2023年度 数理論理学

講義資料(14)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

目次

- 述語論理の自然演繹体系 **(2):** ∃の推論
- 述語論理の自然演繹体系**:** ∀と∃の推論の演習
- 述語論理の自然演繹体系 **(3):** 等号に関する推論

自然演繹体系(2): ∃の推論

(13) ∃の導入

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ [x := t](A)\end{array}}{\exists x\ A}\ \exists\mathrm{I}$$

ここで，t は任意の項を表す．

(14) ∃の除去

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \exists x\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}[[x := z](A)]^i\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\ \exists\mathrm{E}^i$$

ただし，z は C，$\exists x\ A$ に自由に出現しない変数で，右側の証明図で，除去される仮定 $[[x := z](A)]$ 以外の，変数 z が自由に出現する仮定は全て除去されているものとする．

∃の導入規則の適用例と 注意

∃の導入規則の適用例.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ 3 \times 3 \approx 9\end{array}}{\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{x} \times \mathrm{x} \approx 9)}\,\exists\mathrm{I} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ 3 \times 3 \approx 9\end{array}}{\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{x} \times 3 \approx 9)}\,\exists\mathrm{I}$$

$\forall\mathrm{E}$の場合(上式の論理式に代入したのが下式)とは逆に，下式に代入をして上式が得られていることに注意.

(上から下へ考えると)述語論理式Aの(共通の)項を変数に置き替えてもよいことになる．このため，同じ上式であっても，$\exists\mathrm{I}$規則の適用によって得られる下式は一般に複数ある.

演習 14.1. 以下の$\exists\mathrm{I}$の適用例が正しいかどうか述べよ．

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ P(0,0)\end{array}}{\exists y\, P(0,y)}\,\exists\mathrm{I}}{\exists x \exists y\, P(x,y)}\,\exists\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ P(x,y)\end{array}}{\exists y\, P(x,y)}\,\exists\mathrm{I}}{\exists x \exists y\, P(x,y)}\,\exists\mathrm{I} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ P(z,z)\end{array}}{\exists x\, P(x,x)}\,\exists\mathrm{I}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ P(x,y)\end{array}}{\exists z\, P(z,z)}\,\exists\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ P(z,z)\end{array}}{\exists y\, P(z,y)}\,\exists\mathrm{I}}{\exists x \exists y\, P(x,y)}\,\exists\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ P(y,y)\end{array}}{\exists z\, P(y,z)}\,\exists\mathrm{I}}{\exists x \exists y\, P(x,y)}\,\exists\mathrm{I}$$

(解答)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{P(0,0)}}{\exists y\, P(0,y)}\,\exists I}{\exists x \exists y\, P(x,y)}\,\exists I$$

正しい

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{P(x,y)}}{\exists y\, P(x,y)}\,\exists I}{\exists x \exists y\, P(x,y)}\,\exists I$$

正しい

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{P(z,z)}}{\exists x\, P(x,x)}\,\exists I$$

正しい

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{P(x,y)}}{\exists z\, P(z,z)}\,\exists I$$

正しくない

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{P(z,z)}}{\exists y\, P(z,y)}\,\exists I}{\exists x \exists y\, P(x,y)}\,\exists I$$

正しい

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{P(y,y)}}{\exists z\, P(y,z)}\,\exists I}{\exists x \exists y\, P(x,y)}\,\exists I$$

正しい

∃の除去規則の適用例と 注意

∃の除去規則の直観的な説明

$\exists x\, A(x) = A(0) \vee A(1) \vee \cdots$と考えると

$$\dfrac{\begin{array}{c} \\ \vdots \\ \exists x\, A(x)\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A(0)]^i \\ \vdots \\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A(1)]^i \\ \vdots \\ C\end{array} \qquad \cdots}{C}$$

は$\vee$の除去規則に似ている．

また，このとき，Cは$0, 1, \ldots$によらない論理式になっていることに注意する．

しかし，全ての$0, 1, \ldots$について証明するわけにはいかないので，全く新しい変数zで代表させせると，

$$\dfrac{\begin{array}{c} \\ \vdots \\ \exists x\, A(x) \end{array} \qquad \begin{array}{c} [A(z)]^i \\ \vdots \\ C \end{array}}{C}$$

推論規則の条件「変数zは，$\exists x\, A(x)$やC，および，右側の証明図内の，(直後に除去される)$[A(z)]$以外の除去されていない仮定のなかで，自由変数として表われていてはいけない」は，変数zが($0, 1, \ldots$を代表して用いられている)全く新しい変数ということを保証する条件になっている．

証明図の例.

$$\dfrac{[\exists \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x})]^2 \qquad \dfrac{[\mathrm{P}(\mathrm{z})]^1}{\exists \mathrm{y}\,\mathrm{P}(\mathrm{y})}\,\exists\mathrm{I}}{\dfrac{\exists \mathrm{y}\,\mathrm{P}(\mathrm{y})}{\exists \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,\mathrm{P}(\mathrm{y})}\,{\to}\mathrm{I}^2}\,\exists\mathrm{E}^1$$

$$\dfrac{[\exists \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{x})]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\mathrm{P}(\mathrm{y},\mathrm{y})]^1}{\exists \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{y},\mathrm{z})}\,\exists\mathrm{I}}{\exists \mathrm{y}\,\exists \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{y},\mathrm{z})}\,\exists\mathrm{I}}{\dfrac{\exists \mathrm{y}\,\exists \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{y},\mathrm{z})}{\exists \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{y}\,\exists \mathrm{z}\,\mathrm{P}(\mathrm{y},\mathrm{z})}\,{\to}\mathrm{I}^2}\,\exists\mathrm{E}^1$$

上の証明図の場合，$[\mathrm{P}(\mathrm{z})]^1$ のところは $[\mathrm{P}(\mathrm{y})]^1$ などでもよい.
下の証明図の場合，$[\mathrm{P}(\mathrm{y},\mathrm{y})]^1$ のところは，$[\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{x})]^1$ などでもよいが，その下の論理式も合わせて変更が必要.

∃の除去規則の変数条件

演習 14.2.　以下の証明図の間違いを指摘せよ．

$$
\dfrac{\dfrac{[\exists x\,(\mathrm{P}(x) \to \mathtt{Q}(x))]^4 \qquad \dfrac{[\exists x\,\mathrm{P}(x)]^3 \qquad \dfrac{\dfrac{[\mathrm{P}(z) \to \mathtt{Q}(z)]^2 \qquad [\mathrm{P}(z)]^1}{\mathtt{Q}(z)}\,{\to}\mathrm{E}}{\exists x\,\mathtt{Q}(x)}\,\exists\mathrm{I}}{\exists x\,\mathtt{Q}(x)}\,\exists\mathrm{E}^1}{\dfrac{\exists x\,\mathtt{Q}(x)}{\exists x\,\mathrm{P}(x) \to \exists x\,\mathtt{Q}(x)}\,{\to}\mathrm{I}^3}\,\exists\mathrm{E}^2}{\exists x\,(\mathrm{P}(x) \to \mathtt{Q}(x)) \to \exists x\,\mathrm{P}(x) \to \exists x\,\mathtt{Q}(x)}\,{\to}\mathrm{I}^4
$$

解答：**1** 番上の $\exists\mathrm{E}^1$ の推論がおかしい．

1 番上の $\exists\mathrm{E}^1$ を適用したときを考えると，

$$\dfrac{[\exists \mathrm{x}\, \mathtt{P}(\mathrm{x})] \qquad \dfrac{\dfrac{[\mathtt{P}(\mathrm{z}) \to \mathtt{Q}(\mathrm{z})] \qquad [\mathtt{P}(\mathrm{z})]^1}{\mathtt{Q}(\mathrm{z})} \to\mathrm{E}}{\exists \mathrm{x}\, \mathtt{Q}(\mathrm{x})} \exists\mathrm{I}}{\exists \mathrm{x}\, \mathtt{Q}(\mathrm{x})} \exists\mathrm{E}^1$$

変数 z が除去されいない仮定 $[\mathtt{P}(\mathrm{z}) \to \mathtt{Q}(\mathrm{z})]$ に現われるのでおかしい．このように，変数条件はその推論規則を適用する時点で考えることに注意．

演習 14.3. 以下の証明図の1番下の推論規則の適用について，正しくない理由を次の形で述べよ．

「 述語論理式... に変数... が自由に出現するため」

$$
\dfrac{[\exists y\, \mathtt{P}(y)] \qquad \dfrac{[\mathtt{P}(\mathtt{z})]^1 \qquad [\mathtt{Q}(\mathtt{x})]}{\mathtt{P}(\mathtt{z}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{x})}\land\mathrm{I}}{\mathtt{P}(\mathtt{z}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{x})}\exists\mathrm{E}^1
$$

解答：述語論理式 $\mathtt{P}(\mathtt{z}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{x})$ に変数 $\mathtt{z}$ が自由出現するため．

　$\exists\mathrm{E}$ の推論では，仮定についてだけでなく，結論として導かれる論理式の部分についても，変数条件があることを忘れずに．

演習 **14.4.** $\exists \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{y}) \to \exists \mathrm{x}\, (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \lor \mathtt{Q}(\mathrm{x}))$ の省略されている括弧を補え．また，その証明図を書け．

$$
\dfrac{[\exists y\, \mathtt{P}(y)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\mathtt{P}(x)]^1}{\mathtt{P}(x) \vee \mathtt{Q}(x)}\,\vee\mathrm{I}}{\exists x\, (\mathtt{P}(x) \vee \mathtt{Q}(x))}\,\exists\mathrm{I}}{\dfrac{\exists x\, (\mathtt{P}(x) \vee \mathtt{Q}(x))}{\exists y\, \mathtt{P}(y) \to \exists x\, (\mathtt{P}(x) \vee \mathtt{Q}(x))}\,{\to}\mathrm{I}^2}\,\exists\mathrm{E}^1
$$

演習 **14.5.** 以下は同じ結論を持つ証明図だが間違っている．間違っている理由を述べよ．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists y\, \mathtt{P}(y)]^2 \qquad \dfrac{[\mathtt{P}(x)]^1}{\mathtt{P}(x) \vee \mathtt{Q}(x)}\,\vee\mathrm{I}}{\mathtt{P}(x) \vee \mathtt{Q}(x)}\,\exists\mathrm{E}^1}{\exists x\, (\mathtt{P}(x) \vee \mathtt{Q}(x))}\,\exists\mathrm{I}}{\exists y\, \mathtt{P}(y) \to \exists x\, (\mathtt{P}(x) \vee \mathtt{Q}(x))}\,{\to}\mathrm{I}^2
$$

解答：$\exists\mathrm{E}^1$ の推論で，述語論理式 $\mathtt{P}(\mathtt{x}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{x})$ に変数 $\mathtt{x}$ が自由に出現しているため，変数条件が満たされていない．

その前の正しい証明図では，$\exists\mathrm{E}^1$ の推論の適用時点ですでに $\exists\mathrm{I}$ の適用されているため，$\mathtt{P}(\mathtt{x}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{x})$ の部分が $\exists\mathtt{x}\,(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{x}))$ となっている．この場合，$\mathrm{FV}(\exists\mathtt{x}\,(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{x}))) = \emptyset$ であるから，変数条件が満たされている．

演習 **14.6.**　以下の述語論理式の証明図を示せ．

(1) $\exists\mathtt{y}\,(\mathtt{Q} \to \mathtt{P}(\mathtt{y})) \to (\mathtt{Q} \to \exists\mathtt{x}\,\mathtt{P}(\mathtt{x}))$

(2) $\exists\mathtt{x}\,(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{x})) \to \exists\mathtt{x}\,(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{x}))$

(1)

$$\dfrac{[\exists y\,(\mathtt{Q} \to \mathtt{P}(y))]^3 \qquad \dfrac{\dfrac{[\mathtt{Q} \to \mathtt{P}(z)]^1 \quad [\mathtt{Q}]^2}{\mathtt{P}(z)}\to\mathrm{E}}{\exists x\,\mathtt{P}(x)}\exists\mathrm{I}}{\dfrac{\dfrac{\exists x\,\mathtt{P}(x)}{\mathtt{Q} \to \exists x\,\mathtt{P}(x)}\to\mathrm{I}^2}{\exists y\,(\mathtt{Q} \to \mathtt{P}(y)) \to (\mathtt{Q} \to \exists x\,\mathtt{P}(x))}\to\mathrm{I}^3}\exists\mathrm{E}^1$$

(2 箇所ある z のところは x や他の変数でも 可．)

(2)

$$\dfrac{[\exists x\,(\mathtt{P}(x) \wedge \mathtt{Q}(x))]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathtt{P}(z) \wedge \mathtt{Q}(z)]^1}{\mathtt{Q}(z)}\wedge\mathrm{E}}{\mathtt{P}(z) \vee \mathtt{Q}(z)}\vee\mathrm{I}}{\exists x\,(\mathtt{P}(x) \vee \mathtt{Q}(x))}\exists\mathrm{I}}{\dfrac{\exists x\,(\mathtt{P}(x) \vee \mathtt{Q}(x))}{\exists x\,(\mathtt{P}(x) \wedge \mathtt{Q}(x)) \to \exists x\,(\mathtt{P}(x) \vee \mathtt{Q}(x))}\to\mathrm{I}^2}\exists\mathrm{E}^1$$

(5 箇所ある z のところは x や他の変数でも 可．$\wedge\mathrm{E}$ の結論となっている $\mathtt{Q}(z)$ は $\mathtt{P}(z)$ でもよい．)

目次

- 述語論理の自然演繹体系 **(2):** ∃の推論
- 述語論理の自然演繹体系**:** ∀と ∃の推論の演習
- 述語論理の自然演繹体系 **(3):** 等号に関する推論

$\forall$と$\exists$の推論を使った証明図の演習

演習 **14.7.**　以下の述語論理式の証明図を示せ.

(1) $\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$

(2) $\forall x\, (\forall y\, R(x, y) \to \exists y\, R(x, y))$

(3) $\forall x\, \exists y\, (P(x, y) \to P(y, x))$

(4) $\forall x\, (P(x) \to Q(x)) \to \exists x\, P(x) \to \exists x\, Q(x)$

(1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\, P(x)]^1}{P(z)}\,\forall E}{\exists x\, P(x)}\,\exists I}{\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)}\,{\to}I^1$$

(zのところはどのような項を使ってもよい．)

(2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall y\, R(x,y)]^1}{R(x,z)}\,\forall E}{\exists y\, R(x,y)}\,\exists I}{\forall y\, R(x,y) \to \exists y\, R(x,y)}\,{\to}I^1}{\forall x\, (\forall y\, R(x,y) \to \exists y\, R(x,y))}\,\forall I$$

(zのところはどのような項を使ってもよい．)

(3)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathtt{P}(x, x)]^1}{\mathtt{P}(x, x) \to \mathtt{P}(x, x)}\;{\to}\mathrm{I}^1}{\exists y\,(\mathtt{P}(x, y) \to \mathtt{P}(y, x))}\;\exists\mathrm{I}}{\forall x\,\exists y\,(\mathtt{P}(x, y) \to \mathtt{P}(y, x))}\;\forall\mathrm{I}$$

(4)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x\,\mathtt{P}(x)]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\,(\mathtt{P}(x) \to \mathtt{Q}(x))]^3}{\mathtt{P}(z) \to \mathtt{Q}(z)}\;\forall\mathrm{E} \qquad [\mathtt{P}(z)]^1}{\mathtt{Q}(z)}\;{\to}\mathrm{E}}{\exists x\,\mathtt{Q}(x)}\;\exists\mathrm{I}}{\exists x\,\mathtt{Q}(x)}\;\exists\mathrm{E}^1}{\exists x\,\mathtt{P}(x) \to \exists x\,\mathtt{Q}(x)}\;{\to}\mathrm{I}^2}{\forall x\,(\mathtt{P}(x) \to \mathtt{Q}(x)) \to \exists x\,\mathtt{P}(x) \to \exists x\,\mathtt{Q}(x)}\;{\to}\mathrm{I}^3$$

(zのところはxや他の変数でも可．)

目次

- 述語論理の自然演繹体系 **(2):** ∃の推論
- 述語論理の自然演繹体系**:** ∀と ∃の推論の演習
- 述語論理の自然演繹体系 **(3):** 等号に関する推論

自然演繹体系(3): 等号に関する推論

(15) 反射律

$$\frac{}{\forall x\,(x \approx x)}\,\mathrm{REFL}$$

(16) 代入法則

$$\frac{\begin{matrix}\vdots \\ s \approx t\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ [x := s](A)\end{matrix}}{[x := t](A)}\,\mathrm{SUBST}$$

ここで，s, t は任意の項を表わす．

代入法則は，$s \approx t$ が証明されているとき，任意の述語論理式に含まれる s の部分を t に置き替えてよい，という推論になっている．推論規則の形から，t に置き替える s の部分は **1** 箇所でもよいし，複数箇所でもよい．

等号に関する推論規則を用いて証明できる述語論理式の例

対称律

$$\forall \mathtt{x}\, \forall \mathtt{y}\, (\mathtt{x} \approx \mathtt{y} \to \mathtt{y} \approx \mathtt{x})$$

推移律

$$\forall \mathtt{x}\, \forall \mathtt{y}\, \forall \mathtt{z}\, (\mathtt{x} \approx \mathtt{y} \land \mathtt{y} \approx \mathtt{z} \to \mathtt{x} \approx \mathtt{z})$$

関数記号に関する合同性 ($\mathtt{f} \in F_n$とする)

$$\forall \mathtt{x}_1 \cdots \forall \mathtt{x}_n\, \forall \mathtt{y}_1 \cdots \forall \mathtt{y}_n$$
$$(\mathtt{x}_1{\approx}\mathtt{y}_1 \land \cdots \land \mathtt{x}_n{\approx}\mathtt{y}_n \to \mathtt{f}(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n){\approx}\mathtt{f}(\mathtt{y}_1, \ldots, \mathtt{y}_n))$$

述語記号に関する合同性 ($\mathtt{P} \in \mathcal{P}_n$とする)

$$\forall \mathtt{x}_1 \cdots \forall \mathtt{x}_n\, \forall \mathtt{y}_1 \cdots \forall \mathtt{y}_n$$
$$(\mathtt{x}_1{\approx}\mathtt{y}_1 \land \cdots \land \mathtt{x}_n{\approx}\mathtt{y}_n \to \mathtt{P}(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n) \to \mathtt{P}(\mathtt{y}_1, \ldots, \mathtt{y}_n))$$

なお，代入法則の代わりに，これらの推論規則全体を，等号に関する推論規則として採用することもできる．

対称律

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[z \approx y]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{}{\forall x\,(x \approx x)}\,\mathrm{REFL}}{z \approx z}\,\forall\mathrm{E}}{y \approx z}\,\mathrm{SUBST}}{z \approx y \to y \approx z}\,{\to}\mathrm{I}^1}{\forall y\,(z \approx y \to y \approx z)}\,\forall\mathrm{I}}{\forall x\,\forall y\,(x \approx y \to y \approx x)}\,\forall\mathrm{I}
$$

推移律

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x \approx y \land y \approx z]^2}{x \approx y}\,\land\mathrm{E} \qquad \dfrac{[x \approx z]^1}{x \approx z \to x \approx z}\,{\to}\mathrm{I}^1}{y \approx z \to x \approx z}\,\mathrm{SUBST} \qquad \dfrac{[x \approx y \land y \approx z]^2}{y \approx z}\,\land\mathrm{E}}{x \approx z}\,{\to}\mathrm{E}}{x \approx y \land y \approx z \to x \approx z}\,{\to}\mathrm{I}^2}{\forall z\,(x \approx y \land y \approx z \to x \approx z)}\,\forall\mathrm{I}}{\forall y\,\forall z\,(x \approx y \land y \approx z \to x \approx z)}\,\forall\mathrm{I}}{\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x \approx y \land y \approx z \to x \approx z)}\,\forall\mathrm{I}
$$

関数記号に関する合同性

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\mathtt{x}_1 \approx \mathtt{y}_1 \land \cdots \land \mathtt{x}_n \approx \mathtt{y}_n]^1$}
\RightLabel{$\land$E}
\UnaryInfC{$\vdots$}
\RightLabel{$\land$E}
\UnaryInfC{$\mathtt{x}_n \approx \mathtt{y}_n$}
\AxiomC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\mathtt{x}_{n-1} \approx \mathtt{y}_{n-1}$}
\AxiomC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\mathtt{x}_1 \approx \mathtt{y}_1$}
\AxiomC{}
\RightLabel{REFL}
\UnaryInfC{$\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \approx \mathtt{x})$}
\RightLabel{$\forall$E}
\UnaryInfC{$\mathtt{f}(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n) \approx \mathtt{f}(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n)$}
\RightLabel{SUBST}
\BinaryInfC{$\vdots$}
\RightLabel{SUBST}
\BinaryInfC{$\mathtt{f}(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n) \approx \mathtt{f}(\mathtt{y}_1, \ldots, \mathtt{y}_{n-1}, \mathtt{x}_n)$}
\RightLabel{SUBST}
\BinaryInfC{$\mathtt{f}(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n) \approx \mathtt{f}(\mathtt{y}_1, \ldots, \mathtt{y}_n)$}
\RightLabel{$\to$I^1}
\UnaryInfC{$\mathtt{x}_1 \approx \mathtt{y}_1 \land \cdots \land \mathtt{x}_n \approx \mathtt{y}_n \to \mathtt{f}(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n) \approx \mathtt{f}(\mathtt{y}_1, \ldots, \mathtt{y}_n)$}
\RightLabel{$\forall$I}
\UnaryInfC{$\vdots$}
\RightLabel{$\forall$I}
\UnaryInfC{$\forall \mathtt{x}_1 \cdots \forall \mathtt{x}_n \, \forall \mathtt{y}_1 \cdots \forall \mathtt{y}_n \, (\mathtt{x}_1 \approx \mathtt{y}_1 \land \cdots \land \mathtt{x}_n \approx \mathtt{y}_n \to \mathtt{f}(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n) \approx \mathtt{f}(\mathtt{y}_1, \ldots, \mathtt{y}_n))$}
\end{prooftree}
$$

述語記号に関する合同性

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[\mathtt{x}_1 \approx \mathtt{y}_1 \land \cdots \land \mathtt{x}_n \approx \mathtt{y}_n]^2$}
\RightLabel{$\land$E}
\UnaryInfC{$\vdots$}
\RightLabel{$\land$E}
\UnaryInfC{$\mathtt{x}_n \approx \mathtt{y}_n$}
\AxiomC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\mathtt{x}_{n-1} \approx \mathtt{y}_{n-1}$}
\AxiomC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\mathtt{x}_1 \approx \mathtt{y}_1$}
\AxiomC{$[\mathtt{P}(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n)]^1$}
\RightLabel{SUBST}
\BinaryInfC{$\vdots$}
\RightLabel{SUBST}
\BinaryInfC{$\mathtt{P}(\mathtt{y}_1, \ldots, \mathtt{y}_{n-1}, \mathtt{x}_n)$}
\RightLabel{SUBST}
\BinaryInfC{$\mathtt{P}(\mathtt{y}_1, \ldots, \mathtt{y}_n)$}
\RightLabel{$\to$I^1}
\UnaryInfC{$\mathtt{P}(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n) \to \mathtt{P}(\mathtt{y}_1, \ldots, \mathtt{y}_n)$}
\RightLabel{$\to$I^2}
\UnaryInfC{$\mathtt{x}_1 \approx \mathtt{y}_1 \land \cdots \land \mathtt{x}_n \approx \mathtt{y}_n \to \mathtt{P}(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n) \to \mathtt{P}(\mathtt{y}_1, \ldots, \mathtt{y}_n)$}
\RightLabel{$\forall$I}
\UnaryInfC{$\vdots$}
\RightLabel{$\forall$I}
\UnaryInfC{$\forall \mathtt{x}_1 \cdots \forall \mathtt{x}_n \, \forall \mathtt{y}_1 \cdots \forall \mathtt{y}_n \, (\mathtt{x}_1 \approx \mathtt{y}_1 \land \cdots \land \mathtt{x}_n \approx \mathtt{y}_n \to \mathtt{P}(\mathtt{x}_1, \ldots, \mathtt{x}_n) \to \mathtt{P}(\mathtt{y}_1, \ldots, \mathtt{y}_n))$}
\end{prooftree}
$$

まとめ

- 述語論理の自然演繹体系
  - ∃の導入規則と除去規則
  - ∃の導入規則における項の置き換え
  - ∃の除去規則における変数条件
  - 等号に関する規則