2023年度 数理論理学

講義資料(4)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

目次

- 論理的同値性と命題論理式の同値変形
- 標準形と標準形の構成

論理的同値性

定義 4.1. A, Bを命題論理式とする．任意の付値vについて，$[\![A]\!]_v = [\![B]\!]_v$となるとき，$A$と$B$は論理的同値であるといい，$A \cong B$と書く．

命題論理式の論理的同値性は真理値表を用いてチェックできる．

例 4.2. $\neg(\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}) \cong \neg\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q}$

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}$	$\neg(\mathtt{P} \lor \mathtt{Q})$	$\neg\mathtt{P}$	$\neg\mathtt{Q}$	$\neg\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q}$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

演習 4.3.

真理値表を用いて，$\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \cong \neg\mathtt{Q} \to \neg\mathtt{P}$を確かめよ.

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \to \mathtt{Q}$	$\neg\mathtt{Q}$	$\neg\mathtt{P}$	$\neg\mathtt{Q} \to \neg\mathtt{P}$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

演習 4.4.

(真理値表ではなく) 解釈の定義を用いて，$\neg(\mathtt{P} \land \mathtt{Q}) \cong \neg\mathtt{P} \lor \neg\mathtt{Q}$ であることを示せ.

演習 4.3.

真理値表を用いて，$\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \cong \neg\mathtt{Q} \to \neg\mathtt{P}$を確かめよ．

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \to \mathtt{Q}$	$\neg\mathtt{Q}$	$\neg\mathtt{P}$	$\neg\mathtt{Q} \to \neg\mathtt{P}$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

演習 4.4.

(真理値表ではなく)解釈の定義を用いて，$\neg(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \cong \neg\mathtt{P} \vee \neg\mathtt{Q}$ であることを示せ．

(解答例)

$[\![\neg(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q})]\!]_v = \mathrm{T} \Leftrightarrow [\![\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{F}$

$\Leftrightarrow [\![\mathtt{P}]\!]_v = \mathrm{F}$または$[\![\mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{F}$

$\Leftrightarrow [\![\neg\mathtt{P}]\!]_v = \mathrm{T}$または$[\![\neg\mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{T} \Leftrightarrow [\![\neg\mathtt{P} \vee \neg\mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{T}$ $\square$

注意! 注意! 注意!

$$\boxed{= \text{と} \ \cong \text{は異なる}}$$

“$A = B$” の意味は，命題論理式 A と 命題論理式 B はまったく 同じ 形，ということ．

一方，“$A \cong B$” の意味は，命題論理式 A と 命題論理式 B が論理的同値，ということ．つまり，A と B の形は違ってもよい．

例.
$\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \cong \neg\mathtt{Q} \to \neg\mathtt{P}$ ではあるが，$\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \neq \neg\mathtt{Q} \to \neg\mathtt{P}$ (つまり，$\mathtt{P} \to \mathtt{Q} = \neg\mathtt{Q} \to \neg\mathtt{P}$ ではない).

トートロジー・充足可能性と論理的同値性の関係

トートロジー・充足可能性と論理的同値性の間には以下に示すような関係がある．証明は容易なので省略.

(1) A がトートロジーかつ $A \cong B \Longrightarrow B$ がトートロジー
A が充足可能かつ $A \cong B \Longrightarrow B$ が充足可能

(2) $A \cong B \Longleftrightarrow A \leftrightarrow B$ がトートロジー

(3) A がトートロジー $\Longleftrightarrow A \cong \top$
$\neg A$ がトートロジー $\Longleftrightarrow A \cong \bot$

重要な同値式(1)

以下に重要な同値式を示す．$A, B, \ldots$は任意の命題論理式を表わす．

巾等律

$$A \wedge A \cong A \qquad A \vee A \cong A$$

交換律

$$A \wedge B \cong B \wedge A \quad A \vee B \cong B \vee A \quad A \leftrightarrow B \cong B \leftrightarrow A$$

結合律

$$(A \wedge B) \wedge C \cong A \wedge (B \wedge C)$$
$$(A \vee B) \vee C \cong A \vee (B \vee C)$$

分配律

$$A \wedge (B \vee C) \cong (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$(A \vee B) \wedge C \cong (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$
$$A \vee (B \wedge C) \cong (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$
$$(A \wedge B) \vee C \cong (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

吸収律

$$A \wedge (A \vee B) \cong A \qquad A \vee (A \wedge B) \cong A$$

ド・モルガンの法則

$$\neg(A \wedge B) \cong \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \cong \neg A \wedge \neg B$$

二重否定の法則

$$\neg\neg A \cong A$$

対偶

$$A \to B \cong \neg B \to \neg A$$

同値の法則

$$A \leftrightarrow B \cong (A \to B) \wedge (B \to A)$$

含意の法則

$$A \to B \cong \neg A \vee B$$

重要な同値式(2)

$\top$と $\bot$に関する以下のような同値式も重要.

⊥規則/⊤規則

$$A \wedge \neg A \cong \bot \quad A \vee \neg A \cong \top$$

$$\neg \top \cong \bot \quad \neg \bot \cong \top$$

$$A \wedge \bot \cong \bot \quad A \wedge \top \cong A$$

$$A \vee \bot \cong A \quad A \vee \top \cong \top$$

$$A \to \bot \cong \neg A \quad \top \to A \cong A$$

論理的同値性の性質

定理 4.5. 論理的同値性は命題論理式集合上の合同関係.

合同関係とは(復習)

同値関係(反射的，推移的，対称的な関係)で，さらに以下を性質を満たす:

(1) $A \cong B \Rightarrow \neg A \cong \neg B$,
(2) $A \cong B$ かつ $C \cong D \Rightarrow A \wedge C \cong B \wedge D$,
(3) $A \cong B$ かつ $C \cong D \Rightarrow A \vee C \cong B \vee D$,
(4) $A \cong B$ かつ $C \cong D \Rightarrow A \to C \cong B \to D$,
(5) $A \cong B$ かつ $C \cong D \Rightarrow A \leftrightarrow C \cong B \leftrightarrow D$

(1)–(5) は，命題論理式のある部分を同値なものに置き替えても，全体が同値のままであることを表わす.

命題論理式の同値変形とは

論理的同値性が合同関係であることから，論理的同値性に同値変形を使うことが出来る．すでにわかっている同値式(本講義では，資料で与えた「重要な同値式」とする)を使って，部分式を変形して得られるものは論理的同値になる．

例．$\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q} \cong \neg(\mathtt{P} \rightarrow \neg\mathtt{Q})$．なぜなら，

$$
\begin{array}{rcll}
\neg(\mathtt{P} \rightarrow \neg\mathtt{Q}) & \cong & \neg(\neg\mathtt{P} \vee \neg\mathtt{Q}) & \textbf{(含意)} \\
& \cong & \neg(\neg(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q})) & \textbf{(ド・モルガン)} \\
& \cong & \mathtt{P} \wedge \mathtt{Q} & \textbf{(二重否定)}
\end{array}
$$

真理値表によるチェックは述語論理では適用が難しいが，同値変形は述語論理でも使える．

演習 **4.6.**　同値変形を用いて以下を示せ.

(1) $\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q} \cong \neg(\neg\mathtt{P} \vee \neg\mathtt{Q})$

(2) $\mathtt{P} \rightarrow \neg\mathtt{R} \cong \mathtt{R} \rightarrow \neg\mathtt{P}$

(3) $\mathtt{Q} \wedge (\mathtt{Q} \rightarrow \mathtt{P}) \cong \mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}$

(1)

$$
\begin{aligned}
\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q} &\cong \neg\neg(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) && \textbf{(二重否定)} \\
&\cong \neg(\neg\mathtt{P} \vee \neg\mathtt{Q}) && \textbf{(ド・モルガン)}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\mathtt{P} \to \neg\mathtt{R} &\cong \neg\mathtt{P} \vee \neg\mathtt{R} && \textbf{(含意)} \\
&\cong \neg\mathtt{R} \vee \neg\mathtt{P} && \textbf{(交換律)} \\
&\cong \mathtt{R} \to \neg\mathtt{P} && \textbf{(含意)}
\end{aligned}
$$

(別解)

$$
\begin{aligned}
\mathtt{P} \to \neg\mathtt{R} &\cong \neg\neg\mathtt{R} \to \neg\mathtt{P} && \textbf{(対偶)} \\
&\cong \mathtt{R} \to \neg\mathtt{P} && \textbf{(二重否定)}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\mathtt{Q} \wedge (\mathtt{Q} \to \mathtt{P}) &\cong \mathtt{Q} \wedge (\neg\mathtt{Q} \vee \mathtt{P}) && \textbf{(含意)} \\
&\cong (\mathtt{Q} \wedge \neg\mathtt{Q}) \vee (\mathtt{Q} \wedge \mathtt{P}) && \textbf{(分配律)} \\
&\cong \bot \vee (\mathtt{Q} \wedge \mathtt{P}) && \textbf{(}\bot\textbf{規則)} \\
&\cong \mathtt{Q} \wedge \mathtt{P} && \textbf{(}\bot\textbf{規則)} \\
&\cong \mathtt{P} \wedge \mathtt{Q} && \textbf{(交換律)}
\end{aligned}
$$

目次

- 論理的同値性と命題論理式の同値変形
- 標準形と標準形の構成

$\land, \lor$の結合律・交換律と括弧の省略

$\land$や$\lor$の結合律より，論理的同値性について考える場合は，$(A_1 \land (A_2 \land A_3)) \land A_4$や$A_1 \land ((A_2 \land A_3) \land A_4)$や$A_1 \land (A_2 \land (A_3 \land A_4)))$等は，区別しないで，$A_1 \land A_2 \land A_3 \land A_4$と書いてよい．本節ではこのような$\land$同士，$\lor$同士の括弧を省略する．

定義 **4.7.** $n \geq 1$とする．

(1) $A_1 \land \cdots \land A_n$を$\bigwedge_{i=1}^{n} A_i$と書く．

(2) $A_1 \lor \cdots \lor A_n$を$\bigvee_{i=1}^{n} A_i$と書く．

特に$n = 1$のとき，$\bigwedge_{i=1}^{n} A_i = \bigvee_{i=1}^{n} A_i = A_1$となることに注意．（$n = 0$のときに，$\bigwedge_{i=1}^{n} A_i = \top$，$\bigvee_{i=1}^{n} A_i = \bot$とおくこともあるが，ここでは$n \geq 1$と約束する．）

論理積標準形と論理和標準形

定義 4.8.

(1) Pもしくは$\neg P$の形の命題論理式をリテラルとよぶ．(ここで，Pは命題変数とする．)

(2) $L_{11}, \ldots, L_{1n_1}, \ldots, L_{m1}, \ldots, L_{mn_m}$($n_1, \ldots, n_m, m \geq 1$) をリテラルとしたとき，$\bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n_i} L_{ij}$を論理積標準形 (**CNF: conjunctive normal form**)とよぶ．

(3) $L_{11}, \ldots, L_{1n_1}, \ldots, L_{m1}, \ldots, L_{mn_m}$($n_1, \ldots, n_m, m \geq 1$) をリテラルとしたとき，$\bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n_i} L_{ij}$を論理和標準形 (**DNF: disjunctive normal form**)とよぶ．

例．$(\neg \mathtt{Q} \vee \mathtt{P}) \wedge (\mathtt{R} \vee \neg \mathtt{Q}) \wedge (\mathtt{P} \vee \mathtt{Q} \vee \mathtt{R})$は**CNF.**

$$(\underbrace{\neg \mathtt{Q}}_{L_{11}} \vee \underbrace{\mathtt{P}}_{L_{12}}) \wedge (\underbrace{\mathtt{R}}_{L_{21}} \vee \underbrace{\neg \mathtt{Q}}_{L_{22}}) \wedge (\underbrace{\mathtt{P}}_{L_{31}} \vee \underbrace{\mathtt{Q}}_{L_{32}} \vee \underbrace{\mathtt{R}}_{L_{33}})$$

演習 4.9. 以下の命題論理式が論理積標準形であるか，論理和標準形であるか答えよ．

(1) $(\mathtt{P} \land \mathtt{Q}) \lor \mathtt{Q} \lor \mathtt{P}$

(2) $(\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}) \land (\mathtt{Q} \lor \mathtt{P} \lor \mathtt{Q})$

(3) $\neg(\mathtt{P} \land \mathtt{Q}) \lor \neg(\mathtt{Q} \land \mathtt{P})$

(4) $(\neg\neg\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q}) \lor \neg\mathtt{P}$

(5) $(\mathtt{Q} \lor \mathtt{P}) \land \bot$

(6) $((\mathtt{Q} \lor \mathtt{P}) \land \mathtt{Q}) \lor \mathtt{P}$

(7) $\mathtt{P} \lor \mathtt{Q} \lor \neg\mathtt{R}$

(8) $\mathtt{P} \land \mathtt{Q} \land \neg\mathtt{R}$

演習 4.9.　以下の命題論理式が論理積標準形であるか，論理和標準形であるか答えよ．

(1) $(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \vee \mathtt{Q} \vee \mathtt{P}$　　論理和標準形

(2) $(\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}) \wedge (\mathtt{Q} \vee \mathtt{P} \vee \mathtt{Q})$　　論理積標準形

(3) $\neg(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \vee \neg(\mathtt{Q} \wedge \mathtt{P})$　　どちらでもない

(4) $(\neg\neg\mathtt{P} \wedge \neg\mathtt{Q}) \vee \neg\mathtt{P}$　　どちらでもない

(5) $(\mathtt{Q} \vee \mathtt{P}) \wedge \bot$　　どちらでもない

(6) $((\mathtt{Q} \vee \mathtt{P}) \wedge \mathtt{Q}) \vee \mathtt{P}$　　どちらでもない

(7) $\mathtt{P} \vee \mathtt{Q} \vee \neg\mathtt{R}$　　論理積標準形かつ論理和標準形

(8) $\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q} \wedge \neg\mathtt{R}$　　論理積標準形かつ論理和標準形

(7) は，論理積標準形としてみるときは，$\underbrace{\mathtt{P}}_{L_{11}} \vee \underbrace{\mathtt{Q}}_{L_{12}} \vee \underbrace{\neg\mathtt{R}}_{L_{13}}$ として考え ($m = 1$ となる)，論理和標準形としてみるときは，$\underbrace{\mathtt{P}}_{L_{11}} \vee \underbrace{\mathtt{Q}}_{L_{21}} \vee \underbrace{\neg\mathtt{R}}_{L_{31}}$ として考え ($m = 3, n_1 = n_2 = n_3 = 1$ となる) と考える．

標準形への同値変形(標準化)

同値変形に基づく標準形への変換を紹介する.

定理 4.10. 任意の命題論理式Aに対して，Aと論理的同値な論理積標準形が存在する．また，Aと論理的同値な論理和標準形が存在する.

例.

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg\neg P \land Q \to \bot & \\
\cong & \neg\neg P \land Q \to P \land \neg P & (\bot \text{規則}) \\
\cong & \neg(\neg\neg P \land Q) \lor (P \land \neg P) & (\text{含意}) \\
\cong & \neg\neg\neg P \lor \neg Q \lor (P \land \neg P) & (\text{ド・モルガン}) \\
\cong & \neg P \lor \neg Q \lor (P \land \neg P) & (\text{二重否定}) \quad \cdots \ \textbf{DNF} \\
\cong & (\neg P \lor \neg Q \lor P) \land (\neg P \lor \neg Q \lor \neg P) & (\text{分配律}) \quad \cdots \ \textbf{CNF}
\end{array}
$$

(証明)Aと論理的同値な論理積標準形・論理和標準形を以下のようにして構成する.

(Step 1) 適当な命題変数Pを選び，$\bot \cong P \wedge \neg P$，$\top \cong P \vee \neg P$を用いて，$\bot, \top$を消す.

(Step 2) $A \leftrightarrow B \cong (A \to B) \wedge (B \to A)$を用いて$\leftrightarrow$を消す.

(Step 3) $A \to B \cong \neg A \vee B$を用いて$\to$を消す.

(Step 4) $\neg(A \wedge B) \cong \neg A \vee \neg B$，$\neg(A \vee B) \cong \neg A \wedge \neg B$を用いて，$\neg$が，$\wedge$や$\vee$の外側には出現しないようにする.

(Step 5) $\neg\neg A \cong A$を用いて，命題変数の外には$\neg$が**1**つ以下しか出現しないようにする.

[論理積標準形の場合]

(Step 6) $(A \wedge B) \vee C \cong (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ および$C \vee (A \wedge B) \cong (C \vee A) \wedge (C \vee B)$ を用いて，$\vee$の内側に$\wedge$が出現しないよ

うにする．

[論理和標準形の場合]

(Step 6) $(A \vee B) \wedge C \cong (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ および $C \wedge (A \vee B) \cong (C \wedge A) \vee (C \wedge B)$ を用いて，$\wedge$ の内側に $\vee$ が出現しないようにする． $\square$

注意: 論理式の形が適切な論理的同値式ならば論理積 **(**論理和**)** 標準形なので，一般に命題論理式 A の論理積 **(**論理和**)** 標準形は **1** つとは限らない．また，上の計算の通りにやらないで他の同値変形を用いて変形してもよい．

例えば，`P∧Q` は論理積 **(**論理和**)** 標準形だが，`Q∧P` も `P∧Q` の論理積 **(**論理和**)** 標準形.

命題論理式の標準形

定義 4.11. 命題論理式 A と論理的同値な論理積標準形を命題論理式 A の論理積標準形とよぶ．命題論理式 A と論理的同値な論理和標準形を命題論理式 A の論理和標準形とよぶ．

演習 4.12. 次の命題論理式の論理積標準形と論理和標準形を求めよ．

(1) $\neg\neg \mathtt{P} \to \mathtt{Q}$

(2) $(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{R} \to \mathtt{S}$

(1)

$$\begin{aligned} & \neg\neg P \to Q \\ \cong\ & \neg\neg\neg P \lor Q && \textbf{(含意)} \\ \cong\ & \neg P \lor Q && \textbf{(二重否定)} \cdots \text{論理和標準形，論理積標準形} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & (P \to Q) \to (R \to S) \\ \cong\ & (P \to Q) \to (\neg R \lor S) && \textbf{(含意)} \\ \cong\ & (\neg P \lor Q) \to (\neg R \lor S) && \textbf{(含意)} \\ \cong\ & \neg(\neg P \lor Q) \lor (\neg R \lor S) && \textbf{(含意)} \\ \cong\ & (\neg\neg P \land \neg Q) \lor (\neg R \lor S) && \textbf{(ド・モルガン)} \\ \cong\ & (P \land \neg Q) \lor \neg R \lor S && \textbf{(二重否定)} \cdots \text{論理和標準形} \\ \cong\ & (P \lor \neg R \lor S) \land (\neg Q \lor \neg R \lor S) && \textbf{(分配律)} \cdots \text{論理積標準形} \end{aligned}$$

真理値表からの標準形の構成

すでに与えられた命題論理式を標準形に変換する方法を紹介した．ここでは，標準形を得る別の方法として，標準形をその命題論理式の真理値表から構成する方法を紹介する．

論理和標準形の構成法

$\neg(\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \land \mathtt{R})$を例にとって説明する.

(1) まず，真理値表を作る.

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{R}$	$\cdots$	$\neg(\mathtt{P} \to (\mathtt{Q} \land \mathtt{R}))$
T	T	T	$\cdots$	F
T	T	F	$\cdots$	T
T	F	T	$\cdots$	T
T	F	F	$\cdots$	F
F	T	T	$\cdots$	T
F	T	F	$\cdots$	F
F	F	T	$\cdots$	F
F	F	F	$\cdots$	F

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{R}$	$\cdots$	$\neg(\mathtt{P} \to (\mathtt{Q} \wedge \mathtt{R}))$
T	T	T	$\cdots$	F
T	T	F	$\cdots$	T
T	F	T	$\cdots$	T
T	F	F	$\cdots$	F
F	T	T	$\cdots$	T
F	T	F	$\cdots$	F
F	F	T	$\cdots$	F
F	F	F	$\cdots$	F

(2) このとき，$\neg(\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \wedge \mathtt{R})$ が真となるのは **3** 通り．それぞれの場合について，真ならその命題変数，偽ならその命題変数の否定をとったリテラルの論理積を考える．

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{R}$	$\cdots$	$\neg(\mathtt{P} \to (\mathtt{Q} \land \mathtt{R}))$
T	T	T	$\cdots$	F
T	T	F	$\cdots$	T
T	F	T	$\cdots$	T
T	F	F	$\cdots$	F
F	T	T	$\cdots$	T
F	T	F	$\cdots$	F
F	F	T	$\cdots$	F
F	F	F	$\cdots$	F

(2) このとき，$\neg(\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \land \mathtt{R})$ が真となるのは **3** 通り．それぞれの場合について，真ならその命題変数，偽ならその命題変数の否定をとったリテラルの論理積を考える．

$$\mathtt{P} \land \mathtt{Q} \land \neg\mathtt{R}$$

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{R}$	$\cdots$	$\neg(\mathtt{P} \to (\mathtt{Q} \land \mathtt{R}))$
T	T	T	$\cdots$	F
T	T	F	$\cdots$	T
T	F	T	$\cdots$	T
T	F	F	$\cdots$	F
F	T	T	$\cdots$	T
F	T	F	$\cdots$	F
F	F	T	$\cdots$	F
F	F	F	$\cdots$	F

(3) 得られた論理積の論理和をとる．

$$(\mathtt{P} \land \mathtt{Q} \land \neg\mathtt{R}) \lor (\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q} \land \mathtt{R}) \lor (\neg\mathtt{P} \land \mathtt{Q} \land \mathtt{R})$$

この命題論理式は $\bigvee_i \bigwedge_j L_{ij}$ の形になっており，また，同じ真理値表をもつので，元の命題論理式と論理的同値．従って論理和標準形．

演習 4.13.　次の命題論理式の論理和標準形を真理値表から求めよ．

(1) $\mathtt{P} \lor \mathtt{Q} \to \mathtt{P} \land \mathtt{Q}$

(2) $\neg(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \lor \mathtt{P}$

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \land \mathtt{Q}$	$(\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}) \to (\mathtt{P} \land \mathtt{Q})$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	F	T

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \to \mathtt{Q}$	$\neg(\mathtt{P} \to \mathtt{Q})$	$(\neg(\mathtt{P} \to \mathtt{Q})) \lor \mathtt{P}$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	F	F

(解答)

(1)

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}$	$(\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}) \to (\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q})$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	F	T

赤字の行に着目すると，論理和標準形$(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \vee (\neg\mathtt{P} \wedge \neg\mathtt{Q})$が得られる.

(2) 紹介した手続きに従うと，論理和標準形$(\mathtt{P}\wedge\mathtt{Q})\vee(\mathtt{P}\wedge\neg\mathtt{Q})$が得られる **(**が，真理値表から，$\mathtt{P} \cong (\neg(\mathtt{P} \to \mathtt{Q})) \vee \mathtt{P}$が確認できるから，もっと簡単に，論理和標準形として$\mathtt{P}$をとってもよい．**)**

論理積標準形の構成法

$(\mathtt{P} \rightarrow \mathtt{Q}) \rightarrow \mathtt{Q} \wedge \neg\mathtt{P}$を例にして説明する．

(1) まず，真理値表を構成する．真理値表は

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\cdots$	$(\mathtt{P} \rightarrow \mathtt{Q}) \rightarrow (\mathtt{Q} \wedge (\neg\mathtt{P}))$
T	T	$\cdots$	F
T	F	$\cdots$	T
F	T	$\cdots$	T
F	F	$\cdots$	F

となる．

(2) 論理和標準形のときは，与式が真となる行に着目した．論理積標準形の場合は与式が偽となる行に着目する．与式が偽となるのは，$\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}$が真の場合(**1**行目)，または，$\neg\mathtt{P} \wedge \neg\mathtt{Q}$が真の場合(**4**行目)である．

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\cdots$	$(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to (\mathtt{Q} \wedge (\neg\mathtt{P}))$
T	T	$\cdots$	F
T	F	$\cdots$	T
F	T	$\cdots$	T
F	F	$\cdots$	F

(3) 従って，与式が真となるのは，これらのどちらでもない場合，つまり，

$$\neg(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \wedge \neg(\neg\mathtt{P} \wedge \neg\mathtt{Q})$$

となる場合である．これをド・モルガンの法則と二重否定の法則で同値変形すると，次の論理積標準形が得られる．

$$(\neg\mathtt{P} \vee \neg\mathtt{Q}) \wedge (\mathtt{P} \vee \mathtt{Q})$$

演習 4.14. 次の命題論理式の論理積標準形を真理値表から求めよ.

(1) $\mathtt{P} \vee \mathtt{Q} \to \mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}$

(2) $\neg((\neg\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{P})$

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}$	$(\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}) \to (\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q})$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	F	T

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\neg\mathtt{P}$	$\neg\mathtt{P} \to \mathtt{Q}$	$((\neg\mathtt{P}) \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{P}$	$\neg(((\neg\mathtt{P}) \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{P})$
T	T	F	T	T	F
T	F	F	T	T	F
F	T	T	T	F	T
F	F	T	F	T	F

(解答)

(1)

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}$	$(\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}) \to (\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q})$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	F	T

赤字の行に着目すると，($\neg((\mathtt{P} \wedge \neg\mathtt{Q}) \vee (\neg\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}))$ から) 論理積標準形 $(\neg\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}) \wedge (\mathtt{P} \vee \neg\mathtt{Q})$ が得られる.

(2) 紹介した手続きに従うと，論理積標準形 $(\neg\mathtt{P} \vee \neg\mathtt{Q}) \wedge (\neg\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}) \wedge (\mathtt{P} \vee \mathtt{Q})$ が得られる (が，この場合は，Tとなる行が1つしかないので，論理和標準形の構成法で，論理積標準形かつ論理和標準形である $\neg\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}$ が得られる).

まとめ

- 命題論理式の同値変形
  - 論理的同値性
  - 重要な同値式
- 論理積標準形 **(CNF)**，論理和標準形 **(DNF)**
  - 同値変形による標準形への変換
  - 真理値表にもとづく標準形の構成法

補足資料

以下は，特に興味のある人へ，関連する発展的な話題の紹介．講義では取り上げません．

目次(補足資料)

- 命題論理式の表現力と命題結合子の完全性
- CNFへの充足可能性保存変換
- SATソルバを用いた問題解決

命題論理式の表現力

n引数ブール関数に対応する命題変数$\{\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\}$上の命題論理式$A$は，真理値表に基づく論理和**(**積**)**標準形構成法で構成できる.

(1) 2引数ブール関数をfとすると，対応する真理値表は以下のようになっているはず.

P_1	P_2	$\cdots$	A
T	T	$\cdots$	$f(\mathrm{T},\mathrm{T})$
T	F	$\cdots$	$f(\mathrm{T},\mathrm{F})$
F	T	$\cdots$	$f(\mathrm{F},\mathrm{T})$
F	F	$\cdots$	$f(\mathrm{F},\mathrm{F})$

真理値表からの論理和**(**積**)**標準形の構成には，$\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$の真理値と，命題論理式全体の真理値の対応で充分.

(2) 構成された論理和(積)標準形Aは，同じ真理値表を持つ．従って，

P_1	P_2	$\cdots$	A
T	T	$\cdots$	$f(\mathrm{T},\mathrm{T})$
T	F	$\cdots$	$f(\mathrm{T},\mathrm{F})$
F	T	$\cdots$	$f(\mathrm{F},\mathrm{T})$
F	F	$\cdots$	$f(\mathrm{F},\mathrm{F})$

つまり，任意の付値vについて，$f(v(\mathrm{P}_1),\ldots,v(\mathrm{P}_n)) = [\![A]\!]_v$．

以上の議論により，

定理 4.15. fを任意のn引数ブール関数とする．このとき，$f(v(\mathrm{P}_1),\ldots,v(\mathrm{P}_n)) = [\![A]\!]_v$ が任意の付値vについて成立するような命題論理式Aが存在する．

命題結合子の完全性

標準形は，$\wedge, \vee, \neg$しか用いていない．従って，以下の定理が成立する．

定理 4.16. 任意の命題論理式Aに対して，$\vee, \wedge, \neg$のみを命題結合子に用いた命題論理式Bで，$A \cong B$となるものが存在する．

更に，論理的同値式$A \wedge B \cong \neg((\neg A) \vee (\neg B))$を用いて変形することが出来るので，次の結果も成立する．

定理 4.17. 任意の命題論理式Aに対して，$\vee, \neg$のみを命題結合子に用いた命題論理式Bで，$A \cong B$となるものが存在する．

前ページの定理が成立することを「 $\{\vee, \neg\}$ が完全である」という.

$\{\vee, \neg\}$ の他に，$\{\wedge, \neg\}$ も完全．一方，$\{\neg\}$ や $\{\wedge, \vee\}$ は完全ではない.

演習 **4.18.** $\wedge, \vee$ だけしか用いていないどの命題論理式とも同値とはならない命題論理式を与え，そうなる理由を示せ.

さまざまな命題結合子

今まで出てきた命題結合子$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \bot, \top$とは異なる命題結合子が使われることがある．しかしながら，完全性から少なくても$\neg, \wedge$等があればどのような命題結合子であろうと，それらを等価な命題論理式の省略形と考えてよいことがわかる．

はいたてき
排他的論理和 (exclusive or)，記号: $\oplus, +$など．

A	B	$A \oplus B$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$$A \oplus B \cong (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$$

否定的論理積 (negative and, NAND), 記号: $|$ など.

A	B	$A \mid B$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

$$A \mid B \cong \neg(A \wedge B)$$

否定的論理和 (negative or, NOR), 記号: $\|, \downarrow$ など.

A	B	$A \parallel B$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$$A \parallel B \cong \neg(A \vee B)$$

$\{\oplus, \neg\}$は完全ではない．一方，$\{\,|\,\}$および$\{\,\|\,\}$は完全になる．

演習 4.19. $\{\,|\,\}$および$\{\,\|\,\}$が完全であることを示せ．

演習 4.20. 与えうる2引数結合子cのうちで，$\{c\}$が完全になるのは，$|$および$\|$のみである．このことを示せ．

目次(補足資料)

- 命題論理式の表現力と命題結合子の完全性
- **CNF**への充足可能性保存変換
- **SAT**ソルバを用いた問題解決

標準形への変換の効率性

論理積標準形 **(CNF)** に対する効率的な充足可能性判定システム **(SAT** ソルバ**)** が開発されている．しかしながら，論理的同値性に基づく論理積標準形への変換や真理値表の構成を経由した論理積標準形への変換は，計算時間の観点から，実際的でない．

しかし，充足可能性を保存する **CNF** への効率的な変換 **(**充足可能性保存変換**)** が知られており，**SAT** ソルバで充足可能性を判定する場合は，こちらを用いる．**(**この変換は論理的同値性は保存しない．**)**

論理積標準形への充足可能性保存変換

アイデア： 部分式を新しい命題変数に対応させる．

例． $((\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \vee \mathtt{R})$ の変換

$(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \vee \mathtt{R}$ 　　　 $(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q})$ を命題変数 $\mathtt{N}$ とおく

$\rightsquigarrow (\mathtt{N} \vee \mathtt{R}) \wedge (\mathtt{N} \to (\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q})) \wedge ((\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \to \mathtt{N})$

$\rightsquigarrow (\mathtt{N} \vee \mathtt{R}) \wedge ((\neg \mathtt{N}) \vee (\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q})) \wedge ((\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \to \mathtt{N})$

$\rightsquigarrow (\mathtt{N} \vee \mathtt{R}) \wedge ((\neg \mathtt{N}) \vee \mathtt{P}) \wedge ((\neg \mathtt{N}) \vee \mathtt{Q}) \wedge ((\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \to \mathtt{N})$

$\rightsquigarrow (\mathtt{N} \vee \mathtt{R}) \wedge ((\neg \mathtt{N}) \vee \mathtt{P}) \wedge ((\neg \mathtt{N}) \vee \mathtt{Q}) \wedge (\neg(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \vee \mathtt{N})$

$\rightsquigarrow (\mathtt{N} \vee \mathtt{R}) \wedge ((\neg \mathtt{N}) \vee \mathtt{P}) \wedge ((\neg \mathtt{N}) \vee \mathtt{Q}) \wedge ((\neg \mathtt{P}) \vee (\neg \mathtt{Q}) \vee \mathtt{N})$

　つまり，部分式 $\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}$ を $\mathtt{N}$ と置き換えるとともに，$(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q})$ と $\mathtt{N}$ の同値性を示す式 (あらかじめ，この式自体も **CNF** にしておく) を追加する．

以下で，$\{P \mapsto B\}(A)$ は A 中の命題変数 P をすべて B に置き替える操作を表わす．

定理 4.21. A, B を命題論理式，P を命題論理式 B に出現しない命題変数とする．このとき，$\{P \mapsto B\}(A)$ が充足可能 $\Leftrightarrow$ $A \wedge (P \leftrightarrow B)$ が充足可能．

(証明) **(⇒)** $\{P \mapsto B\}(A)$ が充足可能とする．このとき，$[\![\{P \mapsto B\}(A)]\!]_v = \mathrm{T}$ なる付値 v が存在する．このとき，$v'(P) = [\![B]\!]_v$，$P \neq Q$ なる全ての Q について $v'(Q) = v(Q)$ なる付値 v' を考える．P が B に出現しないことから，$[\![P]\!]_{v'} = v'(P) = [\![B]\!]_v = [\![B]\!]_{v'}$ が成立する．よって，$[\![A]\!]_{v'} = \mathrm{T}$ となる．よって，$A \wedge (P \leftrightarrow B)$ も充足可能．**(⇐)** $[\![A \wedge (P \leftrightarrow B)]\!]_v = \mathrm{T}$ とすると $[\![P]\!]_v = [\![B]\!]_v$ であるから，$[\![\{P \mapsto B\}(A)]\!]_v = [\![A]\!]_v$．よって，$\{P \mapsto B\}(A)$ も充足可能． $\square$

変換テーブル

$$
\begin{array}{lcl}
N \leftrightarrow \bot & \Leftrightarrow & (N \to \bot) \land (\bot \to N) \\
 & \Leftrightarrow & \neg N \\
N \leftrightarrow \top & \Leftrightarrow & (N \to \top) \land (\top \to N) \\
 & \Leftrightarrow & N \\
N \leftrightarrow (\neg P) & \Leftrightarrow & (N \to \neg P) \land (\neg P \to N) \\
 & \Leftrightarrow & (\neg N \lor \neg P) \land (P \lor N) \\
N \leftrightarrow (P \land Q) & \Leftrightarrow & (N \to (P \land Q)) \land ((P \land Q) \to N) \\
 & \Leftrightarrow & ((\neg N) \lor (P \land Q)) \land (\neg (P \land Q) \lor N) \\
 & \Leftrightarrow & (((\neg N) \lor P) \land ((\neg N) \lor Q)) \land ((\neg P) \lor (\neg Q) \lor N) \\
N \leftrightarrow (P \lor Q) & \Leftrightarrow & (N \to (P \lor Q)) \land ((P \lor Q) \to N) \\
 & \Leftrightarrow & ((\neg N) \lor (P \lor Q)) \land (\neg (P \lor Q) \lor N) \\
 & \Leftrightarrow & ((\neg N) \lor P \lor Q) \land (((\neg P) \land (\neg Q)) \lor N) \\
 & \Leftrightarrow & ((\neg N) \lor P \lor Q) \land ((\neg P) \lor N) \land ((\neg Q) \lor N) \\
N \leftrightarrow (P \to Q) & \Leftrightarrow & \cdots \\
N \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) & \Leftrightarrow & \cdots
\end{array}
$$

例. $(\mathrm{P}_1 \wedge \mathrm{P}_2) \vee (\neg(\mathrm{P}_3 \vee \mathrm{P}_4))$ の変換

$$\underline{\underline{\big(\mathrm{P}_1 \wedge \mathrm{P}_2\big)}_6 \vee \underline{\big(\neg\underline{\big(\mathrm{P}_3 \vee \mathrm{P}_4\big)}_8\big)}_7}_5$$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow\quad & \mathrm{P}_5 \wedge \big(\mathrm{P}_5 \leftrightarrow (\mathrm{P}_6 \vee \mathrm{P}_7)\big)\\
& \quad \wedge \big(\mathrm{P}_6 \leftrightarrow (\mathrm{P}_1 \wedge \mathrm{P}_2)\big)\\
& \quad \wedge \big(\mathrm{P}_7 \leftrightarrow (\neg\mathrm{P}_8)\big)\\
& \quad \wedge \big(\mathrm{P}_8 \leftrightarrow (\mathrm{P}_3 \vee \mathrm{P}_4)\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rightsquigarrow\quad & \mathrm{P}_5 \wedge \big((\neg\mathrm{P}_5) \vee \mathrm{P}_6 \vee \mathrm{P}_7\big) \wedge \big((\neg\mathrm{P}_6) \vee \mathrm{P}_5\big) \wedge \big((\neg\mathrm{P}_7) \vee \mathrm{P}_5\big)\\
& \quad \wedge \big(\mathrm{P}_6 \vee (\neg\mathrm{P}_1) \vee (\neg\mathrm{P}_2)\big) \wedge \big((\neg\mathrm{P}_6) \vee \mathrm{P}_1\big) \wedge \big((\neg\mathrm{P}_6) \vee \mathrm{P}_2\big)\\
& \quad \wedge \big((\neg\mathrm{P}_7) \vee (\neg\mathrm{P}_8)\big) \wedge \big(\mathrm{P}_7 \vee \mathrm{P}_8\big)\\
& \quad \wedge \big((\neg\mathrm{P}_8) \vee \mathrm{P}_3 \vee \mathrm{P}_4\big) \wedge \big((\neg\mathrm{P}_3) \vee \mathrm{P}_8\big) \wedge \big((\neg\mathrm{P}_4) \vee \mathrm{P}_8\big)
\end{aligned}$$

演習 4.22. 充足可能性保存変換が論理的同値性を保存しないのはなぜか，考えよ．

目次(補足資料)

- 命題論理式の表現力と命題結合子の完全性
- **CNF**への充足可能性保存変換
- **SAT**ソルバを用いた問題解決

SATソルバ

命題論理式が与えられたときに，それが充足可能かどうかを答えよ，という問題を充足可能性 (SAT) 問題という．充足可能性問題は，NP 完全問題．従って，効率的に解くのは困難．

SAT 問題を (高速に) 解くソフトウェアが研究・開発されている．これらはSATソルバとよばれる．(NP 完全問題なので効率的には解けないが，人の問題を扱う論理式の充足可能性は高速に判定できることがよくある．)

ある種の問題は，SAT 問題に帰着させせることで，SATソルバを用いて解くことが出来る．SATソルバを用いた問題解決の例を学習する．

SATソルバの使用例

$(\mathrm{P}_1 \vee \mathrm{P}_3 \vee \neg\mathrm{P}_4) \wedge \mathrm{P}_4 \wedge (\mathrm{P}_2 \vee \neg\mathrm{P}_3)$ の充足可能性を判定してみる.

```
%cat sample                <--- 入力ファイルの表示
p cnf 4 3
1 3 -4 0
4 0
2 -3 0
%./minisat sample out  <--- minisat の実行
....
....
SATISFIABLE
%cat out                   <--- 出力ファイルの表示
SAT
-1 2 3 4 0
```

DPLLアルゴリズム

多くのSATソルバで用いられているアルゴリズム (以下は非常に単純化したバージョン)

fun isSatisfiable 節集合 S =

 while 単位節 $\{L\} \in S$ do **(* unit propagation *)**

  Lを含む節を S から消去

  S 中の，$\overline{L}$を含む節から $\overline{L}$を消去

  if $S = \emptyset$ then True

  else if $\emptyset \in S$ then False

 リテラルLを S から **1** つ選ぶ **(* splitting *)**

 if isSatisfiable $S \cup \{\{L\}\}$ then True

 else if isSatisfiable $S \cup \{\{\overline{L}\}\}$ then True

 else False

(参考) DPLLアルゴリズムやSATソルバについてより詳しく知りたい人には，以下を見るとよい.

- **John Harrison, Handbook of Practical Logic and Automated Reasoning, Cambridge University Press, 2009.**

  定理自動証明の話題を広く網羅した数理論理学の教科書

- **Filip Marić, Formalization and Implementation of Modern SAT Solvers, Journal of Automated Reasoning, Vol. 43, pp. 81–119, 2009.**

  近年のテクニックにもとづくSATソルバの原理についての解説論文.

SATソルバを使った問題解決の例: nクイーン問題

nクイーン問題:

　n× n のマス上を **Queen** は縦，横，斜めに動く．このとき，**Queen** 同士が取り合わないように，n 個の **Queen** が置くことが出来るか?

Q				
			Q	
	Q			
				Q
		Q		

nクイーン問題の符号化 (1)

各マスのそれぞれに命題変数を **1** つ割り当てる.

$$
\begin{array}{cccc}
\mathrm{P}_{11} & \mathrm{P}_{12} & \cdots & \mathrm{P}_{1n} \\
\mathrm{P}_{21} & \mathrm{P}_{22} & \cdots & \mathrm{P}_{2n} \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\mathrm{P}_{n1} & \mathrm{P}_{n2} & \cdots & \mathrm{P}_{nn}
\end{array}
$$

$v(\mathrm{P}_{ij}) = \mathrm{T} \iff$ **Queen** が第 (i,j) マス乗っている
$v(\mathrm{P}_{ij}) = \mathrm{F} \iff$ **Queen** が第 (i,j) マス乗っていない

と解釈して，nクイーン問題を **SAT** 問題に符号化する.

nクイーン問題の符号化 (2)

(A) 各行について，同時に 2 箇所に置かれることはない

$$\bigwedge_{i} \bigwedge_{j_1 \neq j_2} \neg(\mathrm{P}_{ij_1} \wedge \mathrm{P}_{ij_2})$$

(B) 各列について，同時に 2 箇所に置かれることはない

$$\bigwedge_{j} \bigwedge_{i_1 \neq i_2} \neg(\mathrm{P}_{i_1 j} \wedge \mathrm{P}_{i_2 j})$$

(C) 各斜めについて，同時に2箇所に置かれることはない

$$\left(\bigvee_{i'-i=j'-j} \neg(\mathrm{P}_{ij} \wedge \mathrm{P}_{i'j'}) \right) \wedge \left(\bigvee_{i'-i=j-j'} \neg(\mathrm{P}_{ij} \wedge \mathrm{P}_{i'j'}) \right)$$

(D) 各行について，1箇所には置かれている

$$\bigwedge_{i} \bigvee_{j} \mathrm{P}_{ij}$$

n個のクイーンが置ける

$\iff$ 命題論理式$(A) \wedge (B) \wedge (C) \wedge (D)$が充足可能

プログラム例

```
(* 命題変数 *)
val nvars = ref 0
fun fresh () = (nvars := (!nvars) + 1; !nvars)

(* CNFへの充足可能性保存変換 *)
val cnf = ref [] : int list list ref
fun conj xs =
    let val y = fresh ()
    in
        ((cnf p:= (y :: map (fn x => ~x) xs)
                 :: (map (fn x => [~y, x]) xs) @ (!cnf));
         y)
    end
........

(* nクイーン問題の制約 *)
fun pvar col (i,j) =  i * col + j + 1
    (* col * col 以下はそれぞれのマスに対応する命題変数 *)
```

```
fun constraintExist col =
    let fun constraintLine i =
            disj (List.tabulate (col, fn j => pvar col (i,j)))
    in
        conj (List.tabulate (col, fn i => constraintLine i))
    end
........

fun nQueenConstraint col =
    let
        val z = conj [ constraintExist col,
                       constraintTate col,
                       ....
                      ]
    in
         [z] :: !cnf
    end

fun nQueen col =
    (nvars := col * col; cnf := [];
     nQueenConstraint col)
```

テスト例

```
%sml @SMLload=nqueen.x86-bsd 5 > 5.cnf  <--- 作成プログラムでCNFをファイルに出力
%cat 5.cnf
p cnf 690 1733
690 0
690 -31 -187 -343 -439 -504 -600 -689 0
-690 31 0
-690 187 0
-690 343 0
....
%./minisat 5.cnf 5.out                    <--- SATソルバ実行
....
SATISFIABLE
%cat 5.out
SAT
-1 -2 -3 -4 5 -6 -7 8 -9 -10 11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 19 -20 -21
 22 -23 -24 -25 26 27 28 29 30 31 32 -33 34 -35 -36 37 -38 39 -40 41
 42 43 44 45 46 47 48 49 50 -51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63
 -64 65 -66 67 -68 69 -70 -71 ....
```

先頭の方の付値を見ることで解がわかる.

				Q
		Q		
Q				
			Q	
	Q			