え規則の集合 $\mathcal{R}_{\mathsf{exp}}$ は，$\succ_{\mathsf{QPL}}$ で順序付け不可能である．ただし，$\mathsf{exp} \succ_{\mathcal{F}} \mathsf{exp1}$ とし，$\mathsf{exp1} : Nat; Nat \to Nat$，$\mathsf{exp} : Nat; \to Nat$ とする．

$$\mathcal{R}_{\mathsf{exp}} = \begin{cases} \mathsf{exp1}(\mathbf{0}; y) & \to \quad \mathbf{suc}(y) \\ \mathsf{exp1}(\mathbf{suc}(x); y) & \to \quad \mathsf{exp1}(x; \mathsf{exp1}(x; y)) \\ \mathsf{exp}(x;) & \to \quad \mathsf{exp1}(x; \mathbf{0}) \end{cases}$$

2つめの書き換え規則について考えると，

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{suc}(x) \succ_{\mathsf{L}} x}{\{\mathbf{suc}(x)\} \succ^{\mathcal{P}}_{\mathsf{L}} \{x\}} \quad \dfrac{\perp}{\mathsf{exp1}(\mathbf{suc}(x); y) \succ_{\mathsf{QL}} \mathsf{exp1}(x; y)}}{\mathsf{exp1}(\mathbf{suc}(x); y) \succ_{\mathsf{QPL}} \mathsf{exp1}(x; \mathsf{exp1}(x; y))}$$

となるので，$\mathcal{R}_{\mathsf{exp}}$ は $\succ_{\mathsf{QPL}}$ で順序付けできない．$\mathbf{suc}$ が n 回繰り返された項を $\mathbf{suc}^n(0)$ とあらわすとき，$\mathsf{exp}(\mathbf{suc}^n(0)) \xrightarrow{!} \mathbf{suc}^{2^n}(0)$ となり，確かに多項式サイズ正規形とはならない．

$\mathsf{exp1}(\mathbf{suc}(x); y)$ と $\mathsf{exp1}(x; y)$ の比較に $\succ_{\mathsf{QL}}$ を用いる必要があるため順序付けに失敗することに注意する．この比較に $\succ_{\mathsf{QL}}$ ではなく $\succ_{\mathsf{QPL}}$ が使えた場合，$\mathsf{exp1}(\mathbf{suc}(x); y) \succ_{\mathsf{QPL}} \mathsf{exp1}(x; y)$ であることから $\mathsf{exp1}(\mathbf{suc}(x); y) \succ_{\mathsf{QPL}} \mathsf{exp1}(x; \mathsf{exp1}(x; y))$ が成立してしまう．従って，仮に，擬置換軽経路順序の定義 (1-4) のすべての $p+1 \le j \le n$ について $f(t_1, \ldots, t_p; t_{p+1}, \ldots, t_n) \succ_{\mathsf{QL}} s_j$ であるという条件を $f(t_1, \ldots, t_p; t_{p+1}, \ldots, t_n) \succ_{\mathsf{QPL}} s_j$ に置き換えたとすると，$\mathcal{R}_{\mathsf{exp}}$ が多項式サイズ正規形ではないにもかかわらず，順序付けに成功してしまう．つまり，多項式サイズ正規形であることを保証するためには，$\succ_{\mathsf{QPL}}$ の定義 (1-4) の $f(t_1, \ldots, t_p; t_{p+1}, \ldots, t_n) \succ_{\mathsf{QL}} s_j$ を $f(t_1, \ldots, t_p; t_{p+1}, \ldots, t_n) \succ_{\mathsf{QPL}} s_j$ に置き換えることは出来ない．

例 4.6 入力 n を与えると 1 から n までの総和を求める書き換え規則の集合 $\mathcal{R}_{\mathsf{sum}}$ は，$\succ_{\mathsf{QPL}}$ で順序付け可能である．ただし，$\mathsf{sum} \succ_{\mathcal{F}} \mathsf{sum1} \succ_{\mathcal{F}} \mathsf{add}$ とし，$\mathsf{add} : Nat, Nat; \to Nat$，$\mathsf{sum1} : Nat; Nat \to Nat$，$\mathsf{sum} : Nat; \to Nat$ とする．

$$\mathcal{R}_{\mathsf{sum}} = \begin{cases} \mathsf{add}(x, \mathbf{0};) & \to \quad x \\ \mathsf{add}(x, \mathbf{suc}(y);) & \to \quad \mathbf{suc}(\mathsf{add}(y, x;)) \\ \mathsf{sum1}(\mathbf{0}; y) & \to \quad y \\ \mathsf{sum1}(\mathbf{suc}(x); y) & \to \quad \mathsf{sum1}(x; \mathsf{add}(\mathbf{suc}(x), y;)) \\ \mathsf{sum}(x;) & \to \quad \mathsf{sum1}(x; \mathbf{0}) \end{cases}$$

この 4 つめの書き換え規則について考えると，

$$\dfrac{\dfrac{\mathbf{suc}(x) \succ_{\mathsf{L}} x}{\{\mathbf{suc}(x)\} \succ_{\mathsf{L}}^{\mathcal{P}} \{x\}} \qquad \dfrac{\mathsf{sum1}(\mathbf{suc}(x);y) \succ_{\mathsf{L}} \mathbf{suc}(x) \qquad \mathsf{sum1}(\mathbf{suc}(x);y) \succ_{\mathsf{L}} y \qquad \mathsf{sum1} \succ_{\mathcal{F}} \mathsf{add}}{\mathsf{sum1}(\mathbf{suc}(x);y) \succ_{\mathsf{QL}} \mathsf{add}(\mathbf{suc}(x),y;)}}{\mathsf{sum1}(\mathbf{suc}(x),y) \succ_{\mathsf{QPL}} \mathsf{sum1}(x;\mathsf{add}(\mathbf{suc}(x),y;))}$$

となるので，擬置換軽経路順序で順序付け可能である．しかし，置換軽経路順序だけではなく，多重集合経路順序や辞書式経路順序でも順序付けはできない．

しかし，次のような例は多項式サイズ正規形となるが $\succ_{\mathsf{QPL}}$ での順序付けはできない．

例 4.7 除算の書き換え規則の集合 $\mathcal{R}_{\mathsf{quot}}$ は次のようになる．ただし，$\mathsf{quot} \succ_{\mathcal{F}} \mathsf{minus}$ とし，$\mathsf{quot} : Nat;Nat \to Nat$，$\mathsf{minus} : Nat;Nat \to Nat$ とする．

$$\mathcal{R}_{\mathsf{quot}} = \left\{ \begin{array}{lll} \mathsf{minus}(\mathbf{0};y) & \to & \mathbf{0} \\ \mathsf{minus}(\mathbf{suc}(x);\mathbf{0}) & \to & \mathbf{suc}(x) \\ \mathsf{minus}(\mathbf{suc}(x);\mathbf{suc}(y)) & \to & \mathsf{minus}(x,y) \\ \mathsf{quot}(\mathbf{0};\mathbf{suc}(y)) & \to & \mathbf{0} \\ \mathsf{quot}(\mathbf{suc}(x);\mathbf{suc}(y)) & \to & \mathbf{suc}(\mathsf{quot}(\mathsf{minus}(x;y);\mathbf{suc}(y))) \end{array} \right.$$

このとき，5 つめの書き換え規則は $\succ_{\mathsf{QPL}}$ で順序付けできない．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\perp}{\mathbf{suc}(x) \succ_{\mathsf{L}} \mathsf{minus}(x;y)}}{\{\mathbf{suc}(x)\} \succ_{\mathsf{L}}^{\mathcal{P}} \{\mathsf{minus}(x;y)\}} \qquad \mathsf{quot}(\mathbf{suc}(x);\mathbf{suc}(y)) \succ_{\mathsf{QL}} \mathbf{suc}(y)}{\mathsf{quot}(\mathbf{suc}(x);\mathbf{suc}(y)) \succ_{\mathsf{QPL}} \mathsf{quot}(\mathsf{minus}(x;y);\mathbf{suc}(y)} \qquad \mathsf{quot} \succ_{\mathcal{F}} \mathbf{suc}}{\mathsf{quot}(\mathbf{suc}(x);\mathbf{suc}(y)) \succ_{\mathsf{QPL}} \mathbf{suc}(\mathsf{quot}(\mathsf{minus}(x;y);\mathbf{suc}(y)))}$$

これから，擬置換軽経路順序についてのいくつかの特性を示す．まず，置換軽経路順序と擬置換軽経路順序の関係について，次のことが言える．

定理 4.8 $(1) t \succ_{\mathsf{L}} s \Rightarrow t \succ_{\mathsf{QPL}} s$，$(2) t \succ_{\mathsf{PL}} s \Rightarrow t \succ_{\mathsf{QPL}} s$，$(3) t \succ_{\mathsf{QL}} s \Rightarrow t \succ_{\mathsf{QPL}} s$．

(証明)

(1) $t \succ_{\mathsf{L}} s \Rightarrow t \succ_{\mathsf{QPL}} s$ は定義 4.1(1-1) より自明．

(2) $t \succ_{\mathsf{PL}} s \Rightarrow t \succ_{\mathsf{QPL}} s$ を定義に関する帰納法で示す．

(i) $t \succ_{\mathsf{PL}} s$ が $t \succ_{\mathsf{L}} s$ で成り立っているときは，定義 4.1(1-1) より自明．

(ii) $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ かつ $t_i \succeq_{\mathsf{PL}} s$ となる場合．帰納法の仮定より $t_i \succeq_{\mathsf{QPL}} s$ となるので，定義 4.1(1-2) から $t \succ_{\mathsf{QPL}} s$ となる．

(iii) $t = f(t_1, \ldots, t_p; t_{p+1}, \ldots, t_n)$，$s = g(s_1, \ldots, s_q; s_{q+1}, \ldots, s_m)$ かつ $f \succ_{\mathcal{F}} g$ であり，すべての $1 \leq i \leq q$ について $t \succ_{\mathsf{L}} s_i$ が成り立ち，すべての $q+1 \leq j \leq m$ について $t \succ_{\mathsf{PL}} s_j$ が成り立つ場合．後者と帰納法の仮定より，$t \succ_{\mathsf{QPL}} s_j$ となる．よって，すべての $q+1 \leq j \leq m$ で $t \succ_{\mathsf{QPL}} s_j$ となるので，定義 4.1(1-3) より $t \succ_{\mathsf{QPL}} s$．

(iv) $t = f(t_1, \ldots, t_p; t_{p+1}, \ldots, t_n)$，$s = f(s_1, \ldots, s_p; s_{p+1}, \ldots, s_n)$ かつ $f \in \mathcal{D}$ であり，$\{t_1, \ldots, t_p\} \succ_{\mathsf{L}}^{\mathcal{P}} \{s_1, \ldots, s_p\}$，$\{t_{p+1}, \ldots, t_n\} \succeq_{\mathsf{PL}}^{\mathcal{P}} \{s_{p+1}, \ldots, s_n\}$ となる場合．置換順序の定義から，すべての $p+1 \leq j \leq n$ について $t_j \succeq_{\mathsf{PL}} s_{\pi(j)}$ となる π が存在する．ここで，一般性を失うことなく $j = \pi(j)$ と仮定する．よって，帰納法の仮定より $t_j \succeq_{\mathsf{QPL}} s_j$ となる．これより，定義 4.1(2-2) より $t \succ_{\mathsf{QL}} s_j$ となる．したがって，あらゆる $p+1 \leq j \leq n$ について $t \succ_{\mathsf{QL}} s_j$ となるので，定義 4.1(1-4) より $t \succ_{\mathsf{QPL}} s$ は成り立つ．

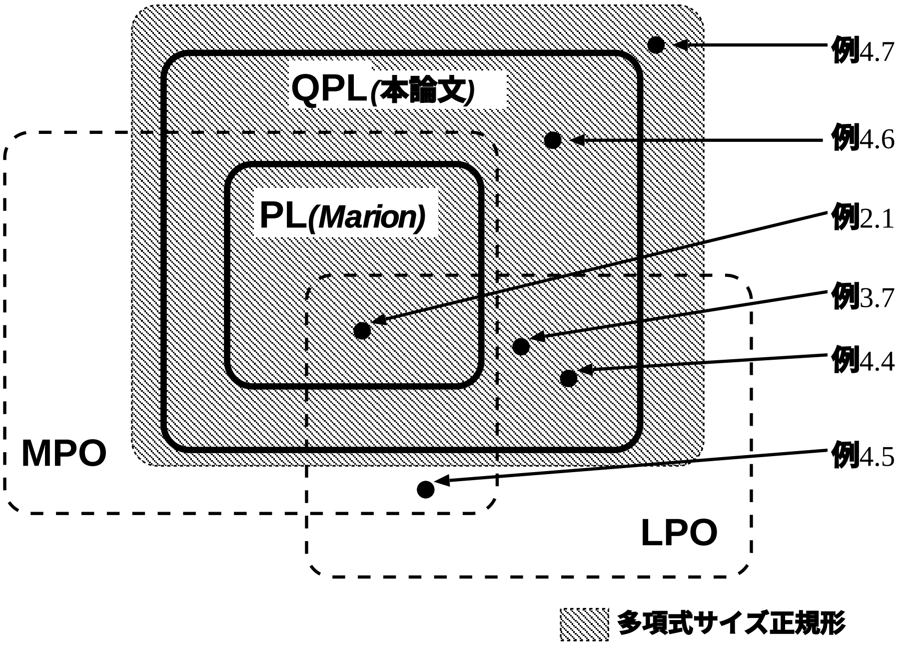

図 1. 各経路順序の関係

(3) $t \succ_{\mathsf{QL}} s \Rightarrow t \succ_{\mathsf{QPL}} s$ を定義に関する帰納法で示す.

(i) $t \succ_{\mathsf{QL}} s$ が $t \succ_{\mathsf{L}} s$ で成り立っているときは，定義 4.1(1-1) より自明.

(ii) $t \succ_{\mathsf{QL}} s$ が $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ かつ $t_i \succeq_{\mathsf{QPL}} s$ となる場合．定義 4.1(1-2) から $t \succ_{\mathsf{QPL}} s$ となる．

(iii) $t \succ_{\mathsf{QL}} s$ が $t = f(t_1, \ldots, t_p; t_{p+1}, \ldots, t_n)$，$s = g(s_1, \ldots, s_q; s_{q+1}, \ldots, s_m)$ かつ $f \succ_{\mathcal{F}} g$ であり，すべての $1 \leq i \leq q$ について $t \succ_{\mathsf{L}} s_i$ が成り立ち，すべての $q+1 \leq j \leq m$ について $t \succ_{\mathsf{QL}} s_j$ が成り立つ場合．後者と帰納法の仮定より，$t \succ_{\mathsf{QPL}} s_j$ となる．よって，すべての $q+1 \leq j \leq m$ で $t \succ_{\mathsf{QPL}} s_j$ となるので，定義 4.1(1-3) より $t \succ_{\mathsf{QPL}} s$.　□

この定理より，$\succ_{\mathsf{PL}} \subseteq \succ_{\mathsf{QPL}}$ であることを示した．また，命題 3.4(b) から $\succ_{\mathsf{PL}} \subseteq \succ_{mpo}$ であるが，一方で，$\succ_{\mathsf{QPL}} \not\subseteq \succ_{mpo}$ である．ここで，各経路順序の関係を図 1 にあらわす．

QPL，PL，MPO，LPO のクラスはそれぞれ，擬置換軽経路順序，置換軽経路順序 (軽多重集合経路順序 [11])，多重集合経路順序 [6]，辞書式経路順序 [6] で順序付けできる構成子システムの集合をあらわす．なお，斜線部分は多項式サイズ正規形を保証しており，QPL と PL は多項式サイズ正規形は保証されているが，MPO と LPO は保証されていない．

例 2.1(listInf) は，擬置換軽経路順序で順序付けできるので PL に含まれる．また，例 3.7(lev) と例 4.4(rev) は，擬置換軽経路順序で順序付けできるが，置換軽経路順序ではできない．さらに，この 2 例は辞書式経路順序で順序付けできる．例 4.5(exp) は，多項式サイズ正規形とならないので，擬置換軽経路順序で順序付けできず QPL には含まれない．また，例 4.6(sum) は MPO と LPO には含まれないにも関わらず，QPL には含まれる．

次に，$\mathcal{T}(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ 上では，$\succ_{\mathsf{PL}} = \succ_{\mathsf{QPL}}$ となるので，命題 3.5 を用いて，次の補題が成り立つ．

補題 4.9 t, s を $\mathcal{T}(\mathcal{C}, \mathcal{V})$ 上の項とするとき，$t \succ_{\mathsf{L}} s \;\Leftrightarrow\; t \succ_{\mathsf{QPL}} s \;\Leftrightarrow\; t \rhd s$.

最後に，擬置換軽経路順序の整礎性を示す．置換軽経路順序の整礎性は，命題 3.4 より多重集合経路順序 [6] の整礎性から示されているが，擬置換軽経路順序は $\succ_{mpo}$ に含まれていないので文献 [12] の整礎性証明の手法を用いて示す．

定理 4.10 $\mathcal{T}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}, \mathcal{V})$ 上の順序 $\succ_{\mathsf{QPL}}$ は整礎である．

(証明) はじめに次のことを定義しておく．まず，$\mathcal{T}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}, \mathcal{V})$ 上の項 t について，無限列 $t \succ_{\mathsf{QPL}} t_1 \succ_{\mathsf{QPL}} t_2 \succ_{\mathsf{QPL}} \cdots$ が存在しないような t の集合を $SN(\succ_{\mathsf{QPL}})$ とする．また，$\overline{SN(\succ_{\mathsf{QPL}})} = \{t \in \mathcal{T}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}, \mathcal{V}) | \forall u \lhd t.\ u \in SN(\succ_{\mathsf{QPL}})\}$ と定義する．2 つの項 $t = f(t_1, \ldots, t_m), s = g(s_1, \ldots, s_n)$ について $f \succ_{\mathcal{F}} g$ $(f \succeq_{\mathcal{F}} g, f = g)$ が成り立つとき，$t \succ^{\Lambda} s$ $(t \succeq^{\Lambda} s, t =^{\Lambda} s)$ と記す．このとき，$\succ_{\mathcal{F}}$ の整礎性から $\succ^{\Lambda}$ も整礎である．さらに，$\succ_{\mathsf{L}} \subseteq \succ_{mpo}$ から $\succ_{\mathsf{L}}$ も整礎であり，その置換順序である $\succ_{\mathsf{L}}^{\mathcal{P}}$ も整礎である．

$u_0 \in \overline{SN(\succ_{\mathsf{QPL}})}$ とするとき，部分項関係 $\rhd$ について極小な無限列 $u_0 \succ_{\mathsf{QPL}} u_1 \succ_{\mathsf{QPL}} u_2 \succ_{\mathsf{QPL}} \cdots$ を考える．ここで，極小な無限列 $u_0 \succ_{\mathsf{QPL}} u_1 \succ_{\mathsf{QPL}} u_2 \succ_{\mathsf{QPL}} \cdots$ の定義は，(1)$u_0 \rhd v$ ならば $v \in SN(\succ_{\mathsf{QPL}})$，かつ，(2) 任意の $i \geq 0$ について $u_{i+1} \rhd v$ かつ $u_i \succ_{\mathsf{QPL}} v$ ならば，$v \in SN(\succ_{\mathsf{QPL}})$ である [12]．

ここで，$t \succ_{\mathsf{QPL}} s$ となる項 $t = f(t_1, \ldots, t_p; t_{p+1}, \ldots, t_n), s = g(s_1, \ldots, s_q; s_{q+1}, \ldots, s_m)$ について，次の (S1) から (S3) の条件について考える．

(S1) $1 \leq \exists i \leq n.\ t_i \succeq_{\mathsf{QPL}} s$

(S2) $1 \leq \forall j \leq m.\ t \succ_{\mathsf{QPL}} s_j \ \wedge\ t \succ^{\Lambda} s$

(S3) $t =^{\Lambda} s \ \wedge\ 1 \leq \forall j \leq n.\ t \succ_{\mathsf{QPL}} s_j \ \wedge\ \{t_1, \ldots, t_p\} \succ_{\mathsf{L}}^{\mathcal{P}} \{s_1, \ldots, s_p\}$

まず，$t \succ_{\mathsf{QPL}} s$ が $t \succ_{\mathsf{L}} s$ の場合を考える．$f \in \mathcal{C}$ かつ $t_i \succeq_{\mathsf{L}} s$ の場合，定理 4.8(1) から $t_i \succeq_{\mathsf{QPL}} s$ なので (S1) の条件をみたす．$f \in \mathcal{D}$ かつ $t_i \succeq_{\mathsf{L}} s$ $(1 \leq i \leq p)$ の場合も，定理 4.8(1) から $t_i \succeq_{\mathsf{QPL}} s$ なので (S1) をみたす．また、$f \succ_{\mathcal{F}} g$ かつ $t \succ_{\mathsf{L}} s_j$ の場合は，(S2) をみたす．次に $t \succ_{\mathsf{QPL}} s$ が $t_i \succeq_{\mathsf{QPL}} s$ の場合，(S1) をみたす．$t \succ_{\mathsf{QPL}} s$ が $f \succ_{\mathcal{F}} g$ かつ，すべての $1 \leq i \leq q$ で $t \succ_{\mathsf{L}} s_i$ かつ，すべての $q+1 \leq j \leq m$ で $t \succ_{\mathsf{PL}} s_j$ の場合，定理 4.8(1) から $t \succ_{\mathsf{QPL}} s_i$ なので (S2) をみたす．最後に，$t \succ_{\mathsf{QPL}} s$ が $t =^{\Lambda} s$ かつ $\{t_1, \ldots, t_p\} \succ_{\mathsf{L}}^{\mathcal{P}} \{s_1, \ldots, s_p\}$ で，すべての $p+1 \leq j \leq n$ で $t \succ_{\mathsf{QL}} s_j$ の場合を考える．置換順序の定義から，$t_i \succeq_{\mathsf{L}} s_{\pi(i)}$ となる π が存在する．これと定義 3.2 から $t \succ_{\mathsf{L}} s_{\pi(i)}$ となる．また，定理 4.8(3) から，$t \succ_{\mathsf{QL}} s_j$ ならば $t \succ_{\mathsf{QPL}} s_j$ となるので，(S3) の条件をみたす．したがって，$t \succ_{\mathsf{QPL}} s$ ならば，(S1) から (S3) の条件のいずれかをみたす．

ここで，(S1) をみたす $u_i \succ_{\mathsf{QPL}} u_{i+1}$ はないことを示す．$u_0 \succ_{\mathsf{QPL}} u_1$ が (S1) をみたすとき，$u_0 = f(t_1, \ldots, t_n)$ かつ $t_i \succeq_{\mathsf{QPL}} u_1$ となる．このとき，$t_i \succ_{\mathsf{QPL}} u_1 \succ_{\mathsf{QPL}} \cdots$ となる無限列が存在し，極小性に矛盾する．$u_0 \succ_{\mathsf{QPL}} u_1 \succ_{\mathsf{QPL}} \cdots \succ_{\mathsf{QPL}} u_{p-1} \succ_{\mathsf{QPL}} u_p \succ_{\mathsf{QPL}} u_{p+1} \succ_{\mathsf{QPL}} \cdots$ の無限列について $u_0 \succ_{\mathsf{QPL}} u_1 \succ_{\mathsf{QPL}} \cdots \succ_{\mathsf{QPL}} u_{p-1} \succ_{\mathsf{QPL}} u_p$ にあわられる擬置換軽経路順序は (S2) または (S3) をみたし，$u_p \succ_{\mathsf{QPL}} u_{p+1}$ で初めて (S1) をみたすような $p > 0$ が存在すると仮定する．$u_p = f(\ldots, t_i, \ldots)$ とおくと，$t_i \succeq_{\mathsf{QPL}} u_{p+1}$ となる．また，$u_{p-1} \succ_{\mathsf{QPL}} f(\ldots, t_i, \ldots)$ であり (S2) または (S3) をみたすので，$u_{p-1} \succ_{\mathsf{QPL}} t_i$．このとき，$u_0 \succ_{\mathsf{QPL}} u_1 \succ_{\mathsf{QPL}} \cdots \succ_{\mathsf{QPL}} u_{p-1} \succ_{\mathsf{QPL}} t_i \succ_{\mathsf{QPL}} u_{p+1} \succ_{\mathsf{QPL}} \cdots$ となる無限列が存在するので，極小性に矛盾する．したがって，無限列には (S1) をみたす $u_i \succ_{\mathsf{QPL}} u_{i+1}$ はない．

よって，無限列 $u_0 \succ_{\mathsf{QPL}} u_1 \succ_{\mathsf{QPL}} u_2 \succ_{\mathsf{QPL}} \cdots$ は (S2) または (S3) のいずれかをみたすので，$u_0 \succeq^{\Lambda} u_1 \succeq^{\Lambda} u_2 \succeq^{\Lambda} \cdots$ と書ける．ここで，$\succ^{\Lambda}$ は整礎であるから，ある q が存在して $u_q =^{\Lambda} u_{q+1} =^{\Lambda} u_{q+2} =^{\Lambda} \cdots$ となる．このとき，無限列 $u_q \succ_{\mathsf{QPL}} u_{q+1} \succ_{\mathsf{QPL}} u_{q+2} \succ_{\mathsf{QPL}} \cdots$ にあらわれる擬置換軽経路順序は (S3) をみたしている．したがって，$u_k = h(v_1^k, \ldots, v_r^k; v_{r+1}^k, \ldots, v_l^k)$ $(k \geq q)$ とおくと，$\{v_1^k, \ldots, v_r^k\} \succ_{\mathsf{L}}^{\mathcal{P}} \{v_1^{k+1}, \ldots, v_r^{k+1}\} \succ_{\mathsf{L}}^{\mathcal{P}} \{v_1^{k+2}, \ldots, v_r^{k+2}\} \succ_{\mathsf{L}}^{\mathcal{P}} \ldots$ となる無限列が存在する．これは $\succ_{\mathsf{L}}^{\mathcal{P}}$ が整礎であることに矛盾する．したがって，擬置換軽経路順序は整礎である．　□

5　擬置換軽経路順序の正規形サイズ

ここでは，文献 [11] での多項式サイズ正規形の証明を擬置換軽経路順序に適用する．

まず，ある定数 $d \geq 2$ によって数値を定めた多項式 $F_k : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ （$\mathbb{N}$ は自然数の集合) の系列を次のように定義する．

$$F_0(\mathsf{n}) = \mathsf{n}^d \tag{1}$$

$$F_{k+1}(\mathsf{n}) = F_k^d(\mathsf{n}) \tag{2}$$

定義 5.1 [11] $\mathcal{T}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$ 上の解釈 $[\ ] : \mathcal{T}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) \mapsto \mathbb{N}$ を次のように定義する．

- $[b] = d$ 　　(b が定数のとき)
- $[c(;t_1,\ldots,t_n)] = \max_{1\leq j\leq n}[t_j] + d$ 　($c \in \mathcal{C}$ のとき)
- $[f(t_1,\ldots,t_p;t_{p+1},\ldots,t_n)] = F_k(\max(d, \Sigma_{i=1}^p[t_i])) + \max_{p+1\leq j\leq n}[t_j]$
  ($f \in \mathcal{D}$ のランクが k のとき)

また，系列 F_k は次のような特性をもつ．

命題 5.2 [11] あらゆる n, k, d について次のことが成り立つ．

1. $F_k(\mathsf{n}) = \mathsf{n}^{d^{d^k}}$
2. $F_{k+1}^{\alpha}(\mathsf{n}) = F_k^{\alpha d}(\mathsf{n})$
3. あらゆる $j \leq k$ と $\mathsf{n} \leq \mathsf{m}$ について $\mathsf{n} \leq F_j(\mathsf{n}) \leq F_k(\mathsf{m})$.

命題 5.3 [11] 任意の k と $d \geq 2$ について次のことが成り立つ．

1. 任意の $\mathsf{n} \geq d$ と $\alpha, \beta > 0$ について，$F_k^{\alpha}(\mathsf{n}) + F_k^{\beta}(\mathsf{n}) \leq F_k^{\alpha+\beta}(\mathsf{n})$
2. 任意の n と $\alpha < d$ について，$F_k^{\alpha}(\mathsf{n}+1) + F_{k+1}(\mathsf{n}) \leq F_{k+1}(\mathsf{n}+1)$.

以下では $d \geq 2$ と仮定する．

また，項と解釈 $[\ ]$ について次の補題を示す．

補題 5.4 任意の項 $s \in \mathcal{T}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$ と $\mathcal{T}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$ 上の解釈 $[\ ]$ における定数 d について，$[s] \geq d$ となる．また，$s \in \mathcal{T}(\mathcal{C})$ ならば，$[s] \leq d \cdot |s|$ となる．

(証明) $[s] \geq d$ について $[\ ]$ の定義で場合分けする．s が定数の場合は，定義から $[s] = d$. $s = c(;s_1,\ldots,s_n)$ かつ $c \in \mathcal{C}$ の場合，$[s] = \max_{1\leq j\leq n}[s_j] + d \geq d$ となり成立．$s = f(s_1,\ldots,s_p;s_{p+1},\ldots,s_n)$ かつ $f \in \mathcal{D}$ ($rank(f) = k$) の場合，$[s] = F_k(\max(d, \Sigma_{i=1}^p[s_i])) + \max_{p+1\leq j\leq n}[s_j]$ となる．$\max(d, \Sigma_{i=1}^p[s_i]) \geq d$ となるので，命題 5.2(3) より $F_k(\max(d, \Sigma_{i=1}^p[s_i])) \geq d$. よって，$[s] \geq d$ となる．

次に $[s] \leq d \cdot |s|$ を s の構造による帰納法で示す．s が定数の場合は $|s| = 1$ なので，定義から $[s] = d = d \cdot |s|$. $s = c(;s_1,\ldots,s_n)$ かつ $c \in \mathcal{C}$ の場合，$[c(;s_1,\ldots,s_n)] = \max_{1\leq i\leq n}[s_i] + d$. 一般性を失うことなく $\max_{1\leq i\leq n}[s_i] = [s_1]$ と仮定すると，帰納法の仮定より $[s_1] \leq d \cdot |s_1|$ なので，$[c(;s_1,\ldots,s_n)] \leq \max_{1\leq i\leq n}[s_i] + d = [s_1] + d \leq d \cdot |s_1| + d \leq d \cdot (1 + |s_1|) \leq d \cdot |s|$. よって，$[s] \leq d \cdot |s|$ となる．　□

次の定理は，文献 [11] における置換軽経路順序 (軽多重集合経路順序) に関する定理をもとにしており，同様の定理が擬置換軽経路順序でも示すことができる．

定理 5.5 s, t を $|s| < d$ かつ $t \succ_{\mathsf{QPL}} s$ となるような $\mathcal{T}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}, \mathcal{V})$ 上の項とする．このとき，任意の基底代入 σ について $[t\sigma] > [s\sigma]$ となる．

(証明) $|t|$ に関する帰納法で示す．まず，$|t| > |t'|$ となる t' と任意の $|u| < d$ となる u について $t' \succ_{\mathsf{QPL}} u$ ならば，任意の基底代入 σ について $[t'\sigma] > [u\sigma]$ と仮定する．

このとき，次のように t の構造による場合分けする．

- $t \in \mathcal{V}$ の場合，$t \succ_{\mathsf{QPL}} s$ となる s は存在しない．
- $t = c(;t_1, \ldots, t_n)$ かつ $c \in \mathcal{C}$ の場合．このとき，$t \succ_{\mathsf{L}} s$ となるか，$t_j \succeq_{\mathsf{QPL}} s$ となる $1 \leq j \leq n$ が存在する．前者の場合も，$t_j \succeq_{\mathsf{L}} s$ となる $1 \leq j \leq n$ が存在するので，定理 4.8(1) より $t_j \succeq_{\mathsf{QPL}} s$ となる $1 \leq j \leq n$ が存在する．よって，帰納法の仮定より，$[t_j\sigma] \geq [s\sigma]$ となる．このとき，$\max_{1 \leq j \leq n}[t_j\sigma] + d > [s\sigma]$ となるので，$[t\sigma] > [s\sigma]$ は成り立つ．
- $t = f(t_1, \ldots, t_p; t_{p+1}, \ldots, t_n)$ で $f \in \mathcal{D}$ のランクを $k+1$ とする場合．このとき，次の (a) から (c) を示す[2]．

  (a) $t \succ_{\mathsf{L}} s$ ならば，$[s\sigma] \leq F_k^{|s|}(A)$

  (b) $t \succ_{\mathsf{QL}} s$ ならば，$[s\sigma] \leq F_k^{|s|}(A) + B$

  (c) $t \succ_{\mathsf{QPL}} s$ ならば，$[s\sigma] \leq F_k^{|s|}(A) + F_{k+1}(A-1) + B$

  ただし，$A = \max(d, \Sigma_{i=1}^{p}[t_i\sigma])$，$B = \max_{p+1 \leq j \leq n}[t_j\sigma]$ とする．

まず，(a) について $|s|$ の帰納法で示す．ここで，$t \succ_{\mathsf{L}} s$ と仮定する．

- $|s| = 1$ のとき，s が定数ならば $[s\sigma] = d \leq A \leq F_k^{|s|}(A)$ となる．s が変数ならば，$t_i \succeq_{\mathsf{L}} s$ となる $1 \leq i \leq p$ が存在する．命題 4.8 より $t_i \succeq_{\mathsf{QPL}} s$ となり，$|t|$ に関する帰納法の仮定より $[t_i\sigma] \geq [s\sigma]$ となる．よって，$[s\sigma] \leq [t\sigma] \leq A \leq F_k^{|s|}(A)$ より成り立つ．
- $|s| > 1$ のとき，定義 3.2 によって場合分けする．

  (i) $t_i \succeq_{\mathsf{L}} s$ となる $1 \leq i \leq p$ が存在する場合，命題 4.8 と $|t|$ に関する帰納法の仮定より $A \geq [t_i\sigma] \geq [s\sigma]$ となる．

  (ii) $s = c(;s_1, \ldots, s_m)$ $(c \in \mathcal{C})$ かつ，すべての $1 \leq i \leq m$ で $t \succ_{\mathsf{L}} s_i$ となる場合．

$$
\begin{array}{rcll}
[s\sigma] & = & \max_{1 \leq i \leq m}[s_i\sigma] + d & \\
& \leq & \max_{1 \leq i \leq m} F_k^{|s_i|}(A) + d & (\text{(a) の帰納法の仮定より}) \\
& \leq & \max_{1 \leq i \leq m} F_k^{|s_i|}(A) + F_k(A) & (d \leq A \leq F_k(A) \text{ より}) \\
& \leq & \Sigma_{i=1}^{m} F_k^{|s_i|}(A) + F_k(A) & \\
& \leq & F_k^{\Sigma_{i=1}^{m}|s_i|}(A) + F_k(A) & (d \leq A \text{ と命題 5.3(1) より}) \\
& \leq & F_k^{1+\Sigma_{i=1}^{m}|s_i|}(A) & (d \leq A \text{ と命題 5.3(1) より}) \\
& \leq & F_k^{|s|}(A) &
\end{array}
$$

  (iii) $s = g(s_1, \ldots, s_q; s_{q+1}, \ldots, s_m)$ $(g \in \mathcal{D})$，$f \succ_{\mathcal{F}} g$ かつ，すべての $1 \leq i \leq m$ で $t \succ_{\mathsf{L}} s_i$ となる場合．また，$f \succ_{\mathcal{F}} g$ より $g \in \mathcal{F}$ のランクは $\rho < k+1$ となる．このとき，

$$
\begin{array}{rcll}
[s\sigma] & = & F_\rho(\max(d, \Sigma_{i=1}^{q}[s_i\sigma])) + \max_{q+1 \leq j \leq m}[s_j\sigma] & \\
& \leq & F_\rho(\max(d, \Sigma_{i=1}^{q}[s_i\sigma])) + \Sigma_{j=q+1}^{m}[s_j\sigma] & \\
& \leq & F_\rho(\max(d, \Sigma_{i=1}^{q} F_k^{|s_i|}(A))) + \Sigma_{j=q+1}^{m} F_k^{|s_j|}(A) & (\text{(a) の帰納法の仮定より}) \\
& \leq & F_\rho(\max(d, F_k^{\Sigma_{i=1}^{q}|s_i|}(A))) + F_k^{\Sigma_{j=q+1}^{m}|s_j|}(A) & (d \leq A \text{ と命題 5.3(1) より}) \\
& \leq & \max(F_k(d), F_k^{1+\Sigma_{i=1}^{q}|s_i|}(A)) + F_k^{\Sigma_{j=q+1}^{m}|s_j|}(A) & (\rho \leq k \text{ と命題 5.2(3) より}) \\
& = & F_k^{1+\Sigma_{i=1}^{q}|s_i|}(A) + F_k^{\Sigma_{j=q+1}^{m}|s_j|}(A) & (d \leq A \text{ と命題 5.2(3) より}) \\
& \leq & F_k^{1+\Sigma_{i=1}^{q}|s_i|+\Sigma_{j=q+1}^{m}|s_j|}(A) & (d \leq A \text{ と命題 5.3(1) より}) \\
& \leq & F_k^{|s|}(A) &
\end{array}
$$

[2] (a) の証明は文献 [11] で示されており，(c) の証明は $\succ_{\mathsf{PL}}$ における定理の証明を踏襲している．(b) および (c)(v) は本論文独自の証明である．

以上から，(a) は成り立つ．

次に，(b) について $|s|$ の帰納法で示す．ここで，$t \succ_{\mathsf{QL}} s$ と仮定する．

- $|s| = 1$ のとき，s が定数ならば $[s\sigma] = d \le A \le F_k^{|s|}(A) + B$ となる．s が変数ならば，$t \succ_{\mathsf{L}} s$，または $t_i \succeq_{\mathsf{QPL}} s$ となる $1 \le i \le m$ が存在する．$t \succ_{\mathsf{L}} s$ のときは，$t_i \succeq_{\mathsf{L}} s$ となる $1 \le i \le p$ が存在し，定理 4.8(1) から $t_i \succeq_{\mathsf{QPL}} s$ となる．よって，$|t|$ に関する帰納法の仮定より $[t_i\sigma] \ge [s\sigma]$ となるので，$[s\sigma] \le [t_i\sigma] \le A + B \le F_k^{|s|}(A) + B$ より成立．
- $|s| > 1$ のとき，定義 4.1 によって場合分けする．
  - (i) $t \succ_{\mathsf{L}} s$ の場合．(a) より $[s\sigma] \le F_k^{|s|}(A) \le F_k^{|s|}(A) + B$ より成立する．
  - (ii) $t_i \succeq_{\mathsf{QPL}} s$ の場合．$|t|$ に関する帰納法の仮定より，$[t_i\sigma] \ge [s\sigma]$ となる．よって，$[s\sigma] \le [t_i\sigma] \le A + B \le F_k^{|s|}(A) + B$ から成立する．
  - (iii) $s = c(;s_1, \ldots, s_m)$ $(c \in \mathcal{C})$ かつ，すべての $1 \le i \le m$ で $t \succ_{\mathsf{QL}} s_i$ となる場合．

$$
\begin{array}{rcll}
[s\sigma] & = & \max_{1 \le i \le m}[s_i\sigma] + d & \\
& \le & \max_{1 \le i \le m}(F_k^{|s_i|}(A) + B) + d & \text{((b) の帰納法の仮定より)} \\
& \le & \max_{1 \le i \le m} F_k^{|s_i|}(A) + F_k(A) + B & (d \le A \le F_k(A) \text{ より}) \\
& \le & \Sigma_{i=1}^m F_k^{|s_i|}(A) + F_k(A) + B & \\
& \le & F_k^{\Sigma_{i=1}^m |s_i|}(A) + F_k(A) + B & (d \le A \text{ と命題 5.3(1) より}) \\
& \le & F_k^{1+\Sigma_{i=1}^m |s_i|}(A) + B & (d \le A \text{ と命題 5.3(1) より}) \\
& \le & F_k^{|s|}(A) + B &
\end{array}
$$

  - (iv) $s = g(s_1, \ldots, s_q; s_{q+1}, \ldots, s_m)$ $(g \in \mathcal{D}$，$f \succ_{\mathcal{F}} g$ かつ，すべての $1 \le i \le q$ で $t \succ_{\mathsf{L}} s_i$ かつ，すべての $q+1 \le j \le m$ で $t \succ_{\mathsf{QL}} s_j$ となる場合．このとき，g のランクは $\rho < k+1$ となる．

$$
\begin{array}{rcll}
[s\sigma] & = & F_\rho(\max(d, \Sigma_{i=1}^q [s_i\sigma])) + \max_{q+1 \le j \le m}[s_j\sigma] & \\
& \le & F_\rho(\max(d, \Sigma_{i=1}^q [s_i\sigma])) + \max_{q+1 \le j \le m} F_k^{|s_j|}(A) + B & \text{((b) の帰納法の仮定より)} \\
& \le & F_\rho(\max(d, \Sigma_{i=1}^q [s_i\sigma])) + \Sigma_{j=q+1}^m F_k^{|s_j|}(A) + B & \\
& \le & F_\rho(\max(d, \Sigma_{i=1}^q F_k^{|s_i|}(A))) + \Sigma_{j=q+1}^m F_k^{|s_j|}(A) + B & \text{((a) より)} \\
& \le & F_\rho(\max(d, F_k^{\Sigma_{i=1}^q |s_i|}(A))) + F_k^{\Sigma_{j=q+1}^m |s_j|}(A) + B & (d \le A \text{ と命題 5.3(1) より}) \\
& \le & \max(F_k(d), F_k^{1+\Sigma_{i=1}^q |s_i|}(A)) + F_k^{\Sigma_{j=q+1}^m |s_j|}(A) + B & (\rho \le k \text{ と命題 5.2(3) より}) \\
& = & F_k^{1+\Sigma_{i=1}^q |s_i|}(A) + F_k^{\Sigma_{j=q+1}^m |s_j|}(A) + B & (d \le A \text{ と命題 5.2(3) より}) \\
& \le & F_k^{1+\Sigma_{i=1}^q |s_i| + \Sigma_{j=q+1}^m |s_j|}(A) + B & (d \le A \text{ と命題 5.3(1) より}) \\
& \le & F_k^{|s|}(A) + B &
\end{array}
$$

以上から，(b) は成立する．

最後に，(c) について $|s|$ の帰納法で示す．ここで，$t \succ_{\mathsf{QPL}} s$ と仮定する．

- $|s| = 1$ のとき，s が定数ならば $[s\sigma] = d \le A \le F_k^{|s|}(A) + B$ となる．s が変数ならば，$t \succ_{\mathsf{L}} s$，または $t_i \succeq_{\mathsf{QPL}} s$ となる $1 \le i \le m$ が存在する．$t \succ_{\mathsf{L}} s$ のときは，$t_i \succeq_{\mathsf{L}} s$ となる $1 \le i \le p$ が存在し，定理 4.8(1) から $t_i \succeq_{\mathsf{QPL}} s$ となる．よって，$|t|$ に関する帰納法の仮定より $[t_i\sigma] \ge [s\sigma]$ となるので，$[s\sigma] \le [t_i\sigma] \le A + B \le F_k^{|s|}(A) + F_{k+1}(A-1) + B$ より成立．
- $|s| > 1$ のとき，定義 4.1 によって場合分けする．
  - (i) $t \succ_{\mathsf{L}} s$ の場合．(a) より $[s\sigma] \le F_k^{|s|}(A) \le F_k^{|s|}(A) + F_{k+1}(A-1) + B$ より成立する．

(ii) $t_i \succeq_{\mathsf{QPL}} s$ となる $1 \le i \le n$ が存在する場合．$|t|$ に関する帰納法の仮定より，$[t_i\sigma] \ge [s\sigma]$ となる．よって，$[s\sigma] \le [t_i\sigma] \le A + B \le F_k^{|s|}(A) + F_{k+1}(A-1) + B$ から成立する．

(iii) $s = c(;s_1, \ldots, s_m)$ $(c \in \mathcal{C})$ かつ，すべての $1 \le i \le m$ で $t \succ_{\mathsf{QPL}} s_i$ となる場合．

$$\begin{array}{rcll} [s\sigma] & = & \max_{1\le i\le m}[s_i\sigma] + d & \\ & \le & \max_{1\le i\le m} F_k^{|s_i|}(A) + F_{k+1}(A-1) + B + d & \text{((c) の帰納法の仮定より)} \\ & \le & \max_{1\le i\le m} F_k^{|s_i|}(A) + F_{k+1}(A-1) + B + F_k(A) & (d \le A \le F_k(A) \text{ より}) \\ & \le & \Sigma_{i=1}^m F_k^{|s_i|}(A) + F_{k+1}(A-1) + B + F_k(A) & \\ & \le & F_k^{\Sigma_{i=1}^m |s_i|}(A) + F_{k+1}(A-1) + B + F_k(A) & (d \le A \text{ と命題 5.3(1) より}) \\ & \le & F_k^{1+\Sigma_{i=1}^m |s_i|}(A) + F_{k+1}(A-1) + B & (d \le A \text{ と命題 5.3(1) より}) \\ & \le & F_k^{|s|}(A) + F_{k+1}(A-1) + B & \end{array}$$

(iv) $s = g(s_1, \ldots, s_q; s_{q+1}, \ldots, s_m)$ $(g \in \mathcal{D})$，$f \succ_{\mathcal{F}} g$，すべての $1 \le i \le q$ で $t \succ_{\mathsf{L}} s_i$ かつ，すべての $q+1 \le j \le m$ で $t \succ_{\mathsf{QPL}} s_j$ となる場合．また，g のランクは $\rho < k+1$ となる．(a) より，すべての $1 \le i \le q$ について，$[s_i\sigma] \le F_k^{|s_i|}(A)$ が成り立つ．このとき，

$$\begin{array}{rcll} F_\rho(\max(d, \Sigma_{i=1}^q [s_i\sigma])) & \le & F_\rho(\max(d, \Sigma_{i=1}^q F_k^{|s_i|}(A))) & \text{((a) より)} \\ & \le & F_\rho(\max(d, F_k^{\Sigma_{i=1}^q |s_i|}(A))) & (d \le A \text{ と命題 5.3(1) より}) \\ & \le & \max(F_k(d), F_k^{1+\Sigma_{i=1}^q |s_i|}(A)) & (\rho \le k \text{ と命題 5.2(3) より}) \\ & = & F_k^{1+\Sigma_{i=1}^q |s_i|}(A) & (d \le A \text{ と命題 5.2(3) より}) \end{array}$$

定義から，$[s\sigma] = F_\rho(\max(d, \Sigma_{i=1}^q [s_i\sigma])) + \max_{p+1\le j\le m}[s_j\sigma]$ となるので，前述の不等式から，$[s\sigma] \le F_k^{1+\Sigma_{i=1}^q |s_i|}(A) + \max_{j=q+1}^m [s_j\sigma]$ となる．ここで，$[s_j\sigma]$ に対するの帰納法の仮定を用いると，次のようになる．

$$\begin{array}{rcll} [s\sigma] & \le & F_k^{1+\Sigma_{i=1}^q |s_i|}(A) + \max_{q+1\le j\le m}(F_k^{|s_j|}(A) + F_{k+1}(A-1) + B) & \\ & \le & F_k^{1+\Sigma_{i=1}^q |s_i|}(A) + \Sigma_{j=q+1}^m F_k^{|s_j|}(A) + F_{k+1}(A-1) + B & \\ & \le & F_k^{1+\Sigma_{i=1}^q |s_i|}(A) + F_k^{\Sigma_{j=q+1}^m |s_j|}(A) + F_{k+1}(A-1) + B & (d \le A \text{ と命題 5.3(1) より}) \\ & \le & F_k^{1+\Sigma_{i=1}^q |s_i| + \Sigma_{j=q+1}^m |s_j|}(A) + F_{k+1}(A-1) + B & (d \le A \text{ と命題 5.3(1) より}) \\ & \le & F_k^{|s|}(A) + F_{k+1}(A-1) + B & \end{array}$$

(v) $s = f(s_1, \ldots, s_p; s_{p+1}, \ldots, s_n)$ $(f \in \mathcal{D})$ かつ，$\{t_1, \ldots, t_p\} \succ_{\mathsf{L}}^{\mathcal{P}} \{s_1, \ldots, s_p\}$ かつ，すべての $p+1 \le j \le n$ で $t \succ_{\mathsf{QL}} s_j$ となる場合．このとき，定義 3.1 の π について，一般性を失うことなく $\pi(i) = i$ と仮定すると，$t_{i_0} \succ_{\mathsf{L}} s_{i_0}$ となる $1 \le i_0 \le p$ が存在し，すべての $1 \le i \le p$ について $t_i \succeq_{\mathsf{L}} s_i$ となる．よって，$\succ_{\mathsf{L}} \subseteq \succ_{\mathsf{QPL}}$ と $|t|$ に関する帰納法の仮定より，$[t_{i_0}\sigma] > [s_{i_0}\sigma]$ および $[t_i\sigma] \ge [s_i\sigma]$ となる．したがって，$\Sigma_{i=1}^p [s_i\sigma] < \Sigma_{i=1}^p [t_i\sigma] \le A$ が成立する．よって，$\Sigma_{i=1}^p [s_i\sigma] \le A - 1$．また，$[t_{i_0}\sigma] > [s_{i_0}\sigma]$ となる i_0 が存在するので，$p > 0$ となる．よって，補題 5.4 より $[s_{i_0}\sigma] \ge d$ となるので，$d \le [s_{i_0}\sigma] < [t_{i_0}\sigma] \le A$ より，$d \le A - 1$ が成立する．よって，$\max(d, \Sigma_{i=1}^p [s_i\sigma]) \le A - 1$．また，すべての $p+1 \le j \le n$ について $t \succ_{\mathsf{QL}} s_j$ となるが，(b) より $[s_j\sigma] \le F_k^{|s_j|}(A) + B$ となる．これより，$\max_{j=p+1}^n [s_j\sigma] \le F_k^{|s|}(A) + B$ となる．したがって，

$$\begin{array}{rcl} [s\sigma] & = & F_{k+1}(\max(d, \Sigma_{i=1}^p [s_i\sigma])) + \max_{p+1\le j\le n}[s_j\sigma] \\ & \le & F_{k+1}(A-1) + F_k^{|s|}(A) + B \end{array}$$

以上から，(c) も成り立つ．

定理の証明に戻ると，(c) より，$[s\sigma] \le F_k^{|s|}(A) + F_{k+1}(A-1) + B$ が得られる．命題 5.3(2) から $F_k^{|s|}(A) + F_{k+1}(A-1) < F_{k+1}(A)$ となるので，$[s\sigma] < F_{k+1}(A) + B = [f(t_1, \ldots, t_p; t_{p+1}, \ldots, t_n)\sigma]$ となる．したがって，$[t\sigma] > [s\sigma]$ となる．　□

命題 5.6 [11] $s, t \in \mathcal{T}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}, \mathcal{V})$ について，$[t] \geq [s]$ ならば $[f(\ldots, t, \ldots)] \geq [f(\ldots, s, \ldots)]$.

以上から，構成子システムの書き換えにおいて次のような定理が成り立つ．

定理 5.7 $\langle \mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{R} \rangle$ を数価関数 v のもとで $\succ_{\mathsf{QPL}}$ で順序付けできる構成子システムとする．このとき，任意の項 $s, t \in \mathcal{T}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$ が $t \xrightarrow{*} s$ をみたすならば，$[t] \geq [s]$ となる．

(証明) あらゆる規則 $l \to r$ について $d > |r|$ となるような，解釈 $[\ ]$ における d を選択する．このとき，導出列の長さ n についての帰納法で示す．ただし，$\to$ での n 回の書き換えを $\to^n$ と記す．

- $n = 0$ のとき，$t = s$ となるので，$[t] = [s]$ となる．
- $n > 1$ のとき，$t \to^n s' \to s$ とする．帰納法の仮定より，$t \to^n s'$ ならば $[t] \geq [s']$ である．ここで，$s' = C\langle l\sigma \rangle, s = C\langle r\sigma \rangle$ となる規則 $l \to r$，代入 σ，文脈 C について考える．$l \to r$ はそれぞれ，$l \succ_{\mathsf{QPL}} r$ をみたす．また，定理の仮定から $d > |r| \geq 1$ なので，定理 5.5 を適用できる．よって，$[l\sigma] \geq [r\sigma]$．さらに，命題 5.6 から $[C\langle l\sigma \rangle] \geq [C\langle r\sigma \rangle]$，つまり，$[s'] \geq [s]$ となる．

以上から，$[t] \geq [s]$ は成立する． □

ここで，関数 $level$ を次のように定義する．

定義 5.8 ソート s のレベルを以下をみたす関数 $level : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{N}$ により与える．$\mathsf{s} \succ_{\mathcal{S}} \mathsf{s}'$ ならば，$level(\mathsf{s}) > level(\mathsf{s}')$．また，ソート s をもつ項 t について $level(t) = level(\mathsf{s})$ と定義する．

これより，以下の命題が成立する．

命題 5.9 [11] $\mathcal{S}$ が $\mathcal{C}$ において簡素であるとする．$\mathcal{C}$ に含まれる構成子の最大のアリティを n，$d = \max(2, n)$ とする．このとき，あらゆる項 $t \in \mathcal{T}(\mathcal{C})$ について，$|t| \leq d^k \cdot ht(t)^{k+1}$ となる．ただし，$k = level(t)$ とする．

したがって，定理 5.7 の結果から以下の定理が成り立つ．

定理 5.10 $\langle \mathcal{S}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{R} \rangle$ を簡素な構成子システムとする．ある数価関数 v とある $\succ_{\mathcal{F}}$ のもとで，任意の書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ について $l \succ_{\mathsf{QPL}} r$ と仮定する．このとき，ある多項式 p が存在し，任意の $f \in \mathcal{D}$，$v_0, \ldots, v_n \in \mathcal{T}(\mathcal{C})$ について $f(v_1, \ldots, v_n) \xrightarrow{!} v_0$ をみたすならば $|v_0| \leq p(\max_{1 \leq i \leq n} |v_i|)$.

(証明) $[\ ]$ の定義から $[f(v_1, \ldots, v_n)] \leq q(\max_{1 \leq i \leq n}[v_i])$ となる多項式 q が存在する．また，$f(v_1, \ldots, v_n) \xrightarrow{!} v_0$ なので定理 5.7 より $[v_0] \leq [f(v_1, \ldots, v_n)]$ となる．よって，$v_i \in \mathcal{T}(\mathcal{C})$ より $[v_0] \leq q(\max_{1 \leq i \leq n}[v_i])$ となる．また，$[v_i] < d \cdot |v_i|$ なので，$[v_0] \leq q'(\max_{1 \leq i \leq n} |v_i|)$ となる多項式 q' が存在する．ここで，命題 5.9 より，ある定数 k について，$|v_0| \leq d^k \cdot ht(v_0)^{k+1}$．$ht(v_0) \leq [v_0]$ であるので，$|v_0| \leq d^k \cdot q'(\max_{1 \leq i \leq n} |v_i|)^{k+1}$ となる．

したがって，$|v_0| \leq p(\max_{1 \leq i \leq n} |v_i|)$ となる多項式 p が存在する． □

定理 5.10 にもとづき，文献 [11] と同様にして擬置換軽経路順序で順序付けできる簡素な構成子システムでは，正規形評価手続き EVAL を用いて多項式計算時間で正規形を計算することができる．一方，文献 [7] の結果を用いることで，多項式時間で計算可能な任意の関数は，擬置換軽経路で順序付けできる簡素な構成子システムであらわすことができる．

定理 5.11 $\succ_{\mathsf{QPL}}$ で順序付け可能な簡素な構成子システムは，多項式時間計算可能である．また，あらゆる多項式時間関数は，$\succ_{\mathsf{QPL}}$ で順序付けできる簡素な構成子システムで計算できる．

6 おわりに

本論文では，項書き換えシステムにおける多項式サイズ正規形を保証するための書き換え規則の順序付けとして擬置換軽経路順序を提案した．そして，簡素な構成子システムにおいては，擬置換軽経路順序によってすべての書き換え規則が順序付けられるとき，項の正規形が多項式サイズとなることを証明した．また，提案する擬置換軽経路順序が軽多重集合経路順序 [11] の拡張となっていることも示すとともに，軽多重集合経路順序では順序付け不能な項書き換えシステムにおいても擬置換軽経路順序によって順序付けが可能である場合があることを示した．

今後の課題としては，大規模な実験による擬置換軽経路順序と置換軽経路順序の比較によって実際の適用範囲の計測や，例 4.7 などの項書き換えシステムについて順序付けできるような手法の考案が挙げられる．また，導出列長が多項式サイズとなる多項式経路順序 [3][4] などにおいて本論文と同様な拡張が検討されており [5]，その成果との比較検証が考えられる．

謝辞 本論文を詳しく読んでくださり，大変有益なコメントを賜わった査読者に感謝致します．なお，本研究は一部日本学術振興会科学研究費 20500002，22500002 の補助を受けて行われた．

参考文献

[1] Toshiyasu Arai and Georg Moser, Proofs of termination of rewrite systems for polytime functions, In *Proceedings of the 25th Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science*, LNCS, Vol.3821, pp.529–540, 2005.

[2] Thomas Arts and Jürgen Giesl, Termination of term rewriting using dependency pairs, *Theoretical Computer Science*, Vol.236, pp.133–178, 2000.

[3] Martin Avanzini and Georg Moser, Complexity analysis by rewriting, In *Proceedings of the 9th International Sumposium on Functional and Logic Programming*, LNCS, Vol.4989, pp.130–146, 2008.

[4] Martin Avanzini, *Automation of Polynomial Path Orders*, Master Thesis, University of Innsbruck, Faculty of Mathematics, Computer Science and Physics, 2009.

[5] Martin Avanzini and Georg Moser, Polynomial path orders and the rules of predicative recursion with parameter substitution, In *Proceedings of the 10th International Workshop on Termination*, 2009.

[6] Franz Baader and Tobias Nipkow, *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, 1998.

[7] Stephen Bellantoni and Stephen Cook, A new recursion-theoretic characterization of the polytime functions, *Computational Complexity*, Vol.2, pp.97–110, 1992.

[8] Evelyne Contejean, Claude Marche, Ana Paula Tomas and Xavier Urbain, Mechanically proving termination using polynomial interpretations, *Journal of Automated Reasoning*, Vol.34, pp.325–363, 2005.

[9] Georg Moser, Andreas Schnabl, and Johannes Waldmann, Complexity analysis of term rewriting based on matrix and context dependent interpretations, In *Proceedings of Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science 2008*, pp.304–315, 2008.

[10] Nao Hirokawa and Georg Moser, Automated complexity analysis based on the dependency pair method, In *Proceedinds of Automated Reasoning, 4th International Joint Conference*, LNCS, Vol.5195, pp.364–380, 2008.

[11] Jean-Yves Marion, Analysing the implicit complexity of programs, *Infomation and Computation*, Vol.183, pp.2–18, 2003.

[12] Yoshihito Toyama, Termination proof of S-expression rewriting systems with recursive path relations, In *Proceedings of the 19th International Conference on Rewriting Techniques and Applications*, LNCS, Vol.5117, pp.381–391, 2008.