2023年度 数理論理学

講義資料(6)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

目次

∨の導入・除去規則

(9) ∨の導入

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix}}{A \vee B}\vee\mathrm{I} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ B\end{matrix}}{A \vee B}\vee\mathrm{I}$$

(10) ∨の除去

$$\dfrac{\begin{matrix}\\ \vdots\\ A \vee B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A]^i\\ \vdots\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]^i\\ \vdots\\ C\end{matrix}}{C}\vee\mathrm{E}^i$$

∨の導入規則は **2** 種類あるが区別しない．

∨の除去規則は **3** つの証明図に対して推論を適用する．**2** 種類の仮定 $[A], [B]$ を除去する．仮定 $[A]$ が除去できる **(**何個でもよい**)** のは真中の証明図のなかのみ．仮定 $[B]$ が除去できる **(**何個でもよい**)** のは右の証明図のなかのみ．

証明図の構成例 (1)

1.

$$\mathcal{D}_1 \;=\; [\mathtt{Q}]$$

は結論に Q を持つ証明図．証明図 $\mathcal{D}_1$ に $\vee$ の導入規則を使って，以下の証明図を得る．

$$\mathcal{D}_2 \;=\; \dfrac{[\mathtt{Q}]}{\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}}\,\vee\mathrm{I}$$

2. 同様にして得られる以下の証明図を $\mathcal{D}_3$ とおく．

$$\mathcal{D}_3 \;=\; \dfrac{[\mathtt{P}]}{\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}}\,\vee\mathrm{I}$$

$\mathcal{D}_2$ と $\mathcal{D}_3$ の結論は，両方とも $\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}$ であることに注意．

3. 次に$\mathcal{D}_2$と$\mathcal{D}_3$を用いて，$\vee$の除去規則の適用を行なった以下の証明図を作る.

$$\mathcal{D}_4 \quad = \qquad \dfrac{[\mathtt{Q} \vee \mathtt{P}] \qquad \dfrac{[\mathtt{Q}]^1}{\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}}\vee\mathrm{I} \qquad \dfrac{[\mathtt{P}]^1}{\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}}\vee\mathrm{I}}{\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}}\vee\mathrm{E}^1$$

4. $\mathcal{D}_4$に対して，$\rightarrow$の導入規則を適用すると，

$$\dfrac{\dfrac{[\mathtt{Q} \vee \mathtt{P}]^2 \qquad \dfrac{[\mathtt{Q}]^1}{\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}}\vee\mathrm{I} \qquad \dfrac{[\mathtt{P}]^1}{\mathtt{P} \vee \mathtt{R}}\vee\mathrm{I}}{\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}}\vee\mathrm{E}^1}{\mathtt{Q} \vee \mathtt{P} \rightarrow \mathtt{P} \vee \mathtt{Q}}\rightarrow\mathrm{I}^2$$

この証明図はもう除去する仮定がない．従って，これは$\mathtt{Q} \vee \mathtt{P} \rightarrow \mathtt{P} \vee \mathtt{Q}$の証明図.

$\vee$の除去規則の直観的な意味

$\vee$の除去規則は，場合分けによる証明を一般化したものになっている．

自然数nに関する命題$\phi(n)$を **(1)** nが奇数の場合，**(2)** nが偶数の場合，の**2**つの場合に分けて示すことを考える．

このとき，推論規則の命題A, B, Cはそれぞれ次のように対応する:

A — nは奇数
B — nは偶数
C — $\phi(n)$

従って，$\vee$の除去規則の**1**番左の証明は'nは奇数か，あるいは，nは偶数である'であるという，場合分けが正しいことを表わす証明に対応している．

Cを結論とする残りの**2**つの証明図

$$
\begin{array}{ccc}
[A] & \qquad\qquad & [B] \\
\vdots & & \vdots \\
C & & C
\end{array}
$$

は，それぞれ，

(1) nが奇数であることを仮定して $\phi(n)$を示した証明

(2) nが偶数であることを仮定して $\phi(n)$を示した証明

に対応する**.**

最終的には,「 nは奇数である」や「 nは偶数である」という仮定は残っていないことに注意．これは，推論を適用した後の証明図

$$
\dfrac{\begin{array}{c} \\ \vdots \\ A \vee B \end{array} \quad \begin{array}{c} [A]^i \\ \vdots \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B]^i \\ \vdots \\ C \end{array}}{C} \vee\mathrm{E}^i
$$

において，$[A]$や$[B]$といった，それぞれの**“場合”**を示すための仮定が除去されていることに対応する**.**

演習 **6.1.**　以下の証明図における仮定の除去のやり方について，間違いを指摘せよ．

(1)

$$
\dfrac{\dfrac{[\mathtt{P}]^1}{\mathtt{P} \lor \mathtt{P}}\,\lor\mathrm{I} \qquad [\mathtt{P}]^1 \qquad [\mathtt{P}]^1}{\mathtt{P}}\,\lor\mathrm{E}^1
$$

(2)

$$
\dfrac{\dfrac{[\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}]^2 \qquad \dfrac{[\mathtt{P}]^1 \qquad [\mathtt{Q}]^1}{\mathtt{P} \land \mathtt{Q}}\,\land\mathrm{I} \qquad \dfrac{[\mathtt{P}]^1 \qquad [\mathtt{Q}]^1}{\mathtt{P} \land \mathtt{Q}}\,\land\mathrm{I}}{\mathtt{P} \land \mathtt{Q}}\,\lor\mathrm{E}^1}{\mathtt{P} \lor \mathtt{Q} \to \mathtt{P} \land \mathtt{Q}}\,{\to}\mathrm{I}^2
$$

演習 6.2. $\vee$ の除去規則を用いた証明図の例である．足りない部分を書き入れよ．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\qquad\qquad\qquad]^2 \qquad \dfrac{[\mathtt{P} \to \mathtt{R}]^4 \qquad [\qquad]^1}{\mathtt{R}}{\to}\mathrm{E} \qquad \dfrac{[\mathtt{Q} \to \mathtt{R}]^3 \qquad [\qquad]^1}{\mathtt{R}}{\to}\mathrm{E}}{\qquad}{\vee}\mathrm{E}^1}{(\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}) \to \mathtt{R}}{\to}\mathrm{I}^2}{(\mathtt{Q} \to \mathtt{R}) \to (\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}) \to \mathtt{R}}{\to}\mathrm{I}^3}{(\mathtt{P} \to \mathtt{R}) \to (\mathtt{Q} \to \mathtt{R}) \to (\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}) \to \mathtt{R}}{\to}\mathrm{I}^4
$$

演習 6.3. $(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \wedge (\mathtt{R} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{P} \vee \mathtt{R} \to \mathtt{Q}$ の証明図を与えよ．

1. 素直に $\to$ の導入で展開していくと，

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}[(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \land (\mathtt{R} \to \mathtt{Q})] \quad [\mathtt{P} \lor \mathtt{R}] \\ \vdots \\ \overline{\mathtt{Q}}\end{matrix}}{\mathtt{P} \lor \mathtt{R} \to \mathtt{Q}} \to\mathrm{I}}{(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \land (\mathtt{R} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{P} \lor \mathtt{R} \to \mathtt{Q}} \to\mathrm{I}$$

2. ここで，$[\mathtt{P} \lor \mathtt{R}]$ があるので，$\lor$ の除去規則を用いることを考えて，場合分けして $\mathtt{Q}$ の証明を試みる．

$$\begin{matrix}[(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \land (\mathtt{R} \to \mathtt{Q})] \quad [\mathtt{P}] \\ \vdots \\ \mathtt{Q}\end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix}[(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \land (\mathtt{R} \to \mathtt{Q})] \quad [\mathtt{R}] \\ \vdots \\ \mathtt{Q}\end{matrix}$$

ここで，$[\mathrm{P}]$ と $[\mathrm{R}]$ は場合分けの仮定であることに注意．

3. 場合分けの仮定を用いた2つの証明図が出来る.

$$\dfrac{\dfrac{[(\mathtt{P}\to\mathtt{Q})\land(\mathtt{R}\to\mathtt{Q})]}{\mathtt{P}\to\mathtt{Q}}\,\land\mathrm{E}\qquad[\mathtt{P}]}{\mathtt{Q}}\,{\to}\mathrm{E}\qquad\dfrac{\dfrac{[(\mathtt{P}\to\mathtt{Q})\land(\mathtt{R}\to\mathtt{Q})]}{\mathtt{R}\to\mathtt{Q}}\,\land\mathrm{E}\qquad[\mathtt{R}]}{\mathtt{Q}}\,{\to}\mathrm{E}$$

4. 最後に, $\lor$ の除去規則を用いて, 構成した証明図を合わせる.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathtt{P}\lor\mathtt{R}]^2\qquad\dfrac{\dfrac{[(\mathtt{P}\to\mathtt{Q})\land(\mathtt{R}\to\mathtt{Q})]^3}{\mathtt{P}\to\mathtt{Q}}\,\land\mathrm{E}\qquad[\mathtt{P}]^1}{\mathtt{Q}}\,{\to}\mathrm{E}\qquad\dfrac{\dfrac{[(\mathtt{P}\to\mathtt{Q})\land(\mathtt{R}\to\mathtt{Q})]^3}{\mathtt{R}\to\mathtt{Q}}\,\land\mathrm{E}\qquad[\mathtt{R}]^1}{\mathtt{Q}}\,{\to}\mathrm{E}}{\mathtt{Q}}\,\lor\mathrm{E}^1}{\mathtt{P}\lor\mathtt{R}\to\mathtt{Q}}\,{\to}\mathrm{I}^2}{(\mathtt{P}\to\mathtt{Q})\land(\mathtt{R}\to\mathtt{Q})\to\mathtt{P}\lor\mathtt{R}\to\mathtt{Q}}\,{\to}\mathrm{I}^3$$

演習 **6.4.** $(\mathtt{P}\to\mathtt{Q}\lor\mathtt{R})\to\mathtt{P}\to\mathtt{R}\lor\mathtt{Q}$ の証明図を与えよ.

1. 素直に導入規則で展開していくと,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \lor \mathtt{R}] \quad [\mathtt{P}] \\ \vdots \\ \mathtt{R}\ \text{または}\ \mathtt{Q}\end{array}}{\mathtt{R} \lor \mathtt{Q}}\lor\mathrm{I}}{\mathtt{P} \to \mathtt{R} \lor \mathtt{Q}}\to\mathrm{I}}{(\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \lor \mathtt{R}) \to \mathtt{P} \to \mathtt{R} \lor \mathtt{Q}}\to\mathrm{I}$$

2. ここで，**2**つの仮定で $\to$ の除去規則が適用でき，$\mathtt{Q}$と $\mathtt{R}$での場合分けが出来ることに気付くと,

$$\dfrac{\dfrac{[\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \lor \mathtt{R}] \quad [\mathtt{P}]}{\mathtt{Q} \lor \mathtt{R}}\to\mathrm{E} \qquad \begin{array}{c}[\mathtt{Q}]^1 \\ \vdots \\ \mathtt{R}\end{array} \qquad [\mathtt{R}]^1}{\mathtt{R}}\lor\mathrm{E}^1$$

3. しかしながら，

$$\begin{array}{c}[\mathtt{Q}]^1 \\ \vdots \\ \mathtt{R}\end{array} \quad \text{や} \quad \begin{array}{c}[\mathtt{R}]^1 \\ \vdots \\ \mathtt{Q}\end{array}$$

といった証明困難な証明図が必要になってしまうことに気が付く．

4. そこで，$\vee$の除去規則の適用を**1**つ後にもってくるように，方針を変更する．

$$\dfrac{\dfrac{[\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \vee \mathtt{R}] \qquad [\mathtt{P}]}{\mathtt{Q} \vee \mathtt{R}}\to\mathrm{E} \qquad \begin{array}{c}[\mathtt{Q}]^1 \\ \vdots \\ \mathtt{R} \vee \mathtt{Q}\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\mathtt{R}]^1 \\ \vdots \\ \mathtt{R} \vee \mathtt{Q}\end{array}}{\mathtt{R} \vee \mathtt{Q}}\vee\mathrm{E}^1$$

5. 証明図の完成.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \lor \mathtt{R}]^3 \qquad [\mathtt{P}]^2}{\mathtt{Q} \lor \mathtt{R}}\,{\to}\mathrm{E} \qquad \dfrac{[\mathtt{Q}]^1}{\mathtt{R} \lor \mathtt{Q}}\,{\lor}\mathrm{I} \qquad \dfrac{[\mathtt{R}]^1}{\mathtt{R} \lor \mathtt{Q}}\,{\lor}\mathrm{I}}{\mathtt{R} \lor \mathtt{Q}}\,{\lor}\mathrm{E}^1}{\mathtt{P} \to \mathtt{R} \lor \mathtt{Q}}\,{\to}\mathrm{I}^2}{(\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \lor \mathtt{R}) \to \mathtt{P} \to \mathtt{R} \lor \mathtt{Q}}\,{\to}\mathrm{I}^3
$$

この例のように，$\lor$の除去規則を用いる場所をうまく選ばないと証明に失敗することがある．冗長な証明図にはなることもあるが，$\lor$の除去規則をはやめに(証明図の下の方で)用いた方が成功する場合が多い．

目次

排中律と背理法

(11) 排中律

$$\dfrac{}{A \vee \neg A}\,\mathrm{EM}$$

(12) 背理法 **(**$\perp$ 規則**)**

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg A]^i \\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{A}\,\mathrm{RAA}^i \qquad \left(\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \perp\end{matrix}}{A}\,\perp\right)$$

除去される $[\neg A]$ が **1** つ以上ある場合を背理法とよび，除去される仮定 $[\neg A]$ が 0 個の場合 $\perp$ 規則とよぶ.

背理法 **(**$\perp$ 規則**)** では，A と $\neg A$ の場所が $\neg$ の導入規則とは逆になっていることに注意.

違いに着目するために，¬の導入規則と背理法 (⊥規則) を並べてみる．

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]^i \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg A}\,\neg\mathrm{I}^i \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg A]^i \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{A}\,\mathrm{RAA}^i$$

¬の導入規則は,「 Aではない」を導くのに Aを仮定して矛盾することを示す.「 …ではない」の意味を考えると，自然な推論のように思える．一方，背理法は Aを導くのにわざわざ「 Aではない」ことを仮定する，人によっては屁理屈っぽいと感じるかもしれない．(なお，しばしば，¬の導入規則を使う場合も，背理法による証明と断わる場合もあるが，正確には間違いである．)

$\top$の取り扱い

$\perp$は自然演繹法においては重要な役割を果たしている．

一方，自然演繹法においては，$\top$については用いる意味がほとんどない．慣例に従って，自然演繹法においては，$\top$は，命題論理式$\mathtt{P} \to \mathtt{P}$を省略したものと見做して，取り扱わない．

証明図の構成例 (2)

1. 証明図 $[\mathrm{P}]$ と 証明図 $[\neg\mathrm{P}]$ から $\neg$ の除去規則を使うと,

$$\mathcal{D}_1 \;=\; \dfrac{[\neg\mathrm{P}] \qquad [\mathrm{P}]}{\perp}\,\neg\mathrm{E}$$

という 証明図が作れる.

2. $\mathcal{D}_1$ に $\perp$ の規則を使うと,

$$\mathcal{D}_2 \;=\; \dfrac{\dfrac{[\neg\mathrm{P}] \qquad [\mathrm{P}]}{\perp}\,\neg\mathrm{E}}{\mathtt{Q}}\,\perp$$

という 証明図が作れる.

3. 証明図 $[\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}]$，$\mathcal{D}_2$，証明図 $[\mathtt{Q}]$ に対して，$\vee$ の除去規則を適用して，

$$\mathcal{D}_3 \;=\; \dfrac{[\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}] \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg \mathtt{P}] \qquad [\mathtt{P}]^1}{\perp}\,\neg\mathrm{E}}{\mathtt{Q}}\,\perp \qquad [\mathtt{Q}]^1}{\mathtt{Q}}\,\vee\mathrm{E}^1$$

という 証明図が得られる．

4. $\mathcal{D}_3$ に対して，$\to$ の導入規則を **2** 回適用し，

$$\mathcal{D}_4 \;=\; \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}]^3 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg \mathtt{P}]^2 \qquad [\mathtt{P}]^1}{\perp}\,\neg\mathrm{E}}{\mathtt{Q}}\,\perp \qquad [\mathtt{Q}]^1}{\mathtt{Q}}\,\vee\mathrm{E}^1}{\neg \mathtt{P} \to \mathtt{Q}}\,{\to}\mathrm{I}^2}{\mathtt{P} \vee \mathtt{Q} \to \neg \mathtt{P} \to \mathtt{Q}}\,{\to}\mathrm{I}^3$$

演習 6.5. 次の命題論理式の証明図を与えよ.

(1) $(\neg \mathtt{P} \to \bot) \to \mathtt{P}$

(2) $(\neg \mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \land (\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{Q}$

(1) $(\neg \mathtt{P} \to \bot) \to \mathtt{P}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg \mathtt{P} \to \bot]^2 \qquad [\neg \mathtt{P}]^1}{\bot}\ \to\mathrm{E}}{\mathtt{P}}\ \mathrm{RAA}^1}{(\neg \mathtt{P} \to \bot) \to \mathtt{P}}\ \to\mathrm{I}^2$$

(2) $(\neg \mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \land (\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{Q}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathtt{P} \lor \neg \mathtt{P}}\ \mathrm{EM} \qquad \dfrac{\dfrac{[(\neg \mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \land (\mathtt{P} \to \mathtt{Q})]^2}{\mathtt{P} \to \mathtt{Q}}\ \land\mathrm{E} \qquad [\mathtt{P}]^1}{\mathtt{Q}}\ \to\mathrm{E} \qquad \dfrac{\dfrac{[(\neg \mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \land (\mathtt{P} \to \mathtt{Q})]^2}{\neg \mathtt{P} \to \mathtt{Q}}\ \land\mathrm{E} \qquad [\neg \mathtt{P}]^1}{\mathtt{Q}}\ \to\mathrm{E}}{\mathtt{Q}}\ \lor\mathrm{E}^1}{(\neg \mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \land (\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{Q}}\ \to\mathrm{I}^2$$

排中律と背理法の同等性

ここでは排中律と背理法の関係について説明する.

演習 6.6. (排中律を使わず) 背理法の推論規則 (とその他の推論規則) を使って，$A \vee \neg A$ の証明図を書け.

背理法の推論規則を使った，$A \vee \neg A$の証明図

$$
\dfrac{\dfrac{[\neg(A \vee \neg A)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(A \vee \neg A)]^2 \qquad \dfrac{[A]^1}{A \vee \neg A}\,\vee\mathrm{I}}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{\neg A}\,\neg\mathrm{I}^1}{A \vee \neg A}\,\vee\mathrm{I}}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{A \vee \neg A}\,\mathrm{RAA}^2
$$

従って，排中律の推論規則を取り除いてしまっても，実は，定理の集合 (証明可能な命題論理式の集合) は変わらない．

排中律から背理法への変換

排中律を用いた証明図は，背理法を用いた証明図への変換することが出来る．

$$\dfrac{}{A \vee \neg A}\,\mathrm{EM} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\dfrac{[\neg(A \vee \neg A)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(A \vee \neg A)]^2 \qquad \dfrac{[A]^1}{A \vee \neg A}\,\vee\mathrm{I}}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{\neg A}\,\neg\mathrm{I}^1}{A \vee \neg A}\,\vee\mathrm{I}}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{A \vee \neg A}\,\mathrm{RAA}^2$$

　この変換を証明図中の排中律全てに適用することにより，排中律を全く使っていない証明図が得られる．

背理法から排中律への変換

逆に，背理法を用いた証明図は，排中律を用いた証明図への変換することが出来る．

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]^i\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{A}\,\mathrm{RAA}^i \qquad\Longrightarrow\qquad \dfrac{\dfrac{}{A\vee\neg A}\,\mathrm{EM} \qquad [A]^i \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]^i\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{A}\,\bot}{A}\,\vee\mathrm{E}^i$$

この変換を証明図中の背理法全てに適用することにより，背理法を全く使っていない証明図(ただし $\bot$規則は使用)が得られる．

以上より，排中律をなくしても定理の証明能力は変わらないし，その逆に，背理法を $\perp$ 規則に制限しても定理の証明能力は変わらないことがわかる．

この講義では，”排中律⇒背理法” や”背理法⇒排中律” の変換は難易度が高いため，両方を推論規則として用いた．どちらか一方のみを使っている参考書も多い．

二重否定の除去

以上，排中律⇔背理法について見てきた．本講義では推論規則として採用しなかったが，しばしば有用な同等な推論規則がもう **1** つある．

二重否定の除去

$$\dfrac{}{\neg\neg A \to A}\,\mathrm{DNE}$$

排中律⇔背理法と同じ意味で，二重否定の除去⇔背理法 **(**従って，排中律⇔二重否定の除去**)** が成立する．

二重否定の除去から 背理法への変換

$$\dfrac{}{\neg\neg A \to A}\,\mathrm{DNE} \qquad\Longrightarrow\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg A]^2 \qquad [\neg A]^1}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{A}\,\mathrm{RAA}^1}{\neg\neg A \to A}\,{\to}\mathrm{I}^2$$

背理法から 二重否定の除去への変換

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]^i\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{A}\,\mathrm{RAA}^i \qquad\Longrightarrow\qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg\neg A \to A}\,\mathrm{DNE} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]^i\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\neg A}\,\neg\mathrm{I}^i}{A}\,{\to}\mathrm{E}$$

まとめ

- $\vee$の導入規則，除去規則

  $\vee$の除去規則は場合分けを用いた証明に対応

  $\vee$の除去規則では**2**種類の仮定を除去

- 排中律と背理法，$\perp$規則

  背理法と$\neg$の導入規則の違い

  排中律と背理法の同等性

補足資料

以下は，興味のある人へ，関連する発展的な話題の紹介．
講義では取り上げません．

目次

- 直観主義論理
- カリー・ハワードの対応

直観主義命題論理

講義で命題論理として紹介している論理は，より正確には古典命題論理とよばれる．

定義 6.7. **(**古典命題論理の**)** 自然演繹体系から，排中律と背理法をなくしたものを直観主義命題論理の自然演繹体系とよび，直観主義命題論理の自然演繹体系で証明可能な命題論理式を直観主義命題論理の定理とよぶ．

つまり，直観主義命題論理の定理とは，$\to, \land, \lor, \neg, \leftrightarrow$ の導入・除去規則 **((1)〜(10))** と，

(11′) $\perp$ 規則

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \perp\end{array}}{A}\,\perp$$

を用いて，証明される定理のこと．

排中律と背理法の同等性から以下の定理が成立することがわかる.

定理 **6.8.** Aを命題論理式としたとき，以下は同等である.

(1) 直観主義命題論理の自然演繹体系に排中律を加えてAが証明できる.

(2) 直観主義命題論理の自然演繹体系に背理法を加えてAが証明できる.

古典論理は数学で用いられる論理であり，直観主義論理は計算機科学への応用でよく用いられる論理.

古典命題論理では証明できた命題論理式が直観主義命題論理では証明できないこともある.

また，古典論理は，真理値が 2 つ (真と偽) からなる単純な意味論をもっていたが，直観主義論理は，そのような単純な意味論では特徴づけられない (⇒可能世界意味論).

一方，古典論理とは異なり，直観主義論理は **disjunction property** をもつなどの扱いやすい面もある.

古典命題論理では証明できるが，直観主義命題論理では証明できない命題論理式:

$$\neg \mathtt{P} \vee \mathtt{P} \qquad \textbf{(排中律)}$$

$$\neg\neg \mathtt{P} \to \mathtt{P} \qquad \textbf{(二重否定の除去)}$$

$$(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to (\neg \mathtt{P} \vee \mathtt{Q})$$

$$\neg(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \to \neg \mathtt{P} \vee \neg \mathtt{Q}$$

$$((\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{P}) \to \mathtt{P}$$

特に，

$$\neg\neg A \cong A,$$

$$A \to B \cong \neg A \vee B,$$

$$\neg(A \wedge B) \cong \neg A \vee \neg B$$

は，古典論理特有の性質であって，直観主義論理では成立していない．

古典論理では証明できるものの直観主義論理では証明できない定理は，自然演繹法で証明しようとすると，難しいことが多い．これは自然演繹法の欠点ともいえる．

一方，ゲンツェンが後に提案したシーケント計算では，そのような定理の証明も簡単に出来ることが多い．この講義では，シーケント計算には立ち入らないが，興味のある人は小野先生の参考書を見てみるとよい．

目次

- 直観主義論理
- カリー・ハワードの対応

ラムダ計算

自然演繹法に関連して，カリー・ハワードの対応を簡単に紹介する．カリー・ハワードの対応は，計算機科学と論理学を関連づける代表的なトピックスの1つである．

ラムダ計算: **ML**や**Haskell**などの関数型プログラミング言語の基礎となっている代表的な計算モデルの1つ．

ラムダ計算はチューリングマシンと同じぐらい歴史が古い．歴史的な理由で記号λ(ラムダ)を使うのでラムダ計算とよばれる．

ラムダ項

ラムダ計算で扱う対象はラムダ項とよばれる．ラムダ計算ではプログラムも値も全てラムダ項で表現されるのが特徴.

$(\lambda \mathrm{x}((+\mathrm{x})\mathrm{x}))$: 引数を 2 倍にするプログラム

$((\lambda \mathrm{x}((+\mathrm{x})\mathrm{x}))5)$: プログラムに 5 を適用

$((\lambda \mathrm{x}((+\mathrm{x})\mathrm{x}))5) \twoheadrightarrow 10$: プログラムの計算

定義 6.9. ラムダ項を以下のように帰納的に定義する.

(1) 変数および定数はラムダ項である.

(2) s がラムダ項で x が変数であるとき，$(\lambda x s)$ はラムダ項である.

(3) s, t がラムダ項であるとき，$(s\, t)$ はラムダ項である.

例． x, yを変数，$+$を定数とする．

- x, yはラムダ項
- $+$はラムダ項
- $(\mathrm{xx}), (\mathrm{xy}), (\mathrm{x}+), (\mathrm{yx}), (\mathrm{yy}), (\mathrm{y}+), \ldots$はラムダ項
- $(\lambda\mathrm{xx}), (\lambda\mathrm{x}+), (\lambda\mathrm{xy}), (\lambda\mathrm{yx}), (\lambda\mathrm{yy}), \ldots$はラムダ項
- $(\lambda\mathrm{x}(\mathrm{xx})), (\lambda\mathrm{x}(+\mathrm{x})), (\lambda\mathrm{y}(\mathrm{x}+), \ldots$はラムダ項
- $(\lambda\mathrm{y}(\lambda\mathrm{x}(\mathrm{xy}))), (((\lambda\mathrm{xx})(\lambda\mathrm{y}(\mathrm{yy}))), \ldots$はラムダ項

ラムダ項でないものの例．

- $(\lambda\lambda), (\lambda x), (\lambda(xy)), (x\lambda), \ldots$

ラムダ項の計算: β簡約

ラムダ項の $((\lambda xs)t)$ の形の部分に関する以下の変換を β(ベータ)簡約とよび，$\rightarrow_\beta$ で表す.

$$((\lambda xs)t) \rightarrow_\beta s[x := t]$$

ここで，$s[x := t]$ は，ラムダ項 s の変数 x を t で置き換えて得られる項を表わす.

β簡約はラムダ項の最も基本的な計算ステップ

$$((\lambda \mathtt{x}((+\mathtt{x})\mathtt{x}))2) \rightarrow_\beta ((+2)2)$$
$$((\lambda \mathtt{f}(\mathtt{f}0))(+3)) \rightarrow_\beta ((+3)0)$$
$$((\lambda \mathtt{x}(\mathtt{xx}))(\lambda \mathtt{x}(\mathtt{xx}))) \rightarrow_\beta ((\lambda \mathtt{x}(\mathtt{xx}))(\lambda \mathtt{x}(\mathtt{xx})))$$

型付ラムダ計算

型: どんな種類の変数か，どの集合からどの集合への関数なのかを明示したもの

型付ラムダ項

$$
\begin{aligned}
&0 : \mathsf{Nat} \\
&\mathtt{s} : (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}) \\
&(\mathtt{s}0) : \mathsf{Nat} \\
&+ : (\mathsf{Nat} \to (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat})) \\
&(+0) : (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}) \\
&((+(\mathtt{s}0))(\mathtt{s}0)) : \mathsf{Nat}
\end{aligned}
$$

Natは自然数を表わす型，$(\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat})$は自然数から自然数への関数を表わす型.

変数や定数の型はそれぞれ前もって決まっているとする．

定義 6.10. 型付ラムダ項を以下のように帰納的に定義する．

(1) 型Aの変数および定数は，型Aの型付ラムダ項である．

(2) sを型Bの型付ラムダ項，xを型Aの変数とするとき，(λxs)は型$(A \to B)$の型付ラムダ項.

(3) sを型$(A \to B)$の型付ラムダ項，tを型Aの型付ラムダ項とするとき，$(s\,t)$は型Bの型付ラムダ項.

λのある型付ラムダ項の例

$$(\lambda \mathtt{x}(\mathtt{sx})) : (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat})$$
$$(\lambda \mathtt{x}((+\mathtt{x})\mathtt{x})) : (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat})$$
$$((\lambda \mathtt{f}(\mathtt{f0}))(\lambda \mathtt{xx})) : \mathsf{Nat}$$

型付ラムダ項の導出図

$\mathrm{s} : (\mathsf{A} \to \mathsf{A})$とするとき，$(\mathrm{ss})$はラムダ項だが，型付ラムダ項ではない．

ラムダ項が型付ラムダ項であるとき，型付ラムダ項の帰納的定義に従って，型付ラムダ項の導出図が構成できる．

型付ラムダ項の導出図の例．

$$\dfrac{\dfrac{[+ : (\mathsf{Nat} \to (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}))] \quad [\mathrm{x} : \mathsf{Nat}]}{(+\mathrm{x}) : (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat})} \quad [\mathrm{x} : \mathsf{Nat}]}{\dfrac{((+\mathrm{x})\mathrm{x}) : \mathsf{Nat}}{(\lambda \mathrm{x}((+\mathrm{x})\mathrm{x})) : (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat})}}$$

導出図の構成:

(1)

$$\frac{\vdots}{(\lambda \mathtt{x}((+\mathtt{x})\mathtt{x})) : (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat})}$$

(2) 先頭が λ で，$\mathtt{x}$ の型は Nat なので，

$$\frac{\dfrac{\begin{array}{c}[\mathtt{x} : \mathsf{Nat}] \\ \vdots\end{array}}{((+\mathtt{x})\mathtt{x}) : \mathsf{Nat}}}{(\lambda \mathtt{x}((+\mathtt{x})\mathtt{x})) : (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat})}$$

(3) 先頭が λ でないので，

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\mathtt{x} : \mathsf{Nat}]\\ \vdots \\ (+\mathtt{x}) : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\mathtt{x} : \mathsf{Nat}]\\ \vdots \\ \mathtt{x} : \mathsf{Nat}\end{array}}{((+\mathtt{x})\mathtt{x}) : \mathsf{Nat}}}{(\lambda \mathtt{x}((+\mathtt{x})\mathtt{x})) : (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat})}
$$

(4) $+$ の型が，$(\mathsf{Nat} \to (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}))$ なので，

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[+ : (\mathsf{Nat} \to (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}))] \qquad [\mathtt{x} : \mathsf{Nat}]}{(+\mathtt{x}) : (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat})} \qquad [\mathtt{x} : \mathsf{Nat}]}{((+\mathtt{x})\mathtt{x}) : \mathsf{Nat}}}{(\lambda \mathtt{x}((+\mathtt{x})\mathtt{x})) : (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat})}
$$

カリー・ハワードの対応

型付ラムダ項の導出図からラムダ項をとりのぞくと，自然演繹体系の証明図が得られる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\mathsf{Nat} \to (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}))] \quad [\mathsf{Nat}]^{x}}{(\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat})} {\to}\mathrm{E} \qquad [\mathsf{Nat}]^{x}}{\mathsf{Nat}} {\to}\mathrm{E}}{\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}} {\to}\mathrm{I}^{x}$$

つまり，以下のような対応関係がある：

命題論理式	$\approx$	型
証明図	$\approx$	型付ラムダ項の導出図

また，型付ラムダ項のβ-簡約は，以下で説明するように，自然演繹体系の証明図の変換に対応する．

例えば，

$$((\lambda \mathtt{x}((+\mathtt{x})\mathtt{x}))2) : \mathsf{Nat} \to_\beta ((+2)2) : \mathsf{Nat}$$

を導出図の変換で見てみよう．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[+ : (\mathsf{Nat} \to (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}))] \quad [\mathtt{x} : \mathsf{Nat}]}{(+\mathtt{x}) : (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat})} \qquad [\mathtt{x} : \mathsf{Nat}]}{((+\mathtt{x})\mathtt{x}) : \mathsf{Nat}}}{(\lambda \mathtt{x}((+\mathtt{x})\mathtt{x})) : (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat})} \qquad [2 : \mathsf{Nat}]}{((\lambda \mathtt{x}((+\mathtt{x})\mathtt{x}))2) : \mathsf{Nat}}$$

$$\to_\beta \qquad \dfrac{\dfrac{[+ : (\mathsf{Nat} \to (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}))] \quad [2 : \mathsf{Nat}]}{(+2) : (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat})} \qquad [2 : \mathsf{Nat}]}{((+2)2) : \mathsf{Nat}}$$

これを証明図の変換に直すと，

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\mathsf{Nat} \to (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}))] \quad [\mathsf{Nat}]^{\mathrm{x}}}{(\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat})} \qquad [\mathsf{Nat}]^{\mathrm{x}}}{\mathsf{Nat}} \qquad [\mathsf{Nat}]}{(\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat})}}{\mathsf{Nat}}$$

$$\to_\beta \qquad \dfrac{\dfrac{[(\mathsf{Nat} \to (\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}))] \quad [\mathsf{Nat}]}{(\mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat})} \qquad [\mathsf{Nat}]}{\mathsf{Nat}}$$

となる．これは，以下のような，証明図の冗長性を取り除く変換になっている：

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[A]^{\mathrm{x}} \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \to B}\to\mathrm{I}^{\mathrm{x}} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D} \\ A\end{array}}{B} \qquad \to_\beta \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D} \\ A \\ \vdots \\ B\end{array}$$

以上をまとめると，以下のような対応関係がある：

$$\begin{array}{rcl}
\text{命題論理式} & \approx & \text{型} \\
\text{証明図} & \approx & \text{型付ラムダ項の導出図} \\
\text{証明図の冗長性の削除} & \approx & \text{型付ラムダ項の計算}
\end{array}$$

この対応を**カリー・ハワードの対応**とよぶ．

ここでは $\to$ のみを説明したが，$\wedge$ や $\vee$ でも自然な対応がある：

$$\begin{array}{lcl}
A \wedge B & \Leftrightarrow & \text{型 } A \text{ のデータ a と型 } B \text{ のデータ b の対 } (\mathrm{a}, \mathrm{b}) \text{ の型} \\
A \vee B & \Leftrightarrow & \text{型 } A \text{ のデータ a か型 } B \text{ のデータ b を} \\
 & & \text{要素に持つデータ構造の型}
\end{array}$$

(後者の型は，例えば，**ML** では，

```
datatype intOrChar = madeOfInt int | madeOfChar char
```

のように宣言される．)