日本ソフトウェア科学会第 28 回大会 (2011 年度) 講演論文集

永続性にもとづく項書き換えシステムの合流性証明

鈴木 翼　青戸等人　外山芳人

項書き換えシステムの合流性判定において，永続性にもとづく分解の有効性が知られている．これは，多ソート型付けにもとづいて項書き換えシステムを部分システムに分解し，部分システムの合流性から全体の合流性を判定する方法である．しかし，型付けによって部分システムへ分解できない場合には，このような合流性判定方法は使えない．本論文では，弱左線形な型付け項書き換えシステムというクラスを導入することによって，部分システムに分解できない非左線形項書き換えシステムに対しても，永続性にもとづく合流性の判定が可能になることを示す.

1　はじめに

合流性は項書き換えシステムの重要な性質であり，多くの研究がなされている．停止性をもつ項書き換えシステムの合流性は決定可能であり，停止性をもたない場合でも，左線形な項書き換えシステムの場合にはいくつかの合流条件が提案されている [3] [4] [6] [7]．しかし，停止性をもたない非左線形な項書き換えシステム R の合流性判定は一般に困難である．このような場合に，R に型付けを行い，型付き項書き換えシステム R^τ を構成し，R の合流性と R^τ の合流性が等価であるという永続性をもちいて R の合流性を判定する手法が提案されている [1] [2].

非左線形かつ停止性をもたない項書き換えシステム R の永続性をもちいた合流性判定例を以下に示す.

$$R = \begin{cases} f(x) \to g(x) & (1) \\ a(x,y) \to a(f(x), f(x)) & (2) \\ b(f(x),x) \to b(x, f(x) & (3) \\ b(g(x),x) \to b(x, g(x)) & (4) \end{cases}$$

R に以下の型付けを行うと R^τ が得られる.

$$\begin{array}{lcccl} f & : & 0 & \to & 0 \\ g & : & 0 & \to & 0 \\ a & : & 0 \times 0 & \to & 1 \\ b & : & 0 \times 0 & \to & 2 \end{array}$$

このとき，型 $\sigma \in \{0,1,2\}$ をもつ項に適用できる書き換え規則の集合である部分システム R^τ_σ は $R^\tau_0 = \{(1)\}$，$R^\tau_1 = \{(1),(2)\}$，$R^\tau_2 = \{(1),(3),(4)\}$ となる．R^τ_0，R^τ_1 は左線形であり R^τ_2 は停止性をもつので，従来の判定手法をもちいて合流性を示せる [3]．よって，すべての型付き項が合流するので，R^τ は合流性をもち，永続性によって R も合流性をもつ.

一方，以下のような項書き換えシステム R では型付けによる部分システムへの分解に失敗する.

$$R = \begin{cases} f(x,x) \to f(g(x), x) & (5) \\ f(g(x),x) \to f(h(x), h(x)) & (6) \\ h(g(x)) \to g(g(h(x))) & (7) \end{cases}$$

R に以下の型付けを行うと R^τ が得られる.

$$\begin{array}{lcccl} f & : & 0 \times 0 & \to & 1 \\ g & : & 0 & \to & 0 \\ h & : & 0 & \to & 0 \end{array}$$

このとき，部分システム $R^\tau_\sigma(\sigma \in \{0,1\})$ は $R^\tau_0 = \{(7)\}$ と $R^\tau_1 = \{(5),(6),(7)\}$ である．しかし，$R^\tau_1 = R^\tau$ なので，R^τ の合流性判定をより簡単な部分シス

Proving Confluence of Term Rewriting Systems based on Persistency.

Tsubasa Suzuki, Takahito Aoto, Yoshihito Toyama, 東北大学 電気通信研究所, RIEC, Tohoku University.

テムの合流性問題に還元できない．

本論文では，非左線形で停止性をもたない項書き換えシステム R から得られる型付き項書き換えシステム R^τ の合流性判定問題を，より簡単な部分システムの合流性問題に還元できない場合に，適当な条件な下で R の合流性を証明できる新しい手法を提案する．

本論文は，全 5 節で構成される．第 2 節は，準備である．第 3 節では，永続性をもちいた R の合流条件を示す．第 4 節では，合流性自動判定手続きについて説明する．第 5 節は，本研究のまとめである．

2 準備

本節では，本論文でもちいる項書き換えシステムの記法について説明する [3] [1]．

関数記号の集合を $F = \{f, g, h, \ldots\}$，変数記号の集合を $V = \{x, y, z, \ldots\}$，項の集合を $T(F, V)$ と表す．書き換え規則 $l \to r$ は，$l \notin V$ かつ $V(l) \supseteq V(r)$ をみたす項 l と r の組であり，項書き換えシステム R は書き換え規則の集合である．ここで，$V(t)$ は項 t に現れる変数の集合を表す．ある $l \to r \in R$ と文脈 C と代入 θ があるとき，項 $t = C[l\theta]$ は項 $s = C[r\theta]$ に書き換えることができ，この書き換え関係を $t \to s$ と表す．$\to$ の反射推移閉包を $\xrightarrow{*}$ と書く．また，項 t の部分項 $l\theta$ をリデックスとよぶ．リデックスをもたない項を正規形という．R の正規形の集合を $NF(R)$ と記す．$t \xrightarrow{*} s \in NF(R)$ のとき，s を t の正規形という．R の書き換え規則間に重なりがないとき，R は重なりがないという [3]．項 t が停止するとは，t からの無限の書き換えがないことであり，R で任意の項が停止するならば，R は停止性をもつという．項 t に 2 回以上出現する変数を非線形変数とよび，その集合を $V_{nl}(t)$ と記す．任意の書き換え規則 $l \to r \in R$ について $V_{nl}(l) = \emptyset$ のとき R を左線形とよぶ．任意の項 t, t_1, t_2 に対して，$t \xrightarrow{*} t_1$ かつ $t \xrightarrow{*} t_2$ ならば，ある項 s が存在し，$t_1 \xrightarrow{*} s$ かつ $t_1 \xrightarrow{*} s$ となるとき，R は合流性をもつという．

ソートの集合を S とする．型付け τ は変数 x にソート σ，n 引数関数記号 f に $n+1$ 対のソート $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n \to \sigma$ を関連づける．型付け τ のもとで項 t が型付けされるとき，t^τ と表し，その型を $\tau(t)$ と記す．τ が明らかな場合は型付き項 t^τ を t と略記する．任意の $l \to r \in R$ において，$\tau(l) = \tau(r)$ ならば，型付け τ は R において矛盾がないという．R と矛盾のない型付け τ から得られる型付き項書き換えシステムを $R^\tau = \{l^\tau \to r^\tau \mid l \to r \in R\}$ と定める．R^τ の書き換えは型付き項上で定義される．型 σ をもつ項に適用できる R^τ の書き換え規則の集合を R^τ_σ と記す．ある $l^\tau \to r^\tau \in R^\tau$ と $x \in V_{nl}(l)$ が存在し，$\sigma = \tau(x)$ となるとき型 σ を R^τ の**左非線形型**とよぶ．以下の命題より，R の合流性と R^τ の合流性は等価である [1]．

命題 1 (永続性 [1]) R が合流性をもつことと R^τ が合流性をもつことは等価である．

3 項書き換えシステムの合流条件

本節では，R^τ の合流性の十分条件を示し，それをもちいて R の合流条件を導く．なお，ここでもちいる証明方法は，メンバーシップ条件付き項書き換えシステムの合流性の証明方法 [5] を参考にしている．

変数 x に対応する定数 c_x の集合を $C_V = \{c_x \mid x \in V\}$ とし，以下では書き換えの対象となる項集合として，$T(F, V)$ の代わりに基底項集合 $T(F \cup C_V)$ をもちいる．項 t に出現する変数 $x, \ldots, z$ をすべて定数 $c_x, \ldots, c_z$ に置き換えて得られる基底項を t^c とすると，$t \to s \iff t^c \to s^c$ が成立する．したがって，項書き換えシステムが $T(F, V)$ 上で合流性をもつことと $T(F \cup C_V)$ 上で合流性をもつことは等価であることに注意する．

例 1 書き換え規則 $g(x, y) \to h(x)$ を適用すると，項 $t = f(g(x, y), z)$ から項 $s = f(h(x), z)$ が得られる．このとき，t の基底項 $t^c = f(g(c_x, c_y), c_z)$ から同様にして，項 $s^c = f(h(c_x), c_z)$ が得られる．

定義 1 (弱左線形) 型 σ が停止するとは，$\tau(t) = \sigma$ となる任意の項 t が停止することであり，R^τ が弱左線形であるとは，すべての左非線形型が停止することである．

R^τ が弱左線形であるとき，型付き項書き換えシステム R^τ_{nf} を $R^\tau_{nf} = \{l\hat{\theta} \to r\hat{\theta} \mid l \to r \in R^\tau, \hat{\theta} : V_{nl}(l) \to T(F \cup C_V) \cap NF(R^\tau)\}$ と定める．R^τ_{nf} は左線形であり，一般には無限集合であることに注意

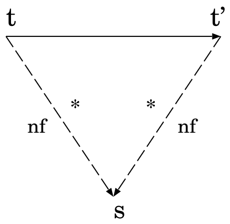

図 1　補題 2

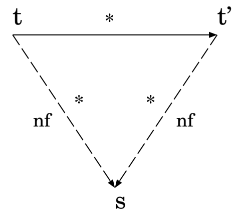

図 2　補題 3

する．

例 2 $R^\tau = \{f(x,x,y) \to g(x,y,y)\}$ とする．$V_{nl}(f(x,x,y)) = \{x\}$ より，以下の R^τ_{nf} が得られる．$R^\tau_{nf} = \{f(s,s,y) \to g(s,y,y) \mid s \in T(F \cup C_V) \cap NF(R^\tau)\}$

本節では，$T(F \cup C_V)$ 上の R^τ での書き換えを $\to$，R^τ_{nf} での書き換えを $\xrightarrow[nf]{}$ と表す．

補題 1 R^τ は弱左線形であり，型 σ を左非線形型とする．$\tau(t) = \sigma$ である任意の項 t について，ある項 $s \in NF(R^\tau)$ が存在し，$t \xrightarrow{*} s$ かつ $t \xrightarrow[nf]{*} s$ となる

証明. 項 t は R^τ で停止するので，R^τ の最内リダクションによって t の正規形 s が得られる．このとき，R^τ_{nf} でも同様の最内リダクションによって正規形 s が得られる． □

補題 2 $t \to t'$ ならば，ある項 s が存在し，$t \xrightarrow[nf]{*} s$ かつ $t' \xrightarrow[nf]{*} s$ となる (図 1).

証明. $l \to r \in R^\tau$，$t = C[l\theta] \to C[r\theta] = t'$，$\theta = [x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n, y_1 \mapsto u_1, \ldots, y_m \mapsto u_m]$，$x_1, \ldots, x_n \in V_{nl}(l)$，$y_1, \ldots, y_m \in V(l) \backslash V_{nl}(l)$ とする．このとき，t，$t' \in T(F \cup C_V)$ より $t_1, \ldots, t_n, u_1, \ldots, u_m \in T(F \cup C_V)$ となることに注意する．補題 1 をみたす $t_1, \ldots, t_n$ の正規形を $s_1, \ldots, s_n$ とする．左非線形変数から正規形への代入を $\hat{\theta} = [x_1 \mapsto s_1, \ldots, x_n \mapsto s_n]$ とし，$\theta' = [y_1 \mapsto u_1, \ldots, y_m \mapsto u_m]$ とおくと，$C[l\theta] \xrightarrow[nf]{*} C[l\hat{\theta}\theta']$，$C[r\theta] \xrightarrow[nf]{*} C[r\hat{\theta}\theta']$ となる．R^τ_{nf} の定義より，書き換え規則 $l\hat{\theta} \to r\hat{\theta} \in R^\tau_{nf}$ なので，$C[l\hat{\theta}\theta'] \xrightarrow[nf]{} C[r\hat{\theta}\theta']$ となる．ゆえに，$s = C[r\hat{\theta}\theta']$ とすれば題意が成立する． □

補題 3 R^τ_{nf} が合流性をもつとする．$t \xrightarrow{*} t'$ ならば，ある項 s が存在し，$t \xrightarrow[nf]{*} s$ かつ $t' \xrightarrow[nf]{*} s$ となる (図 2).

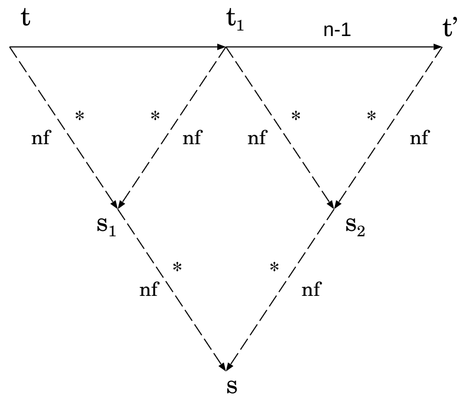

図 3　補題 3 の証明

証明. $t \xrightarrow{n} t'$ の書き換えの長さ n に関する帰納法をもちいて証明する．$\xrightarrow{n}$ は n 回の書き換えを示す.

(B.S.) $t = t'$ なので成り立つ.

(I.S.) $t \to t_1 \xrightarrow{n-1} t'$ とする (図 3)．補題 2 より，$t \xrightarrow[nf]{*} s_1$ かつ $t_1 \xrightarrow[nf]{*} s_1$ となる s_1 が存在する．また，帰納法の仮定より，$t_1 \xrightarrow[nf]{*} s_2$ かつ $t' \xrightarrow[nf]{*} s_2$ となる s_2 が存在する．このとき，R^τ_{nf} の合流性より，$s_1 \xrightarrow[nf]{*} s$ かつ $s_2 \xrightarrow[nf]{*} s$ となる s が存在するので，$t \xrightarrow[nf]{*} s$ かつ $t' \xrightarrow[nf]{*} s$ となり成立. □

補題 4 R^τ_{nf} が合流性をもつならば，R^τ も合流性をもつ.

証明. $t \xrightarrow{*} t_1$，$t \xrightarrow{*} t_2$ とする．このとき，補題 3 より $t \xrightarrow[nf]{*} s_1$ かつ $t_1 \xrightarrow[nf]{*} s_1$ となる s_1 と，$t \xrightarrow[nf]{*} s_2$ かつ $t_2 \xrightarrow[nf]{*} s_2$ となる s_2 が存在する．このとき R^τ_{nf} の合流性より，$s_1 \xrightarrow[nf]{*} s$ かつ $s_2 \xrightarrow[nf]{*} s$ となる s が存在する

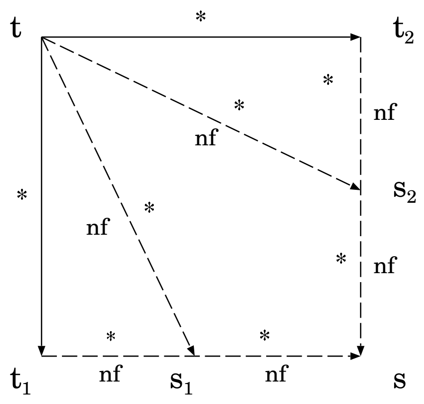

図 4　補題 4 の証明

(図 4)．ここで $\xrightarrow[nf]{} \subseteq \rightarrow$ より，$t_1 \xrightarrow{*} s$ かつ $t_2 \xrightarrow{*} s$ となる．□

定理 1 重なりのない項書き換えシステム R から得られる型付き項書き換えシステム R^τ が弱左線形ならば，R は合流性をもつ．

証明．R は重なりがないので，R^τ も重なりがない．このとき，R^τ は弱左線形なので，R^τ_{nf} が得られる．R^τ_{nf} は重なりのない左線形項書き換えシステムとなるので，合流性をもつ [1]．したがって，補題 4 より R^τ は合流性をもつ．よって，命題 1 より R は合流性をもつ．□

例 3 型付けでは部分システムに分解できない項書き換えシステム R の合流性を定理 1 によって示す．

$$R = \begin{cases} f(x,x) \rightarrow f(g(x),x) & (5) \\ f(g(x),x) \rightarrow f(h(x),h(x)) & (6) \\ h(g(x)) \rightarrow g(g(h(x))) & (7) \end{cases}$$

R に以下の型付けを行うと R^τ が得られる．

$$\begin{array}{lcccc} f & : & 0 \times 0 & \rightarrow & 1 \\ g & : & 0 & \rightarrow & 0 \\ h & : & 0 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

このとき，部分システムは $R^\tau_\sigma(\sigma \in \{0,1\})$ は $R^\tau_0 = \{(7)\}$ と $R^\tau_1 = \{(5),(6),(7)\}$ である．R^τ において，左非線形型は型 0 のみである．R^τ_0 は停止性をみたすので，型 0 をもつすべての項は停止し，R^τ は弱左線形となる．また，R は重なりがないので，定理 1 から R は合流性をもつ．

4　合流性自動判定手続き

前節で示した定理 1 にもとづいて与えられた項書き換えシステム R の合性自動判定手続きを以下に与える．

合流性自動判定手続き

入力：項書き換えシステム R

出力：判定結果

1. R に重なりがあるなら失敗．
2. R と矛盾のない型付け τ を求める．
3. R^τ のすべての左非線形型 σ を求める．
4. すべての左非線形型 σ に対して，以下の手続きを行う．
   - 4−1. R^τ_σ を求める．
   - 4−2. R^τ_σ の停止性を示す．　停止性をもたない場合は失敗．
5. R は合流性をもつと判定．

この手続きをもとに合流性自動判定システム CRCheck を SML/NJ をもちいて実装した (約 700 行)．実装したシステムをもちいて，停止性をもたず非左線形な合流性をもつ項書き換えシステムの合流性判定を行った．CRCheck の動作例を図 5 に示す．

5　まとめ

本論文では，型付き項書き換えシステム R^τ が弱左線形となる項書き換えシステム R に対する合流条件を示した．また，本手法に基づく合流性自動判定手続きを実装し，実験によってその有効性を確認した．永続性と本論文でもちいなかった左線形項書き換えシステムの合流条件を組み合わせた場合の R の合流条件の検討は今後の課題である．

```
CRCheck [ F(x,x) -> F(G(x),x),
          F(G(x),x) -> F(H(x),H(x)),
          H(G(x)) -> G(G(H(x))) ];

  Non-Overlapping   : Success
  Type
    F : 0 * 0 -> 1
    G : 0     -> 0
    H : 0     -> 0
  LeftNonlinearType : 0
    Type 0          : Termination
  WeaklyLeftLinear  : Success

  Confluence        : Success
```

図 5 CRCheck の実行例

参考文献

[1] T. Aoto, Y. Toyama, Persistency of confluence, *Journal of Universal Computer Science*, Vol. 3, No. 11, pp. 1134–1147, 1997.

[2] T. Aoto, J. Yoshida, Y. Toyama, Proving confluence of term rewriting systems automatically, In *Proc. of RTA 2009*, LNCS, Vol. 5595, pp. 93–102, Springer-Verlag, 2009.

[3] F. Baader and T. Nipkow, *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[4] Y. Toyama, Confluent term rewriting systems (invited talk), In *Proc. of RTA 2005*, LNCS, Vol. 3467, p.1, Springer-Verlag, 2005. Slides can be obtained from `http://www.nue.riec.tohoku.ac.jp/user/toyama/research/slide/toyama-RTA05.pdf`

[5] Y. Toyama, Membership conditional term rewriting systems, *The Transactions of the IEICE*, Vol.E 72, No. 11, pp. 1224–1229, 1989.

[6] Y. Toyama, Commutativity of term rewriting systems, in: K.Fuchi and L.Kott, eds., *Programming of Future Generation Computer II*, pp. 393–407, 1988.

[7] V. van Oostrom, Developing developments, *Theoritical Computer Science*, Vol. 175, No. 1, pp. 159–181, 1997.