2023年度 数理論理学

講義資料(14)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

目次

自然演繹体系(2): ∃の推論

(13) ∃の導入

$$\dfrac{\overset{\vdots}{[x := t](A)}}{\exists x\, A}\,\exists\mathrm{I}$$

ここで，tは任意の項を表す．

(14) ∃の除去

$$\dfrac{\overset{\vdots}{\exists x\, A} \qquad \overset{\overset{[[x := z](A)]^i}{\vdots}}{C}}{C}\,\exists\mathrm{E}^i$$

ただし，z は C，$\exists x\, A$ に自由に出現しない変数で，右側の証明図で，除去される仮定$[[x := z](A)]$以外の，変数zが自由に出現する仮定は全て除去されているものとする．

∃の導入規則の適用例と注意

∃の導入規則の適用例．

$$\dfrac{\overset{\vdots}{3 \times 3 \approx 9}}{\exists x\,(x \times x \approx 9)}\,\exists\mathrm{I} \qquad \dfrac{\overset{\vdots}{3 \times 3 \approx 9}}{\exists x\,(x \times 3 \approx 9)}\,\exists\mathrm{I}$$

$\forall\mathrm{E}$の場合(上式の論理式に代入したのが下式)とは逆に，下式に代入をして上式が得られていることに注意．

(上から下へ考えると)述語論理式Aの(共通の)項を変数に置き替えてもよいことになる．このため，同じ上式であっても，$\exists\mathrm{I}$規則の適用によって得られる下式は一般に複数ある．

演習 **14.1.** 以下の$\exists\mathrm{I}$の適用例が正しいかどうか述べよ．

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{P(0,0)}}{\exists y\, P(0,y)}\,\exists\mathrm{I}}{\exists x \exists y\, P(x,y)}\,\exists\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{P(x,y)}}{\exists y\, P(x,y)}\,\exists\mathrm{I}}{\exists x \exists y\, P(x,y)}\,\exists\mathrm{I} \qquad \dfrac{\overset{\vdots}{P(z,z)}}{\exists x\, P(x,x)}\,\exists\mathrm{I}$$

$$\dfrac{\overset{\vdots}{P(x,y)}}{\exists z\, P(z,z)}\,\exists\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{P(z,z)}}{\exists y\, P(z,y)}\,\exists\mathrm{I}}{\exists x \exists y\, P(x,y)}\,\exists\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{P(y,y)}}{\exists z\, P(y,z)}\,\exists\mathrm{I}}{\exists x \exists y\, P(x,y)}\,\exists\mathrm{I}$$

(解答)

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{P(0,0)}}{\exists y\, P(0,y)}\,\exists\mathrm{I}}{\exists x \exists y\, P(x,y)}\,\exists\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{P(x,y)}}{\exists y\, P(x,y)}\,\exists\mathrm{I}}{\exists x \exists y\, P(x,y)}\,\exists\mathrm{I} \qquad \dfrac{\overset{\vdots}{P(z,z)}}{\exists x\, P(x,x)}\,\exists\mathrm{I}$$

正しい　　正しい　　正しい

$$\dfrac{\overset{\vdots}{P(x,y)}}{\exists z\, P(z,z)}\,\exists\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{P(z,z)}}{\exists y\, P(z,y)}\,\exists\mathrm{I}}{\exists x \exists y\, P(x,y)}\,\exists\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{P(y,y)}}{\exists z\, P(y,z)}\,\exists\mathrm{I}}{\exists x \exists y\, P(x,y)}\,\exists\mathrm{I}$$

正しくない　　正しい　　正しい

∃の除去規則の適用例と注意

∃の除去規則の直観的な説明

$\exists x\, A(x) = A(0) \lor A(1) \lor \cdots$と考えると

$$\dfrac{\overset{\vdots}{\exists x\, A(x)} \qquad \overset{\overset{[A(0)]^i}{\vdots}}{C} \qquad \overset{\overset{[A(1)]^i}{\vdots}}{C} \qquad \cdots}{C}$$

は$\lor$の除去規則に似ている．

また，このとき，Cは$0, 1, \ldots$によらない論理式になっていることに注意する．

しかし，全ての$0, 1, \ldots$について証明するわけにはいかないので，全く新しい変数zで代表させると，

$$\dfrac{\overset{\vdots}{\exists x\, A(x)} \qquad \overset{\overset{[A(z)]^i}{\vdots}}{C}}{C}$$

推論規則の条件「変数zは，$\exists x\, A(x)$やC，および，右側の証明図内の，(直後に除去される)$[A(z)]$以外の除去されていない仮定のなかで，自由変数として表われていてはいけない」は，変数zが($0, 1, \ldots$を代表して用いられている)全く新しい変数ということを保証する条件になっている．

証明図の例.

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\,P(x)]^2 \quad \dfrac{[P(z)]^1}{\exists y\,P(y)}\,\exists I}{\exists y\,P(y)}\,\exists E^1}{\exists x\,P(x) \to \exists y\,P(y)}\,{\to}I^2$$

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\,P(x,x)]^2 \quad \dfrac{\dfrac{[P(y,y)]^1}{\exists z\,P(y,z)}\,\exists I}{\exists y\,\exists z\,P(y,z)}\,\exists I}{\exists y\,\exists z\,P(y,z)}\,\exists E^1}{\exists x\,P(x,x) \to \exists y\,\exists z\,P(y,z)}\,{\to}I^2$$

上の証明図の場合，$[P(z)]^1$のところは$[P(y)]^1$などでもよい．下の証明図の場合，$[P(y,y)]^1$のところは，$[P(x,x)]^1$などでもよいが，その下の論理式も合わせて変更が必要．

∃の除去規則の変数条件

演習 14.2. 以下の証明図の間違いを指摘せよ．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x\,(P(x) \to Q(x))]^4 \quad \dfrac{[\exists x\,P(x)]^3 \quad \dfrac{\dfrac{[P(z) \to Q(z)]^2 \quad [P(z)]^1}{Q(z)}\,{\to}E}{\exists x\,Q(x)}\,\exists I}{\exists x\,Q(x)}\,\exists E^1}{\exists x\,Q(x)}\,\exists E^2}{\exists x\,P(x) \to \exists x\,Q(x)}\,{\to}I^3}{\exists x\,(P(x) \to Q(x)) \to \exists x\,P(x) \to \exists x\,Q(x)}\,{\to}I^4$$

解答: **1**番上の$\exists E^1$の推論がおかしい．

1番上の$\exists E^1$を適用したときを考えると，

$$\dfrac{[\exists x\,P(x)] \quad \dfrac{\dfrac{[P(z) \to Q(z)] \quad [P(z)]^1}{Q(z)}\,{\to}E}{\exists x\,Q(x)}\,\exists I}{\exists x\,Q(x)}\,\exists E^1$$

変数zが除去されいない仮定$[P(z) \to Q(z)]$に現われるのでおかしい．このように，変数条件はその推論規則を適用する時点で考えることに注意．

演習 14.3. 以下の証明図の**1**番下の推論規則の適用について，正しくない理由を次の形で述べよ．

「述語論理式... に変数... が自由に出現するため」

$$\dfrac{[\exists y\,P(y)] \quad \dfrac{[P(z)]^1 \quad [Q(x)]}{P(z) \land Q(x)}\,\land I}{P(z) \land Q(x)}\,\exists E^1$$

解答: 述語論理式$P(z) \land Q(x)$に変数zが自由出現するため．

$\exists E$の推論では，仮定についてだけでなく，結論として導かれる論理式の部分についても，変数条件があることを忘れずに．

演習 14.4. $\exists y\,P(y) \to \exists x\,(P(x) \lor Q(x))$の省略されている括弧を補え．また，その証明図を書け．

$$\dfrac{\dfrac{[\exists y\,P(y)]^2 \quad \dfrac{\dfrac{[P(x)]^1}{P(x) \lor Q(x)}\,\lor I}{\exists x\,(P(x) \lor Q(x))}\,\exists I}{\exists x\,(P(x) \lor Q(x))}\,\exists E^1}{\exists y\,P(y) \to \exists x\,(P(x) \lor Q(x))}\,{\to}I^2$$

演習 14.5. 以下は同じ結論を持つ証明図だが間違っている．間違っている理由を述べよ．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists y\,P(y)]^2 \quad \dfrac{[P(x)]^1}{P(x) \lor Q(x)}\,\lor I}{P(x) \lor Q(x)}\,\exists E^1}{\exists x\,(P(x) \lor Q(x))}\,\exists I}{\exists y\,P(y) \to \exists x\,(P(x) \lor Q(x))}\,{\to}I^2$$

解答: $\exists E^1$の推論で，述語論理式$P(x) \lor Q(x)$に変数xが自由に出現しているため，変数条件が満たされていない．

その前の正しい証明図では，$\exists E^1$の推論の適用時点ですでに$\exists I$の適用されているため，$P(x) \lor Q(x)$の部分が$\exists x\,(P(x) \lor Q(x))$となっている．この場合，$FV(\exists x\,(P(x) \lor Q(x))) = \emptyset$であるから，変数条件が満たされている．

演習 14.6. 以下の述語論理式の証明図を示せ．

(1) $\exists y\,(Q \to P(y)) \to (Q \to \exists x\,P(x))$

(2) $\exists x\,(P(x) \land Q(x)) \to \exists x\,(P(x) \lor Q(x))$

(1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists y\,(Q \to P(y))]^3 \quad \dfrac{\dfrac{[Q \to P(z)]^1 \quad [Q]^2}{P(z)}\,{\to}E}{\exists x\,P(x)}\,\exists I}{\exists x\,P(x)}\,\exists E^1}{Q \to \exists x\,P(x)}\,{\to}I^2}{\exists y\,(Q \to P(y)) \to (Q \to \exists x\,P(x))}\,{\to}I^3$$

(**2**箇所あるzのところはxや他の変数でも可．)

(2)

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\,(P(x) \land Q(x))]^2 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[P(z) \land Q(z)]^1}{Q(z)}\,\land E}{P(z) \lor Q(z)}\,\lor I}{\exists x\,(P(x) \lor Q(x))}\,\exists I}{\exists x\,(P(x) \lor Q(x))}\,\exists E^1}{\exists x\,(P(x) \land Q(x)) \to \exists x\,(P(x) \lor Q(x))}\,{\to}I^2$$

(**5**箇所あるzのところはxや他の変数でも可．$\land E$の結論となっている$Q(z)$は$P(z)$でもよい．)

目次

- 述語論理の自然演繹体系 (2): ∃の推論
- 述語論理の自然演繹体系: ∀と ∃の推論の演習
- 述語論理の自然演繹体系 (3): 等号に関する推論

∀と ∃の推論を使った証明図の演習

演習 **14.7.** 以下の述語論理式の証明図を示せ．

(1) $\forall x\,P(x) \to \exists x\,P(x)$
(2) $\forall x\,(\forall y\,R(x,y) \to \exists y\,R(x,y))$
(3) $\forall x\,\exists y\,(P(x,y) \to P(y,x))$
(4) $\forall x\,(P(x) \to Q(x)) \to \exists x\,P(x) \to \exists x\,Q(x)$

(1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\,P(x)]^1}{P(z)}\,\forall E}{\exists x\,P(x)}\,\exists I}{\forall x\,P(x) \to \exists x\,P(x)}\,{\to}I^1$$

(zのところはどのような項を使ってもよい．)

(2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall y\,R(x,y)]^1}{R(x,z)}\,\forall E}{\exists y\,R(x,y)}\,\exists I}{\forall y\,R(x,y) \to \exists y\,R(x,y)}\,{\to}I^1}{\forall x\,(\forall y\,R(x,y) \to \exists y\,R(x,y))}\,\forall I$$

(zのところはどのような項を使ってもよい．)

(3)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P(x,x)]^1}{P(x,x) \to P(x,x)}\,{\to}I^1}{\exists y\,(P(x,y) \to P(y,x))}\,\exists I}{\forall x\,\exists y\,(P(x,y) \to P(y,x))}\,\forall I$$

(4)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x\,P(x)]^2 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\,(P(x) \to Q(x))]^3}{P(z) \to Q(z)}\,\forall E \quad [P(z)]^1}{Q(z)}\,{\to}E}{\exists x\,Q(x)}\,\exists I}{\exists x\,Q(x)}\,\exists E^1}{\exists x\,P(x) \to \exists x\,Q(x)}\,{\to}I^2}{\forall x\,(P(x) \to Q(x)) \to \exists x\,P(x) \to \exists x\,Q(x)}\,{\to}I^3$$

(zのところはxや他の変数でも可．)

目次

- 述語論理の自然演繹体系 (2): ∃の推論
- 述語論理の自然演繹体系: ∀と ∃の推論の演習
- 述語論理の自然演繹体系 (3): 等号に関する推論

自然演繹体系 (3): 等号に関する推論

(15) 反射律

$$\dfrac{}{\forall x\,(x \approx x)}\,\mathrm{REFL}$$

(16) 代入法則

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ s \approx t\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots \\ [x := s](A)\end{matrix}}{[x := t](A)}\,\mathrm{SUBST}$$

ここで，s, tは任意の項を表わす．

代入法則は，$s \approx t$が証明されているとき，任意の述語論理式に含まれるsの部分をtに置き替えてよい，という推論になっている．推論規則の形から，tに置き替えるsの部分は1箇所でもよいし，複数箇所でもよい．

等号に関する推論規則を用いて証明できる述語論理式の例

対称律

$\forall x\,\forall y\,(x \approx y \to y \approx x)$

推移律

$\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x \approx y \land y \approx z \to x \approx z)$

関数記号に関する合同性 ($f \in F_n$とする)

$\forall x_1 \cdots \forall x_n\,\forall y_1 \cdots \forall y_n$
$(x_1 \approx y_1 \land \cdots \land x_n \approx y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) \approx f(y_1, \ldots, y_n))$

述語記号に関する合同性 ($P \in \mathcal{P}_n$とする)

$\forall x_1 \cdots \forall x_n\,\forall y_1 \cdots \forall y_n$
$(x_1 \approx y_1 \land \cdots \land x_n \approx y_n \to P(x_1, \ldots, x_n) \to P(y_1, \ldots, y_n))$

なお，代入法則の代わりに，これらの推論規則全体を，等号に関する推論規則として採用することもできる．

対称律

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[z \approx y]^1 \quad \dfrac{\dfrac{}{\forall x\,(x \approx x)}\,\mathrm{REFL}}{z \approx z}\,\forall E}{y \approx z}\,\mathrm{SUBST}}{z \approx y \to y \approx z}\,{\to}I^1}{\forall y\,(z \approx y \to y \approx z)}\,\forall I}{\forall x\,\forall y\,(x \approx y \to y \approx x)}\,\forall I$$

推移律

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x \approx y \land y \approx z]^2}{x \approx y}\,\land E \quad \dfrac{[x \approx z]^1}{x \approx z \to x \approx z}\,{\to}I^1}{y \approx z \to x \approx z}\,\mathrm{SUBST} \quad \dfrac{[x \approx y \land y \approx z]^2}{y \approx z}\,\land E}{x \approx z}\,{\to}E}{x \approx y \land y \approx z \to x \approx z}\,{\to}I^2}{\forall z\,(x \approx y \land y \approx z \to x \approx z)}\,\forall I}{\forall y\,\forall z\,(x \approx y \land y \approx z \to x \approx z)}\,\forall I}{\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x \approx y \land y \approx z \to x \approx z)}\,\forall I$$

関数記号に関する合同性

$$
\dfrac{
  \dfrac{\dfrac{[x_1 \approx y_1 \land \cdots \land x_n \approx y_n]^1}{\vdots}\,{\land}\mathrm{E}}{x_n \approx y_n}\,{\land}\mathrm{E}
  \qquad
  \dfrac{
    \begin{matrix}\vdots\\ x_{n-1} \approx y_{n-1}\end{matrix}
    \qquad
    \dfrac{
      \begin{matrix}\vdots\\ x_1 \approx y_1\end{matrix}
      \quad
      \dfrac{\dfrac{}{\forall x\,(x \approx x)}\,\mathrm{REFL}}{f(x_1,\ldots,x_n) \approx f(x_1,\ldots,x_n)}\,\forall\mathrm{E}
    }{\vdots}\,\mathrm{SUBST}
  }{f(x_1,\ldots,x_n) \approx f(y_1,\ldots,y_{n-1},x_n)}\,\mathrm{SUBST}
}{
  \dfrac{
    \dfrac{f(x_1,\ldots,x_n) \approx f(y_1,\ldots,y_n)}{x_1 \approx y_1 \land \cdots \land x_n \approx y_n \to f(x_1,\ldots,x_n) \approx f(y_1,\ldots,y_n)}\,{\to}\mathrm{I}^1
  }{\vdots}\,\forall\mathrm{I}
}\,\mathrm{SUBST}
$$

$$
\dfrac{\vdots}{\forall x_1 \cdots \forall x_n\,\forall y_1 \cdots \forall y_n\,(x_1{\approx}y_1{\land}\cdots{\land}x_n{\approx}y_n \to f(x_1,\ldots,x_n){\approx}f(y_1,\ldots,y_n))}\,\forall\mathrm{I}
$$

述語記号に関する合同性

$$
\dfrac{
  \dfrac{\dfrac{[x_1 \approx y_1 \land \cdots \land x_n \approx y_n]^2}{\vdots}\,{\land}\mathrm{E}}{x_n \approx y_n}\,{\land}\mathrm{E}
  \qquad
  \dfrac{
    \begin{matrix}\vdots\\ x_{n-1} \approx y_{n-1}\end{matrix}
    \qquad
    \dfrac{
      \begin{matrix}\vdots\\ x_1 \approx y_1\end{matrix}
      \quad
      [P(x_1,\ldots,x_n)]^1
    }{\vdots}\,\mathrm{SUBST}
  }{P(y_1,\ldots,y_{n-1},x_n)}\,\mathrm{SUBST}
}{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{P(y_1,\ldots,y_n)}{P(x_1,\ldots,x_n) \to P(y_1,\ldots,y_n)}\,{\to}\mathrm{I}^1
    }{x_1 \approx y_1 \land \cdots \land x_n \approx y_n \to P(x_1,\ldots,x_n) \to P(y_1,\ldots,y_n)}\,{\to}\mathrm{I}^2
  }{\vdots}\,\forall\mathrm{I}
}\,\mathrm{SUBST}
$$

$$
\dfrac{\vdots}{\forall x_1 \cdots \forall x_n\,\forall y_1 \cdots \forall y_n\,(x_1{\approx}y_1{\land}\cdots{\land}x_n{\approx}y_n \to P(x_1,\ldots,x_n){\to}P(y_1,\ldots,y_n))}\,\forall\mathrm{I}
$$

まとめ

- 述語論理の自然演繹体系
  - ∃の導入規則と除去規則
  - ∃の導入規則における項の置き換え
  - ∃の除去規則における変数条件
  - 等号に関する規則