拡大手法に基づく項書き換え系の合流性自動証明

Proving Confluence of Term Rewriting Systems with an Incremental Method

道又 淳一[1], 青戸 等人[1], 外山 芳人[1]

[1] 東北大学 電気通信研究所

{mitimata, aoto, toyama}@nue.riec.tohoku.ac.jp

概要

従来，交換律などを含む項書き換え系の合流条件は E 相対停止性と E 危険対を考慮する必要があった．本論文は，通常の停止性と危険対のみを用いた合流性条件を示し，それに基づく合流性自動証明手続きを提案する．本手法の特徴は，危険対解析に基づいて生成された新たな規則を次々と追加することで，合流性をもつ項書き換え系の構成を試みる点にある．構成に成功した場合，当初の項書き換え系の合流性が保証される．このような拡大手法による合流性証明手続きはこれまでほとんど報告されていない．従来手法の適用ができない項書き換え系にも本手法は適用可能である．本論文では，提案手法の正当性を証明するとともに，実験を通してその有効性を明らかにする．

1 はじめに

合流性は項書き換え系 [2] の重要な性質であり，プログラムの自動検証・変換や定理自動証明で広く利用されている [2, 3]．停止性をもつ項書き換え系の合流性は決定可能である [2, 7] が，停止性をもたない場合には一般には決定不能である [2]．このため，停止性をもたない項書き換え系の合流性を保証するさまざまな合流条件が報告されている [5, 8, 9]．

交換律などの対称的で停止性をみたさない書き換え規則を含む項書き換え系の合流性を示すために従来広く用いられてきたのは，停止性をみたさない書き換え規則の集合を等式集合 E と考え，等式集合 E を法として停止する等式付き書き換え系の合流条件を適用する方法である [6]．しかし，等式付き項書き換え系の合流条件は，E 相対停止性と E 危険対を考慮する必要があり，通常の停止性や危険対のみを用いた項書き換え系の合流条件と比較すると複雑である．

本論文では，交換律などの停止性をみたさない書き換え規則の集合を，等式集合ではなく，双方向性と逆到達可能性をみたす項書き換え系と考え，通常の危険対と停止性に基づく新しい合流条件を示すとともに，それに基づいた合流性自動証明手続きを提案する．本手続きの特徴は，危険対から生成される書き換え規則を次々と追加してリダクション等価な拡大を行い，合流性をみたす項書き換え系を構成する点にある．同様な危険対解析に基づく変形手続きとしては，項書き換え系の完備化手続き [2] が広く知られているが，完備化手続きでは壊されてしまうリダクション等価性を本手続きでは保証している点が大きく異なっている．このような拡大手法に基づく合流性自動証明手続きは，これまでほとんど知られていない．

本論文で提案した合流性自動証明手続きをもちいると，吉田らが開発した合流性自動判定システム ACP[1, 9] では判定に失敗する交換律などを含んだ項書き換え系の合流性を証明することができる．また，従来の等式付き項書き換え系の合流条件 [6] が適用できない項書き換え系でも，本手法によって合流性を示すことができる場合がある．

本論文は全 8 節で構成される．第 2 節では項書き換え系など必要となる定義を行う．第 3 節では抽象書き換え系の合流性条件について述べる．第 4 節では項書き換え系の合流性条件を示す．第 5 節では拡大合流性証明手続きを説明する．第 6 節では拡大合流性自動証明システムの実装と実験について述べる．第 7 節では従来手法との比較を

行う．最後に第 8 節で，本研究のまとめと今後の課題について述べる．

2　準備

本論文で用いる定義および記法を説明する．詳細は文献 [2] 等を参照されたい．

抽象書き換え系は，集合 A と A 上の関係 $\to$ の対 $\langle A, \to \rangle$ である．以後，$a, b, c, \ldots$ により集合 A の要素を表す．集合 A 上の関係 $\to$ に対して，$\leftarrow \, = \, \to^{-1}$, $\xrightarrow{0} \, = \{\langle a, a\rangle \mid a \in A\}$, $\xrightarrow{i+1} \, = \, \xrightarrow{i} \circ \to$ とする．また，$\xrightarrow{=}, \leftrightarrow, \xrightarrow{+}, \xrightarrow{*}, \xleftrightarrow{*}$ は反射閉包，対称閉包，推移閉包，反射推移閉包，反射対称推移閉包を表す．$a \xrightarrow{*} b$ をみたす場合，a から b へ**到達可能**という．$a \to b$ をみたす b が存在しない場合，a は**正規形**であるという．関係 $\to$ に関する正規形の集合を $NF_{\to}$ と記す．図中に使われる記号 $\odot$ は正規形を表す．ここで，関係 $\xrightarrow{!} \, = \{\langle a, b\rangle \mid a \xrightarrow{*} b \in NF_{\to}\}$ を定義する．$\xleftarrow{*} \circ \xrightarrow{*} \, \subseteq \, \xrightarrow{*} \circ \xleftarrow{*}$ である場合，関係 $\to$ は**合流性**をもつという．$\xleftrightarrow{*} \, \subseteq \, \xrightarrow{*} \circ \xleftarrow{*}$ である場合，関係 $\to$ は**チャーチ・ロッサ性**をもつという．合流性とチャーチ・ロッサ性は同値であることが知られている．関係 $\to$ の無限列 $a_0 \to a_1 \to \cdots$ が存在しない場合，関係 $\to$ は**停止性**をもつという．

半順序 $\succ$ から生成される**多重集合順序**[2] を $\succ^m$ と記す．停止性をもつ半順序から生成される多重集合順序は停止性をもつ [4]．

関数記号集合および変数記号集合を $\mathcal{F}, \mathcal{V}$ で表す．$\mathcal{F}, \mathcal{V}$ 上の項の集合を $T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ で表す．以後，$l, r, s, t, u, v, \ldots$ により項を表す．t の位置の集合を $Pos(t)$ で表し，t の位置 p での部分項 $t|_p$ を s で置換した項を $t[s]_p$ と記す．位置 p, q について，位置 p' が存在して $p.p' = q$ である場合，$p \leq q$ とする．$p \not\leq q \wedge q \not\leq p$ である場合，$p \parallel q$ と記す．根記号を ϵ と記す．変数集合から項集合への写像を**代入**といい，σ, θ を用いて表す．t へ σ を適用した結果得られる項を $t\sigma$ と記す．t に現れる変数がすべて異なるとき，t は**線形**であるという．t に現れる変数の集合を $\mathcal{V}(t)$ と記す．

等式は項の対であり，$l \approx r$ と記す．等式は変数の名前換えのもとで同一視する．等式集合 E について，$E^{-1} = \{r \approx l \mid l \approx r \in E\}$, $E^{sym} = E \cup E^{-1}$ とする．$l \notin \mathcal{V}$ かつ $\mathcal{V}(r) \subseteq \mathcal{V}(l)$ であるとき，等式 $l \approx r$ を**書き換え規則**とよび，$l \to r$ と記す．書き換え規則の集合を**項書き換え系**という．すべての等式 $l \approx r \in E$ が $l, r \notin \mathcal{V}$ かつ $\mathcal{V}(l) = \mathcal{V}(r)$ であるとき，等式集合 E は**双方向性**をもつという．双方向性をもつとき，E, E^{-1} は共に項書き換え系となる．等式集合が**線形**であるとは，すべての等式の両辺が線形であるときをいう．項書き換え系 R の書き換え関係 $\to_R$ は，$l \to r \in R$, $p \in Pos(s)$, σ が存在して $s|_p = l\sigma$ かつ $t = s[r\sigma]_p$ となる場合，$s \to_R t$ と定める．位置 p を明示するときは $s \to_R^p t$ と記す．

$$\begin{tikzcd}
 & l\theta \arrow[dl, "u \to v"'] \arrow[dr, "l \to r"] & \\
 l[v]_p\theta & & r\theta
\end{tikzcd}$$

図 1. 危険対

書き換え規則 $l \to r$ と $u \to v$, 位置 $p \in Pos(l)$ について，$l|_p \notin \mathcal{V}$ と u が単一化可能であるとき，$u \to v$ は $l \to r$ に**重なる**という．ただし，$l \to r = u \to v$ のときは，$p \neq \epsilon$ とする．このとき，$l|_p$ と u の最汎単一化子 [2] を θ とすると，この重なりからできる項の対 $\langle\, (l[v]_p)\theta,\, r\theta \,\rangle$ を**危険対**とよぶ (図 1)．図中の円弧とその先端の矢の向きで $u \to v$ が $l \to r$ へ重なることによりできる危険対を表す．$u \to v$ が $l \to r$ へ重なることからできるすべての危険対の集合を $\mathrm{CP}(u \to v,\, l \to r)$ と記す．項書き換え系 S, P による危険対集合 $\mathrm{CP}(S, P)$ を次のように定義する．$\mathrm{CP}(S, P) = \bigcup_{u \to v \in S} \bigcup_{l \to r \in P} \mathrm{CP}(u \to v,\, l \to r)$．また，$\mathrm{CP}^{-1}(S, P) = \{\langle s, t\rangle \mid \langle t, s\rangle \in \mathrm{CP}(S, P)\}$ と定める．ここで，$\mathrm{CP}^{-1}(S, P) \neq \mathrm{CP}(P, S)$ であることに注意する．

3　抽象書き換え系の合流性条件

本節では，抽象書き換え系を扱う．関係 $\to_R$ を停止性をもつ関係 $\to_S$ と停止性をもたない関係 $\to_P$ に分割して考慮することで簡明な合流性十分条件を提案する．

定義 3.1 必要となる性質を定義する．

性質 (a) $\xleftrightarrow{*}_S \, \subseteq \, \xrightarrow{!}_S \circ \xleftrightarrow{*}_P \circ \xleftarrow{!}_S$.

性質 (b) $\leftrightarrow_P \, \subseteq \, \xrightarrow{!}_S \circ \xleftrightarrow{*}_P \circ \xleftarrow{!}_S$.

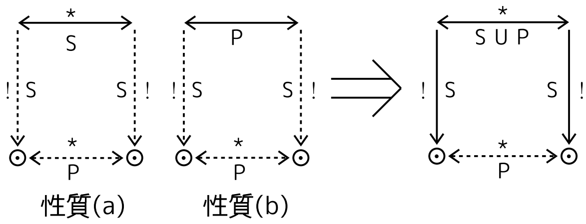

図 2. 補題 3.2

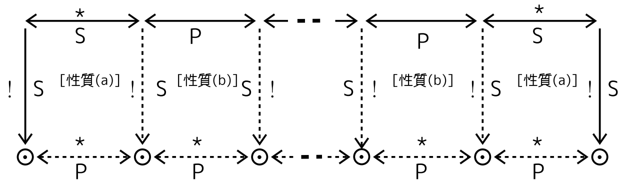

図 3. 補題 3.2 の証明

性質 (I) $\leftarrow_S \circ \rightarrow_S \subseteq \xrightarrow{*}_S \circ \overset{=}{\longleftrightarrow}_P \circ \xleftarrow{*}_S$.
性質 (II) $\leftarrow_S \circ \longleftrightarrow_P \subseteq \xrightarrow{*}_S \circ \overset{=}{\longleftrightarrow}_P \circ \xleftarrow{*}_S$.

補題 3.2 抽象書き換え系 $\langle A, \rightarrow_R \rangle$ について，$\rightarrow_R = \rightarrow_S \cup \rightarrow_P$ とし，性質 (a), (b) がみたされるとする．このとき，$\xleftarrow{!}_S \circ \overset{*}{\longleftrightarrow}_R \circ \xrightarrow{!}_S \subseteq \overset{*}{\longleftrightarrow}_P$ となる (図 2).
(証明)
任意の $e'_0 \xleftarrow{!}_S \circ \overset{*}{\longleftrightarrow}_R \circ \xrightarrow{!}_S e'_{2n+1}$ は $e'_0 \xleftarrow{!}_S e_0 \overset{*}{\longleftrightarrow}_S e_1 \longleftrightarrow_P e_2 \overset{*}{\longleftrightarrow}_S e_3 \longleftrightarrow_P \cdots \overset{*}{\longleftrightarrow}_S e_{2n-1} \longleftrightarrow_P e_{2n} \overset{*}{\longleftrightarrow}_S e_{2n+1} \xrightarrow{!}_S e'_{2n+1}$ とかける．性質 (b) より，要素 e'_{2i-1}，e'_{2i} が存在して，$e_{2i-1} \xrightarrow{!}_S e'_{2i-1} \overset{*}{\longleftrightarrow}_P e'_{2i} \xleftarrow{!}_S e_{2i}$ となる ($i = 1, \ldots, n$)．ここで，$e'_{2i} \overset{*}{\longleftrightarrow}_S e'_{2i+1}$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) であることおよび e'_i ($i = 0, 1, \ldots, 2n+1$) が正規形であることに注意すると，性質 (a) より，$e'_{2i} \overset{*}{\longleftrightarrow}_P e'_{2i+1}$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) となる．よって，$e'_0 \overset{*}{\longleftrightarrow}_P e'_{2n+1}$ となる (図 3).

□

補題 3.3 抽象書き換え系 $\langle A, \rightarrow_S \rangle, \langle A, \rightarrow_P \rangle$ について，$\rightarrow_S$ は停止性をもち，性質 (II) が成り立つとする．このとき，性質 (b) が成り立つ．(図 4).
(証明)
$a \longleftrightarrow_P b$ とする．$\succ = \xrightarrow{+}_S$ から生成される多重集合順序 $\succ^m$ に基づく $\{a, b\}$ に関する帰納法により示す. $a, b \in NF_{\rightarrow_S}$ の場合は自明である．したがい，一般性を失なうことなく $a \notin NF_{\rightarrow_S}$ と

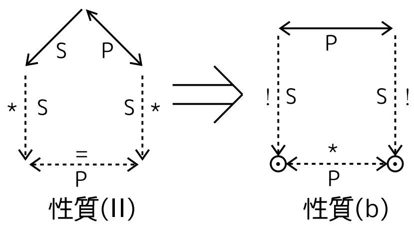

図 4. 補題 3.3

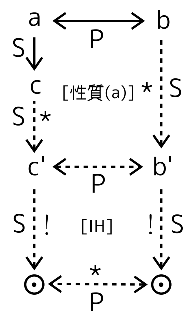

図 5. 補題 3.3 の証明

仮定できる．このとき，$c \leftarrow_S a \longleftrightarrow_P b$ をみたす要素 c が存在する．仮定より，要素 c', b' が存在して $c \xrightarrow{*}_S c' \overset{=}{\longleftrightarrow}_P b' \xleftarrow{*}_S b$ となる．$c' = b'$ の場合は，明らかである．$c' \longleftrightarrow_P b'$ の場合は，$a \xrightarrow{+}_S c'$ と $b \xrightarrow{*}_S b'$ より $\{a, b\} \succ^m \{c', b'\}$ であるから，帰納法の仮定より $c' \xrightarrow{!}_S \circ \overset{*}{\longleftrightarrow}_P \circ \xleftarrow{!}_S b'$ となる．よって，$a \xrightarrow{!}_S \circ \overset{*}{\longleftrightarrow}_P \circ \xleftarrow{!}_S b$ となる (図 5).

□

補題 3.4 抽象書き換え系 $\langle A, \rightarrow_S \rangle, \langle A, \rightarrow_P \rangle$ について，$\rightarrow_S$ は停止性をもち，性質 (I), (II) が成り立つとする．このとき，性質 (a) が成立する (図 6).
(証明)
$e_0 \longleftrightarrow_S e_1 \longleftrightarrow_S \cdots \longleftrightarrow_S e_n$ とする．$\succ = \xrightarrow{+}_S$ から生成される多重集合順序 $\succ^m$ に基づく

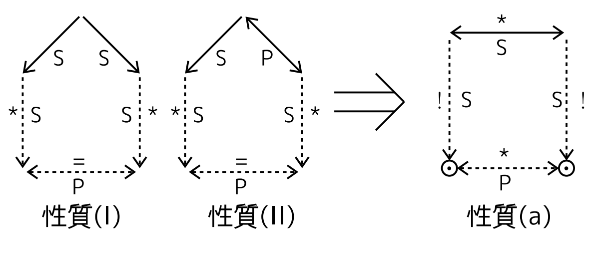

図 6. 補題 3.4

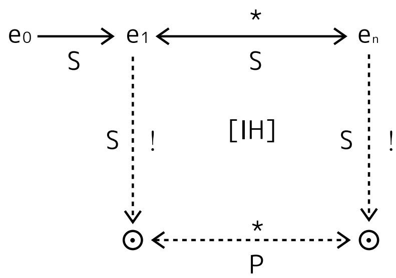

図 7. 補題 3.4 の証明 (a)

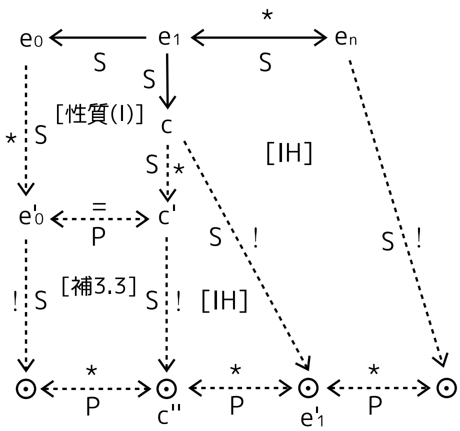

図 8. 補題 3.4 の証明 (b)

$\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ に関する帰納法により示す．
$e_0 = e_n$ の場合は，自明であるため $e_0 \overset{+}{\longleftrightarrow}_S e_n$ の場合を考える．

$e_0 \to_S e_1 \overset{*}{\longleftrightarrow}_S e_n$ の場合には，$\{e_0, e_1, \ldots, e_n\} \succ^m \{e_1, \ldots, e_n\}$ であるから，帰納法の仮定より $e_0 \to_S e_1 \overset{!}{\to}_S \circ \overset{*}{\longleftrightarrow}_P \circ \overset{!}{\leftarrow}_S e_n$ となり，成立する (図 7)．

$e_0 \leftarrow_S e_1 \overset{*}{\longleftrightarrow}_S e_n$ の場合には，$\{e_0, e_1, \ldots, e_n\} \succ^m \{e_1, \ldots, e_n\}$ から帰納法の仮定を用いて，$e_1 \overset{!}{\to}_S e'_1 \overset{*}{\longleftrightarrow}_P \circ \overset{!}{\leftarrow}_S e_n$ である．ここで，$e_1 \notin NF_{\to_S}$ であるため，$e_1 \to_S c \overset{!}{\to}_S e'_1$ をみたす要素 c が存在する．$e_0 \leftarrow_S e_1 \to_S c$ であるから，性質 (I) より，要素 e'_0，c' が存在して $e_0 \overset{*}{\to}_S e'_0 \overset{=}{\longleftrightarrow}_P c' \overset{*}{\leftarrow}_S c$ となる．性質 (II) より補題 3.3 が適用でき，要素 $c'' \in NF_{\to_S}$ が存在して，$e'_0 \overset{!}{\to}_S \circ \overset{*}{\longleftrightarrow}_P c'' \overset{!}{\leftarrow}_S c'$ となる．ここで，$c'' \overset{*}{\leftarrow}_S c' \overset{*}{\leftarrow}_S c \overset{*}{\to}_S e'_1$ かつ $e_1 \to_S c$ であるため，$\{e_0, e_1, \ldots, e_n\} \succ^m \{c'', \ldots, c', \ldots, c, \ldots, e'_1\}$ となることから，帰納法の仮定より $c'' \overset{*}{\longleftrightarrow}_P e'_1$ が成立する．ゆえに，$e_0 \overset{!}{\to}_S \circ \overset{*}{\longleftrightarrow}_P c'' \overset{*}{\longleftrightarrow}_P e'_1 \overset{*}{\longleftrightarrow}_P \circ \overset{!}{\leftarrow}_S e_n$ となる (図 8)．

□

補題 3.4 の結果から合流性を導くために逆到達可能性を以下のように定義する．

定義 3.5 (逆到達可能性) 関係 $\to$ が $\to \subseteq \overset{*}{\leftarrow}$ をみたす場合，関係 $\to$ は**逆到達可能**という．

定義から明らかに，関係 $\to$ が逆到達可能である場合，$\overset{*}{\longleftrightarrow} \subseteq \overset{*}{\leftarrow}$ が成立する．また，関係が対称性をもつ場合，逆到達可能性をもつことは自明である．

定理 3.6 抽象書き換え系 $\langle A, \to_R \rangle$ について，$\to_R = \to_S \cup \to_P$ とする．$\to_S$ は停止性をもち，$\to_P$ は逆到達可能であり，性質 (I), (II) がみたされるとする．このとき，$\to_R$ は合流性をもつ．
(証明)
S の停止性と性質 (II) から補題 3.3 の仮定が成立するため，性質 (b) が成り立つ．S の停止性と性質 (I), (II) から補題 3.4 の仮定が成立するため，性質 (a) が成り立つ．よって，補題 3.2 より，$\overset{!}{\leftarrow}_S \circ \overset{*}{\longleftrightarrow}_R \circ \overset{!}{\to}_S \subseteq \overset{*}{\longleftrightarrow}_P$ となる．このことから，$\overset{*}{\longleftrightarrow}_R \subseteq \overset{!}{\to}_S \circ \overset{*}{\longleftrightarrow}_P \circ \overset{!}{\leftarrow}_S$ がいえ，P が逆到達可能であることから $\overset{*}{\longleftrightarrow}_P \subseteq \overset{*}{\leftarrow}_P$，また，$\overset{*}{\to}_S \subseteq \overset{*}{\to}_R$ お

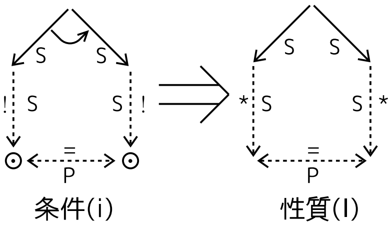

図 9. 補題 4.2

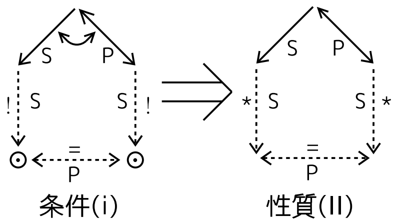

図 10. 補題 4.3

および $\xrightarrow{*}_P \subseteq \xrightarrow{*}_R$ であるため，$\xleftrightarrow{*}_R \subseteq \xrightarrow{*}_R \circ \xleftarrow{*}_R$ となり，$\to_R$ はチャーチ・ロッサ性をもつ．合流性とチャーチ・ロッサ性は同値であるから，$\to_R$ は合流性をもつ．

□

4 項書き換え系の合流性条件

本節では，書き換え関係が性質 (I)，(II) をみたすための項書き換え系の十分条件を考える．そして，定理 3.6 に基づいて項書き換え系の合流性条件を示す．

定義 4.1 必要となる条件を定義する．
条件 (i) $\mathrm{CP}(S,S) \subseteq \xrightarrow{!}_S \circ \xleftrightarrow{=}_P \circ \xleftarrow{!}_S$
条件 (ii) $\mathrm{CP}(S,P^{sym}) \cup \mathrm{CP}(P^{sym},S) \subseteq \xrightarrow{!}_S \circ \xleftrightarrow{=}_P \circ \xleftarrow{!}_S$

補題 4.2 項書き換え系 S,P について，条件 (i) が成り立つとする．このとき，性質 (I) がみたされる (図 9)．
(証明)
$u \xleftarrow{p}_{\{l\to r\}} w \xrightarrow{q}_{\{l'\to r'\}} v$ および $l \to r, l' \to r' \in S$ とする．2 つの書き換えの位置 p,q の相互関係により場合分けをする．

$p \parallel q$ の場合，$u \xrightarrow{q}_S \circ \xleftarrow{p}_S v$ となる．残りの場合は対称性から，一般性を失うことなく $p \leq q\,(= p.p')$ と仮定できる．$p' = p_x.p''$かつ $l|_{p_x} = x \in \mathcal{V}(l)$ をみたす $p_x \in Pos(l), p''$ が存在する場合，危険対補題 [2] と同様にして $u \xrightarrow{*}_S \circ \xleftarrow{*}_S v$ となる．それ以外の場合は，$l|_{p'} \notin \mathcal{V}$ となる．$p' = \epsilon \wedge l \to r = l' \to r'$ のときは自明．それ以外を考える．一般性を失うことなく $\mathcal{V}(l) \cap \mathcal{V}(l') = \emptyset$ と仮定できる．よって，$w|_p = l\sigma, w|_q = l'\sigma$ をみたす代入 σ が存在する．$l'\sigma = w|_q = w|_{pp'} = (l\sigma)|_{p'} = l|_{p'}\sigma$ であり，$l' \to r'$ は $l \to r$ に重なるので，危険対 $\langle l[r']_{p'}\theta, r\theta\rangle \in \mathrm{CP}(S,S)$ と $\sigma = \sigma' \circ \theta$ をみたす代入 σ' が存在する．条件 (i) より $r\theta \xrightarrow{!}_S \circ \xleftrightarrow{=}_P \circ \xleftarrow{!}_S l[r']_{p'}\theta$ をみたす．ここで，$u = w[r\sigma]_p = w[(r\theta)\sigma']_p$，$v = w[r'\sigma]_q = w[l\sigma[r'\sigma]_{p'}]_p = w[l[r']_{p'}\sigma]_p = w[(l[r']_{p'}\theta)\sigma']_p$ とかける．よって，$u = w[(r\theta)\sigma']_p \xrightarrow{*}_S \circ \xleftrightarrow{=}_P \circ \xleftarrow{*}_S w[(l[r']_{p'}\theta)\sigma']_p = v$ である．

□

補題 4.3 項書き換え系 S,P について，S は線形であり，P は双方向性をもつとする．また，条件 (ii) が成立するとする．このとき，性質 (II) がみたされる (図 10)．
(証明)
$u \xleftarrow{p}_{\{l\to r\}} w \xrightarrow{q}_{\{l'\to r'\}} v$ および $l \to r \in S, l' \to r' \in P$ とする．2 つの書き換えの位置 p,q の相互関係により場合分けをする．

$p \parallel q$ の場合，$u \xleftrightarrow{q}_P \circ \xleftarrow{p}_S v$ となる．

$p \leq q\,(= p.p')$ の場合を考える．$p' = p_x.p''$かつ $l|_{p_x} = x \in \mathcal{V}(l)$ をみたす $p_x \in Pos(l), p''$ が存在する場合，S の線形性より，変数 x は l に位置 p 以外では出現せず，r に現れる回数は高々1 回である．よって，$u \xleftrightarrow{=}_P \circ \leftarrow_S v$ となる．それ以外の場合は，$l|_{p'} \notin \mathcal{V}$ となる．$p' = \epsilon \wedge l \to r = l' \to r'$ のときは自明．それ以外を考える．一般性を失うことなく $\mathcal{V}(l) \cap \mathcal{V}(l') = \emptyset$ と仮定できる．$w|_p = l\sigma, w|_q = l'\sigma$ をみたす代入 σ が存在する．$l'\sigma = w|_q = w|_{pp'} = (l\sigma)|_{p'} = l|_{p'}\sigma$ であり，$l' \to r'$ は $l \to r$ に重なるので，危険対 $\langle l[r']_{p'}\theta, r\theta\rangle \in \mathrm{CP}(P^{sym},S)$ と $\sigma = \sigma' \circ \theta$ をみたす代入 σ' が存在する．条件 (ii) より $r\theta \xrightarrow{!}_S \circ \xleftrightarrow{=}_P \circ \xleftarrow{!}_S l[r']_{p'}\theta$ をみたす．ここで，$u = w[r\sigma]_p = w[(r\theta)\sigma']_p$，$v = w[r\sigma]_q = w[l\sigma[r'\sigma]_{p'}]_p = w[l[r']_{p'}\sigma]_p = w[(l[r']_{p'}\theta)\sigma']_p$ とかける．よって，$u = w[(r\theta)\sigma']_p \xrightarrow{*}_S \circ \xleftrightarrow{=}_P \circ \xleftarrow{*}_S w[(l[r']_{p'}\theta)\sigma']_p = v$ である．

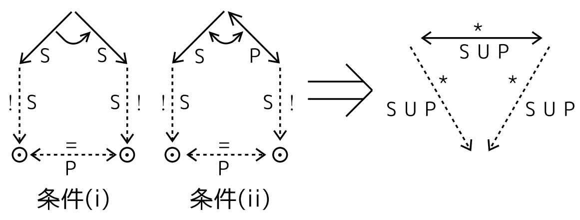

図 11. 定理 4.5

$p > q$ の場合を考える．$p = qq'(q' \neq \epsilon)$ とおく．$q' = q_x.q''$かつ $l'|q_x = x \in \mathcal{V}(l')$ をみたす q_x が存在する場合 $u \xrightarrow{*}_S \circ \longleftrightarrow_P \circ \xleftarrow{*}_S v$ となる．それ以外の場合，$l'|_{q'} \notin \mathcal{V}$ となる．$\mathrm{CP}(S, P^{sym})$ についての仮定から $p \leq q$ の場合の $l|_{p'} \notin \mathcal{V}$ のときと同様に示せる．

□

項書き換え系の逆到達可能性を以下のように定義する．

定義 4.4 (逆到達可能性) 項書き換え系 P が逆到達可能であるとは，書き換え関係 $\rightarrow_P$ が逆到達可能であることをいう．

項書き換え系 P のすべての書き換え規則 $l \rightarrow r \in P$ が $r \xrightarrow{*}_P l$ となるとき，P は逆到達可能となることに注意する．一般には決定不能であるため，本論文で逆到達可能性を保証するためには定義 6.1 に示す十分条件を考える．

以上に基づき項書き換え系の合流性条件を示す．

定理 4.5 (合流性条件) 項書き換え系 R について，$R = S \cup P$ とする．S は線形かつ停止性をもち，P は双方向性をもち逆到達可能であるとする．また，条件 (i), (ii) がみたされるとする．このとき，R は合流性をもつ (図 11).
(証明)
条件 (i) より補題 4.2 の仮定が成立し，性質 (I) が成り立つ．条件 (ii) および S の線形性，P の双方向性より補題 4.3 の仮定が成立し，性質 (II) が成立りつ．よって，S は停止性をもち，P は逆到達可能であるため定理 3.6 の仮定が成立し，$\rightarrow_R$ は合流性をもつ．したがって，R は合流性をもつ．

□

S が停止性をもつため，条件 (i), (ii) は決定可能である．

定理 4.5 より，項書き換え系 R を $R = S \cup P$ をみたす項書き換え系 S, P に分けることで R の合流性を示すことが可能となる．

例 4.6 以下の項書き換え系 R を考える．

$$R \left\{ \begin{array}{rcl} \mathsf{S}(x) + y & \rightarrow & \mathsf{S}(x+y) \\ x + 0 & \rightarrow & x \\ y + \mathsf{S}(x) & \rightarrow & \mathsf{S}(x+y) \\ 0 + x & \rightarrow & x \\ x + y & \rightarrow & y + x \\ (x+y)+z & \rightarrow & x + (y+z) \end{array} \right.$$

R を以下のように S, P に分ける．

$$S \left\{ \begin{array}{rcl} \mathsf{S}(x) + y & \rightarrow & \mathsf{S}(x+y) \\ x + 0 & \rightarrow & x \\ y + \mathsf{S}(x) & \rightarrow & \mathsf{S}(x+y) \\ 0 + x & \rightarrow & x \end{array} \right.$$
$$P \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & \rightarrow & y + x \\ (x+y)+z & \rightarrow & x + (y+z) \end{array} \right.$$

$x+(y+z) \rightarrow_P (y+z)+x \rightarrow_P y+(z+x) \rightarrow_P (z+x)+y \rightarrow_P z+(x+y) \rightarrow_P (x+y)+z$ となるため，P は逆到達可能である．また，P は双方向性をもつ．S は線形かつ停止性をもつ．また，危険対は以下のようになる．

$\mathrm{CP}(S, S) = \{\langle 0, 0\rangle$, $\langle \mathsf{S}(0+x), \mathsf{S}(x)\rangle$,
$\langle \mathsf{S}(x+0), \mathsf{S}(x)\rangle$, $\langle \mathsf{S}(x+\mathsf{S}(y)), \mathsf{S}(\mathsf{S}(x)+y)\rangle\}$

$\mathrm{CP}(S, P^{sym}) \cup \mathrm{CP}^{-1}(P^{sym}, S) =$
$\{\langle x, x+0\rangle$, $\langle x, 0+x\rangle$, $\langle \mathsf{S}(x+y), y+\mathsf{S}(x)\rangle$,
$\langle \mathsf{S}(x+y), \mathsf{S}(y)+x\rangle$, $\langle x+y, x+(y+0)\rangle$,
$\langle x+y, (x+y)+0\rangle$, $\langle x+y, x+(0+y)\rangle$,
$\langle x+y, (x+0)+y\rangle$, $\langle x+y, 0+(x+y)\rangle$,
$\langle x+y, (0+x)+y\rangle$,
$\langle \mathsf{S}(x+y)+z, x+(\mathsf{S}(y)+z)\rangle$,
$\langle \mathsf{S}(x+y)+z, \mathsf{S}(x)+(y+z)\rangle$,
$\langle \mathsf{S}((x+y)+z), x+(y+\mathsf{S}(z))\rangle$,
$\langle \mathsf{S}(x+(y+z)), (\mathsf{S}(x)+y)+z\rangle$,

$\langle x+\mathsf{S}(y+z),(x+\mathsf{S}(y))+z\rangle$,
$\langle x+\mathsf{S}(y+z),(x+y)+\mathsf{S}(z)\rangle\}$

どの危険対 $\langle s,t\rangle$ も，$s \xrightarrow{!}_S \circ \xleftrightarrow{=}_P \circ \xleftarrow{!}_S t$ となることから，条件 (i), (ii) をみたす．よって，定理 4.5 から $R=S\cup P$ は合流性をもつ．

5 拡大合流性証明手続き

本節では，拡大合流性手続きを導入する．拡大合流性証明手続きでは，与えられた項書き換え系に新たな書き換え規則を追加して拡大し，拡大された項書き換え系の合流性を示すことで，与えられた項書き換え系の合流性を導く．まず，2 つの書き換え関係の等価性を定義し，それをみたす十分条件について述べる．その後，拡大合流性証明手続きを示し，その正当性を証明する．

定義 5.1 (リダクション等価) 書き換え関係$\rightarrow_{R_0}$ と $\rightarrow_{R_1}$ が**リダクション等価**であるとは，$\xrightarrow{*}_{R_0}=\xrightarrow{*}_{R_1}$ であることをいう．項書き換え系 R_0 と R_1 がリダクション等価であるとは，書き換え関係 $\rightarrow_{R_0}$ と $\rightarrow_{R_1}$ がリダクション等価であることをいう．

リダクション等価性は推移性をもつことに注意する．

命題 5.2 (文献 [2]) R_0 と R_1 を項書き換え系とする．
(i) $\rightarrow_{R_0}\subseteq\rightarrow_{R_1}\subseteq\xrightarrow{*}_{R_0}$ ならば R_0 と R_1 はリダクション等価である．
(ii) R_0 と R_1 がリダクション等価であれば，R_0 が合流性をもつことと R_1 が合流性をもつことは同値である．

リダクション等価性を利用すると，定理 4.5 を直接適用することができなくとも，項書き換え系の合流性を示すことができる．

例 5.3 以下の項書き換え系 S_0, P_0 で構成される $S_0\cup P_0$ の合流性を考える．

$$\begin{array}{l} S_0\left\{\begin{array}{rcl}\mathsf{S}(x)+y & \rightarrow & \mathsf{S}(x+y)\\ x+0 & \rightarrow & x\end{array}\right.\\ P_0\left\{\begin{array}{rcl}x+y & \rightarrow & y+x\\ (x+y)+z & \rightarrow & x+(y+z)\end{array}\right.\end{array}$$

このとき，危険対 $\langle x,0+x\rangle$, $\langle\mathsf{S}(x+y),y+\mathsf{S}(x)\rangle\in\mathrm{CP}(S_0,P_0)$ が条件 (ii) をみたさず，定理 4.5 は直接適用できない．

ここで，$S_1=S_0\cup\{0+x\rightarrow x, y+\mathsf{S}(x)\rightarrow\mathsf{S}(x+y)\}$, $P_1=P_0$ と拡大する．

$$\begin{array}{l} S_1\left\{\begin{array}{rcl}\mathsf{S}(x)+y & \rightarrow & \mathsf{S}(x+y)\\ x+0 & \rightarrow & x\\ y+\mathsf{S}(x) & \rightarrow & \mathsf{S}(x+y)\\ 0+x & \rightarrow & x\end{array}\right.\\ P_1\left\{\begin{array}{rcl}x+y & \rightarrow & y+x\\ (x+y)+z & \rightarrow & x+(y+z)\end{array}\right.\end{array}$$

$0+x\rightarrow_{P_0}x+0\rightarrow_{S_0}x$ かつ $y+\mathsf{S}(x)\rightarrow_{P_0}\mathsf{S}(x)+y\rightarrow_{S_0}\mathsf{S}(x+y)$ であるから，$\rightarrow_{S_0\cup P_0}\subseteq\rightarrow_{S_1\cup P_1}\subseteq\xrightarrow{*}_{S_0\cup P_0}$ が成立する．よって，命題 5.2(i) より，$S_0\cup P_0$ と $S_1\cup P_1$ はリダクション等価である．

S_1 および P_1 は例 4.6 の S および P と同一である．よって，定理 4.5 から $S_1\cup P_1$ は合流性をもつことがわかる．$S_1\cup P_1$ と $S_0\cup P_0$ はリダクション等価であるから，命題 5.2(ii) から $S_0\cup P_0$ も合流性をもつ．

項書き換え系 R が与えられると，R をリダクション等価な項書き換え系 $S_i\cup P_i$ $(i=0,1,\ldots)$ へ拡大し，合流性証明を行う手続きを以下のように定める．

手続き 5.4 (拡大合流性証明手続き) 項書き換え系 R の合流性証明を行う．

1. $R_0 := R, i := 0$ とおく．
2. $R_i = S_i\cup P_i$ と分割する．ここで，S_i は線形で停止性をもち，P_i は双方向性をもち逆到達可能であるとする．分割できない場合,「証明失敗」を出力して停止する．
3. $\forall\langle u,v\rangle\in\mathrm{CP}(S_i,S_i).\ u\xrightarrow{!}_S\circ\xleftrightarrow{=}_P\circ\xleftarrow{!}_S v$ となる場合，手順 4 へ進む．そうでない場合，手順 2 へ進む．
4. $\forall\,\langle u,v\rangle\in\mathrm{CP}(S_i,P_i^{sym})\cup\mathrm{CP}^{-1}(P_i^{sym},S_i).\ u\xrightarrow{!}_S\circ\xleftrightarrow{=}_P\circ\xleftarrow{!}_S v$ となる場合,「CR」を出力して停止する．そうでない場合，上記の条件をみたさない危険対 $\langle u,\,v\rangle$ が存在する．$R_{i+1} := R_i\cup\{v\rightarrow u\}, i := i+1$ とおき，手順 2 へ進む．

この手続きは，必ずしも停止しないことに注意する．

定理 5.5 (拡大合流性証明手続きの正当性) 拡大合流性証明手続きが「CR」を出力した場合，R は合流性をもつ．

(証明)

$i = n$ であるとき,「CR」が出力されたとする．このとき，$i = 0, 1, \ldots, n-1$ について，手順 4 において加えられる危険対 $\langle u, v \rangle$ は $u \leftarrow_{S_i} \circ \leftrightarrow_{P_i} v$ である．P_i は逆到達可能なため $v \xrightarrow{*}_{P_i} \circ \rightarrow_{S_i} u$ である．よって，$R_{i+1} := R_i \cup \{v \to u\}$ より，$\to_{R_i} \subseteq \to_{R_{i+1}} \subseteq \xrightarrow{*}_{R_i}$ となる．したがって，命題 5.2(i) から R_i と R_{i+1} はリダクション等価となる．よって，リダクション等価性の推移性より，$R = R_0$ と R_n はリダクション等価である.「CR」が出力された場合，定理 4.5 の仮定をみたすため，R_n は合流性をみたす．R と R_n のリダクション等価性が成り立つため，命題 5.2(ii) より R は合流性をみたす．

□

例 5.6 拡大合流性証明手続きを用いて，以下の項書き換え系 R の合流性を示す．

$$R \begin{cases} \mathsf{S}(x) + y & \to & \mathsf{S}(x+y) \\ x + 0 & \to & x \\ x + y & \to & y + x \\ (x+y)+z & \to & x+(y+z) \end{cases}$$

手順 1 において，入力の項書き換え系 R を R_0 とし，手順 2 において，R_0 を S_0, P_0 へ分割する．

$$R_0 \begin{cases} S_0 \begin{cases} \mathsf{S}(x) + y & \to & \mathsf{S}(x+y) \\ x + 0 & \to & x \end{cases} \\ P_0 \begin{cases} x + y & \to & y + x \\ (x+y)+z & \to & x+(y+z) \end{cases} \end{cases}$$

手順 3 の条件をみたすため，手順 4 へ進む．手順 4 において，条件をみたさない危険対 $\langle \mathsf{S}(x+y), y+\mathsf{S}(x) \rangle$ を加えて R_1 を構成する．手順 2 へ進み，R_1 を分割する．

$$R_1 \begin{cases} S_1 \begin{cases} \mathsf{S}(x) + y & \to & \mathsf{S}(x+y) \\ x + 0 & \to & x \\ y + \mathsf{S}(x) & \to & \mathsf{S}(x+y) \end{cases} \\ P_1 \begin{cases} x + y & \to & y + x \\ (x+y)+z & \to & x+(y+z) \end{cases} \end{cases}$$

手順 3 の条件をみたすため，手順 4 へ進む．手順 4 の条件をみたさない危険対 $\langle x, 0+x \rangle$ を加えて R_2 を構成する．手順 2 へ進み，R_2 を分割する．

$$R_2 \begin{cases} S_2 \begin{cases} \mathsf{S}(x) + y & \to & \mathsf{S}(x+y) \\ x + 0 & \to & x \\ y + \mathsf{S}(x) & \to & \mathsf{S}(x+y) \\ 0 + x & \to & x \end{cases} \\ P_2 \begin{cases} x + y & \to & y + x \\ (x+y)+z & \to & x+(y+z) \end{cases} \end{cases}$$

手順 3 の条件をみたすため，手順 4 へ進む．手順 4 の条件をみたすので,「CR」と出力して停止する．

6 拡大合流性自動証明システムの実装と実験

拡大合流性証明手続きを SML/NJ により実装した．本節では，実装システムと実験結果について述べる．

定義 6.1 任意の a, b について $a \to b$ ならば $\exists i \leq m.\, b \xrightarrow{i} a$ となる場合，関係 $\to$ は m **ステップ以内逆到達可能**という．項書き換え系 P が m ステップ以内逆到達可能であるとは，書き換え関係 $\to_P$ が m ステップ以内逆到達可能であることをいう．

項書き換え系 P のすべての書き換え規則 $l \to r$ が $\exists i \leq m.\, r \xrightarrow{i} l$ となる場合，P は m ステップ以内逆到達可能である．

システムは 2 つの補助関数を含む．図 12 に疑似コードを示す．

div 関数は，入力の項書き換え系 R を分割した項書き換え系の対 $\langle S, P \rangle$ のリストを出力する．ここで，S は線形であり停止性をもち，P は双方向性をもち逆到達可能である．そして，$\forall \langle u, v \rangle \in \mathrm{CP}(S, S).\, u \xrightarrow{!}_S \circ \xleftrightarrow{=}_P \circ \xleftarrow{!}_S v$ をみたす．停止性の証明には外部の停止性検証器 `isTerminating` を用いる．逆到達可能性の証明は，与えられた定数 `max_step` を用いた `max_step` ステップ以内逆到達可能性の判定により行う．条件をみたす正規形の存在証明は，複数存在する正規形のうち 1 つについて行う．

testcp 関数は項書き換え系の対 $\langle S, P\rangle$ を入力として受け取り，$u \xrightarrow{!}_S \circ \overset{=}{\longleftrightarrow}_P \circ \overset{!}{\leftarrow}_S v$ をみたさない危険対 $\langle u, v\rangle \in \mathrm{CP}(S, P^{sym}) \cup \mathrm{CP}^{-1}(P^{sym}, S)$ を出力する．

手続き 6.2 (拡大合流性自動証明システム) 項書き換え系 R，停止性検証器 isTerminating，定数 max_step を入力として受け取る．

1. 待ち行列 Que $= \emptyset$ とおき，入力の項書き換え系 R を Que に加える．
2. Que が空ならば,「証明失敗」を出力して停止する．そうでなければ，Que から要素を取り出し，R とする．
3. R を分割するため，関数 div を用いる．div (R, isTerminating, max_step) の出力を $(\mathrm{S_1}, \mathrm{P_1}), (\mathrm{S_2}, \mathrm{P_2}), \ldots, (\mathrm{S_m}, \mathrm{P_m})$ とする．分割できなかった場合，つまり $m = 0$ の場合，手順 2 へ進む．それ以外の場合は手順 4 へ進む．
4. $\mathrm{xs_i}$ = testcp $(\mathrm{S_i}, \mathrm{P_i})$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ とおく．空リストとなる $\mathrm{xs_i}$ が存在すれば「CR」を出力して停止する．存在しなければ，$\mathrm{R} \cup \mathrm{xs_1}, \mathrm{R} \cup \mathrm{xs_2}, \ldots, \mathrm{R} \cup \mathrm{xs_m}$ を Que に加え，手順 2 へ進む．

拡大合流自動判定システムの疑似コードを図 13 に示す．

実装システムを用いて合流性自動証明実験を行った．実験には先に示した例と以降に示す例の全 10 例を用い，結果を表 1 にまとめた．なお，定数 max_step は 5 とした．表中の項目「拡大証明」には，合流性証明に成功した場合は “CR”，失敗した場合は “失敗” もしくは “発散” と記した．与えられた項書き換え系 R をどのように分割しても S の線形性と停止性および P の双方向性と逆到達可能性を同時にみたせず失敗した場合は “失敗” と記し，拡大が繰り返され停止せず失敗した場合は “発散” と記した．項目「$|R|$」と「$|R'|$」は，入力された項書き換え系 R の書き換え規則数と合流性条件をみたした項書き換え系 R' の書き換え規則数を表す．項目「時間」は処理に要した CPU 占有時間 [msec] を示す．比較のため合流性自動判定システム ACP[9] による結果も示した．

```
fun isReversible (P,max_step) =
  for all l→r∈P.∃k≤max_step. r →^k_P l

fun Join1step S P (u,v) =
  let val u' = normalform S u
      val v' = normalform S v
  in u' = v' or u' ←→_P v'
  end

fun testcp (S,P) =
  let val C = CP(S,P^sym) ∪ CP^-1(P^sym,S)
  in List.filter (not o Join1step S P) C
  end

fun div (R,isTerminating,max_step) =
  let
    fun conditions (S,P) =
      isLinear S
      and isTerminating S
      and isBidirectional P
      and isReversible (P,max_step)
      and List.all (Join1step S P) CP(S,S)
  in List.filter conditions
            ({(S,P) | S ∪ P = R})
  end
```

図 12. 拡大合流性自動証明システムの補助関数

```
Input : R, isTerminating, max_step

 1. Que := empty;
    Que.enque (R);

 2. if Que.isEmpty then return 「証明失敗」;
    R := Que.deque;

 3. (S1,P1),(S2,P2),...,(Sm,Pm)
    := div (R,isTerminating,max_step);

 4. xsi := testcp (Si,Pi) for i=1,2,... m
    if
       xsi = nil for some 1≤i≤m
    then return 「CR」;
    Que.enque (R∪xs1, R∪xs2, ..., R∪xsm)

 5. goto 2
```

図 13. 拡大合流性自動証明システムの流れ

例 6.8 は，以下のような拡大を繰り返し発散してしまい，合流性を証明できなかった．$\mathsf{b}+\mathsf{b}^{-1} \to \mathsf{a}$ が $(x+y)+z \to x+(y+z)$ へ重なり，危険対 $\langle\ \mathsf{a}+x, \mathsf{b}+(\mathsf{b}^{-1}+x)\ \rangle$ が生じる．これが書き換え規則 $\mathsf{b}+(\mathsf{b}^{-1}+x) \to \mathsf{a}+x$ として加わり，さらに $(x+y)+z \to x+(y+z)$ へ重なり，危険対 $\langle(\mathsf{a}+x)+y, \mathsf{b}+((\mathsf{b}^{-1}+x)+y)\rangle$ が生じる．以降，同様の拡大を繰り返す．

例 6.9，例 7.1 が失敗したのは，それぞれ非線形書き換え規則が含まれることが原因である．当該規則は非線形のため S に含めることができず，双方向性や逆到達可能性をみたさなくなるため P に含めることはできない．このように，与えられた項書き換え系をどのように分割しても必要とされる条件をみたせず，失敗する．

例 6.3

$$R\begin{cases} x+y & \to & y+x \\ (x+y)+z & \to & y+(z+x) \end{cases}$$

例 6.4

$$R\begin{cases} \mathsf{S}(x)+y & \to & \mathsf{S}(x+y) \\ x+0 & \to & x \\ x+y & \to & y+x \end{cases}$$

例 6.5

$$R\begin{cases} \mathsf{S}(x)+y & \to & \mathsf{S}(x+y) \\ x+0 & \to & x \\ x+y & \to & y+x \\ (x+y)+z & \to & y+(z+x) \end{cases}$$

例 6.6

$$R\begin{cases} x\vee\mathsf{T} & \to & \mathsf{T} \\ x\vee\mathsf{F} & \to & x \\ x\vee y & \to & y\vee x \\ (x\vee y)\vee z & \to & x\vee(y\vee z) \end{cases}$$

例 6.7

$$R\begin{cases} \mathsf{And3}(x, y, \mathsf{F}) & \to & \mathsf{F} \\ \mathsf{And3}(\mathsf{T}, \mathsf{T}, \mathsf{T}) & \to & \mathsf{T} \\ \mathsf{And3}(x, y, z) & \to & \mathsf{And3}(y, z, x) \end{cases}$$

例 6.8

$$R\begin{cases} \mathsf{a}+x & \to & x \\ \mathsf{b}+\mathsf{b}^{-1} & \to & \mathsf{a} \\ (x+\mathsf{b})+\mathsf{b}^{-1} & \to & x \\ x+y & \to & y+x \\ (x+y)+z & \to & x+(y+z) \end{cases}$$

例 6.9

$$R\begin{cases} \mathsf{e}*x & \to & x \\ -x*x & \to & \mathsf{e} \\ -x*(x*y) & \to & y \\ x*\mathsf{e} & \to & x \\ -\mathsf{e} & \to & \mathsf{e} \\ --x & \to & x \\ x*(-x) & \to & \mathsf{e} \\ x*((-x)*y) & \to & y \\ -(x*y) & \to & (-y)*(-x) \\ (x*y)*z & \to & y*(x*z) \\ x*y & \to & y*x \end{cases}$$

7　従来手法との比較

項書き換え系 R と等式集合 E で構成される等式付き項書き換え系 $\langle R, E\rangle$ の合流性を本論文の定理 4.5 によって示すためには，R を S, E^{sym} を P とみなして十分条件を判定すればよい．この手法 (手法 MAT) の特徴を以下に示す．

(MAT1) R の線形性が必要．

(MAT2) R の停止性が必要．

(MAT3) 危険対に対する条件証明．

(MAT4) R の書き換え関係を用いた条件証明．

一方，等式付き項書き換え系 $\langle R, E\rangle$ の合流性証明法としては，J. P. Jouannaud と H. Kirchner による十分条件 (定理 16 [6]) が広く知られている．この手法 (手法 JK) の特徴は以下のようになる．

(JK1) R の線形性が不要．

(JK2) R の E 相対停止性 (E を法とした停止性) が必要．

(JK3) E 危険対 (E 単一化による危険対) に対

表 1. 合流性自動証明システムの実験結果

例	拡大証明	$\|R\|$	$\|R'\|$	時間 (msec)	ACP
5.6	CR	4	6	84	失敗
6.3	CR	2	2	27	失敗
6.4	CR	3	5	62	失敗
6.5	CR	4	6	84	失敗
6.6	CR	4	6	55	失敗
6.7	CR	3	5	46	失敗
6.8	発散	5	–	–	失敗
6.9	失敗	11	–	–	失敗
7.1	失敗	9	–	–	失敗
7.2	CR	3	3	21	CR

する条件証明.

(JK4) R の E 書き換え関係 (E 照合による書き換え関係) を用いた条件証明.

本論文の手法 MAT と比較すると，手法 JK は非線形な R に対しても適用できる点が有利である．しかし，合流性の十分条件に，手法 MAT が通常の停止性，危険対，書き換え関係のみを用いるのに対し，手法 JK では E を法としてこれらを考える必要がある．このため，手法 JK では証明手続きがはるかに複雑となり，自動化も簡単ではない．また，停止性をみたしても E 停止性をみたさない R も存在するので，手法 MAT で合流性を証明できたとしても手法 JK で証明できるとは限らない．以下に，一方の手法のみで合流性を証明できる例を示す.

例 7.1 (非線形規則を含む例) 以下の等式付き項書き換え系 $\langle R, E\rangle$ を考える.

$$R\left\{\begin{array}{rcl} \mathsf{S}(x)+y & \to & \mathsf{S}(x+y)\\ 0+x & \to & x\\ \mathsf{S}(x)*y & \to & y+(x*y)\\ 0*y & \to & 0\\ x*(y+z) & \to & (x*y)+(x*z) \end{array}\right.$$
$$E\left\{\begin{array}{rcl} x+y & \approx & y+x\\ (x+y)+z & \approx & x+(y+z)\\ x*y & \approx & y*x\\ (x*y)*z & \approx & x*(y*z) \end{array}\right.$$

このとき，R は非線形規則 $x*(y+z) \to (x*y)+(x*z)$ を含むので本論文の手法 MAT は適用できない．しかし，J. P. Jouannaud と H. Kirchner の手法 JK を用いると $\langle R, E\rangle$ の合流性を示すことができる.

例 7.2 (E 相対停止性をみたさない例) 以下の等式付き項書き換え系 $\langle R, E\rangle$ を考える.

$$R\left\{\begin{array}{rcl} \mathsf{f}(0,0) & \to & \mathsf{f}(0,1)\\ \mathsf{f}(1,0) & \to & \mathsf{f}(0,0) \end{array}\right.$$
$$E\left\{\begin{array}{rcl} \mathsf{f}(x,y) & \approx & \mathsf{f}(y,x) \end{array}\right.$$

このとき，R は線形で停止性をみたすので手法 MAT で合流性を示すことができる．しかし，$\mathsf{f}(0,0) \to_R \mathsf{f}(0,1) \to_E \mathsf{f}(1,0) \to_R \mathsf{f}(0,0)$ となり，R は E 相対停止性をみたさない．よって，手法 JK を適用することはできない.

8 おわりに

本論文では，停止性をもたない交換律などの書き換え規則を含む項書き換え系の合流性を保証する新しい合流性条件を示した．さらに，この合流性条件をみたさない項書き換え系に対しては，リダクション等価性を保つ書き換え規則を合流条件をみたすまで次々と追加していくことで，合流性の判定を試みる拡大合流性自動証明手続きの概念を提案した.

本論文で提案した合流性自動証明手続きは，従来の等式付き項書き換え系でもちいられていた E 相対停止性や E 危険対に基づく合流性証明手続きとは異なり，通常の停止性と危険対に基づいているため，実装は比較的容易である．本論文では，提案手法を SML/NJ を用いて実装し，吉田らによって開発されている合流性自動判定システム ACP で判定に失敗した例に対して合流性自動証明の実験を行った．その結果，交換律などの双方向で停止しない書き換え規則を含む場合には，提案手法の有効性が明らかになった.

さらに，本論文で提案した合流条件と，従来の等式付き項書き換え系に基づく合流条件を比較し，一方の合流条件は適用できるが，他方の合流条件は適用できない例がそれぞれ存在することを示した．提案した合流条件の線形性などの制約を緩和して適用範囲を広げることや，拡大合流性自動証明手続きの効率的な実装方法などは今後の課題である．

謝辞

本論文に有益で丁重なコメントを頂きました査読者の方々に感謝致します．なお，本研究は一部日本学術振興会科学研究費 20500002，19500003 の補助を受けて行われた．

参考文献

[1] T. Aoto, J. Yoshida and Y. Toyama. Proving confluence of term rewriting systems automatically, In *Proc. RTA 2009*, LNCS 5595, pp. 93–102, Springer-Verlag, 2009.

[2] F. Baader and T. Nipkow, *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, 1998.

[3] L. Backmair and N. Dershowitz, Equational inference, canonical proofs, and proof orderings, *J. ACM*, Vol. 41, No. 2, pp. 236–276, 1994.

[4] N. Dershowitz and Z. Manna, Proving termination with multiset orderings, *Commun. ACM*, Vol. 22, No. 8, pp. 465–476, 1979.

[5] G. Huet, Confluent reductions: abstract properties and applications to term rewriting systems, *J. ACM*, Vol. 27, No. 4, pp. 797–821, 1980.

[6] J. P. Jouannaud and H. Kirchner, Completion of a set of rules modulo a set of equations, *SIAM Journal on Computing*, Vol. 15, No. 4, pp. 1155–1194, 1986.

[7] D.E. Knuth and P.B. Bendix, Simple word problems in universal algebras, *Computational problems in abstract algebra*, (J. Leech eds.), Pergamon Press, Oxford (1970), pp. 263–297; included also in *Automation of reasoning 2* (Siekmann and Wrightson eds.), Springer (1983), pp. 342–376.

[8] V. van Oostrom, Developing developments, *Theoretical Computer Science*, Vol. 175, No. 1, pp. 159–181, 1997.

[9] 吉田順一, 青戸等人, 外山芳人, 項書き換えシステムの合流性自動判定, コンピュータソフトウェア, Vol. 26, No.2, pp. 76–92, 2009.