# 2023年度 数理論理学

# 講義資料(13)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

# 目次

- 述語論理の自然演繹体系 **(1):** $\forall$の推論

# 自然演繹体系 (1): ∀の推論

述語論理の自然演繹体系は，命題論理の自然演繹体系に $\forall, \exists$ のそれぞれについての導入規則，除去規則，等号に関する推論規則を追加することによって得られる．

**(11)** ∀の導入

$$\cfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A\end{array}}{\forall x\, A}\,\forall\mathrm{I}$$

ただし，$x$ が自由に出現する仮定は，全て除去されているとする．

**(12)** ∀の除去

$$\cfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \forall x\, A\end{array}}{[x := t](A)}\,\forall\mathrm{E}$$

ここで，$t$ は任意の項を表す．

# ∀の除去規則の適用例と注意

∀の除去規則の適用例.

**(1)**

$$\dfrac{\vdots \atop \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x} \approx \mathrm{x})}{\mathsf{0} \approx \mathsf{0}}\,\forall\mathrm{E}$$

**(2)**

$$\dfrac{\vdots \atop \forall \mathrm{x}\,(\mathsf{0} \approx \mathrm{x} \times \mathsf{0})}{\mathsf{0} \approx \mathrm{s}(\mathsf{0}) \times \mathsf{0}}\,\forall\mathrm{E}$$

　∀の除去規則は，$\forall x\, A$が成立していれば，$A$の$x$のところに何を代入しても成立する，という推論．これは，$\forall x\, A$の意味を考えると，自然な推論.

## ∀の除去規則の適用する際の注意.

　推論規則の結論部 $[x := t](A)$ では，代入を実行している．このため，代入に関する注意事項を思い出すこと．

**演習 13.1.**　以下の∀Eの適用例が正しいかどうか述べよ．

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x \forall y\, P(x,y)}}{\dfrac{\forall y\, P(0,y)}{P(0,0)}\,\forall E}\,\forall E \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x \forall y\, P(x,y)}}{\dfrac{\forall y\, P(x,y)}{P(x,y)}\,\forall E}\,\forall E \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x \forall y\, P(x,y)}}{\dfrac{\forall y\, P(z,y)}{P(z,z)}\,\forall E}\,\forall E$$

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x \forall y\, P(x,y)}}{\dfrac{\forall y\, P(x,y)}{P(x,x)}\,\forall E}\,\forall E \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x \forall y\, P(x,y)}}{\dfrac{\forall y\, P(y,y)}{P(y,y)}\,\forall E}\,\forall E \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x \forall y\, P(x,y)}}{\dfrac{\forall z\, P(y,z)}{P(y,y)}\,\forall E}\,\forall E$$

**(解答)**

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{\forall x \forall y\, P(x, y)}}{\forall y\, P(0, y)}\,\forall E}{P(0, 0)}\,\forall E$$

正しい

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{\forall x \forall y\, P(x, y)}}{\forall y\, P(x, y)}\,\forall E}{P(x, y)}\,\forall E$$

正しい

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{\forall x \forall y\, P(x, y)}}{\forall y\, P(z, y)}\,\forall E}{P(z, z)}\,\forall E$$

正しい

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{\forall x \forall y\, P(x, y)}}{\forall y\, P(x, y)}\,\forall E}{P(x, x)}\,\forall E$$

正しい

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{\forall x \forall y\, P(x, y)}}{\forall y\, P(y, y)}\,\forall E}{P(y, y)}\,\forall E$$

正しくない

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{\forall x \forall y\, P(x, y)}}{\forall z\, P(y, z)}\,\forall E}{P(y, y)}\,\forall E$$

正しい

# ∀の導入規則の適用例と注意

∀の導入規則の適用例.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \mathtt{x} \times 1 \approx \mathtt{x}\end{array}}{\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \times 1 \approx \mathtt{x})}\ \forall\mathrm{I}$$

ただし，このような推論が成立するのは，$\mathtt{x}$に関する仮定が何もされていない時のみ.

推論規則の条件
「$x$が自由に出現する仮定は，全て除去されているとする」

はこれを保証する.

∀の導入規則の正しくない適用例．

$$\dfrac{\begin{matrix}[\mathtt{x} \approx 0] \\ \vdots \\ \mathtt{x} \times 1 \approx 0\end{matrix}}{\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \times 1 \approx 0)}\ \forall\mathrm{I}$$

この場合，除去されていない仮定 $[\mathtt{x} \approx 0]$ のなかに，変数 $\mathtt{x}$ の自由な出現があるのでダメ．もしこのようなことを許したとすると，∀E規則と合わせて，

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\mathtt{x} \approx 0] \\ \vdots \\ \mathtt{x} \times 1 \approx 0\end{matrix}}{\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \times 1 \approx 0)}\ \forall\mathrm{I}}{1 \times 1 \approx 0}\ \forall\mathrm{E}$$

のような証明が出来てしまうため，明らかにおかしい．

演習 **13.2.**　以下の$\forall$Iの適用例が正しいかどうか述べよ.

$$\dfrac{\dfrac{[\forall \mathtt{y}\,(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{y}))]}{\mathtt{P}(\mathtt{x}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{z})}\,\forall\mathrm{E}}{\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{z}))}\,\forall\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall \mathtt{y}\,(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{y}))]}{\mathtt{P}(\mathtt{x}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{z})}\,\forall\mathrm{E}}{\forall \mathtt{z}\,(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{z}))}\,\forall\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall \mathtt{y}\,(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{y}))]}{\mathtt{P}(\mathtt{x}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{z})}\,\forall\mathrm{E}}{\forall \mathtt{y}\,(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{z}))}\,\forall\mathrm{I}$$

$$\dfrac{\dfrac{[\forall \mathtt{y}\,(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{y}))]}{\mathtt{P}(\mathtt{x}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{x})}\,\forall\mathrm{E}}{\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{x}))}\,\forall\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall \mathtt{y}\,(\mathtt{P}(\mathtt{y}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{y}))]}{\mathtt{P}(\mathtt{x}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{x})}\,\forall\mathrm{E}}{\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{x}))}\,\forall\mathrm{I} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall \mathtt{y}\,(\mathtt{P}(\mathtt{y}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{y}))]}{\mathtt{P}(\mathtt{y}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{y})}\,\forall\mathrm{E}}{\forall \mathtt{y}\,(\mathtt{P}(\mathtt{y}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{y}))}\,\forall\mathrm{I}$$

## (解答)

$$\cfrac{\cfrac{[\forall y\,(P(x) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(z)}\,\forall E}{\forall x\,(P(x) \wedge Q(z))}\,\forall I$$

正しくない

$$\cfrac{\cfrac{[\forall y\,(P(x) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(z)}\,\forall E}{\forall z\,(P(x) \wedge Q(z))}\,\forall I$$

正しい

$$\cfrac{\cfrac{[\forall y\,(P(x) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(z)}\,\forall E}{\forall y\,(P(x) \wedge Q(z))}\,\forall I$$

正しい

$$\cfrac{\cfrac{[\forall y\,(P(x) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(x)}\,\forall E}{\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))}\,\forall I$$

正しくない

$$\cfrac{\cfrac{[\forall y\,(P(y) \wedge Q(y))]}{P(x) \wedge Q(x)}\,\forall E}{\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))}\,\forall I$$

正しい

$$\cfrac{\cfrac{[\forall y\,(P(y) \wedge Q(y))]}{P(y) \wedge Q(y)}\,\forall E}{\forall y\,(P(y) \wedge Q(y))}\,\forall I$$

正しい

## $\forall$I, $\forall$Eを用いた証明図の例.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x \forall y\, P(x,y)]^1}{\forall y\, P(x,y)}\,\forall E}{P(x,y)}\,\forall E}{\forall x\, P(x,y)}\,\forall I}{\forall y \forall x\, P(x,y)}\,\forall I}{\forall x \forall y\, P(x,y) \to \forall y \forall x\, P(x,y)} \to I^1
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\, P(x)]^1}{P(y)}\,\forall E}{\forall y\, P(y)}\,\forall I}{\forall x\, P(x) \to \forall y\, P(y)} \to I^1
$$

**演習 13.3.** 以下の証明図は正しいか? 正しくないなら，どこが誤っている推論ステップが指摘せよ．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{x})]^1}{\mathrm{P}(\mathrm{y},\mathrm{z})}\,\forall\mathrm{E}}{\forall \mathrm{z}\, \mathrm{P}(\mathrm{y},\mathrm{z})}\,\forall\mathrm{I}}{\forall \mathrm{y}\forall \mathrm{z}\, \mathrm{P}(\mathrm{y},\mathrm{z})}\,\forall\mathrm{I}}{\forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{x}) \to \forall \mathrm{y}\forall \mathrm{z}\, \mathrm{P}(\mathrm{y},\mathrm{z})}\,{\to}\mathrm{I}^1$$

**演習 13.4.** $\forall \mathrm{y}\, \mathrm{P}(\mathrm{y}) \wedge \forall \mathrm{z}\, \mathtt{Q}(\mathrm{z}) \to \forall \mathrm{x}\, (\mathrm{P}(\mathrm{x}) \wedge \mathtt{Q}(\mathrm{x}))$ の省略されている括弧を補え．また，その証明図を書け．

$$(((\forall \mathtt{y}\, \mathtt{P}(\mathtt{y})) \land (\forall \mathtt{z}\, \mathtt{Q}(\mathtt{z}))) \to (\forall \mathtt{x}\, (\mathtt{P}(\mathtt{x}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{x}))))$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall \mathtt{y}\, \mathtt{P}(\mathtt{y}) \land \forall \mathtt{z}\, \mathtt{Q}(\mathtt{z})]^1}{\forall \mathtt{y}\, \mathtt{P}(\mathtt{y})}\,\land\mathrm{E}}{\mathtt{P}(\mathtt{x})}\,\forall\mathrm{E} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall \mathtt{y}\, \mathtt{P}(\mathtt{y}) \land \forall \mathtt{z}\, \mathtt{Q}(\mathtt{z})]^1}{\forall \mathtt{z}\, \mathtt{Q}(\mathtt{z})}\,\land\mathrm{E}}{\mathtt{Q}(\mathtt{x})}\,\forall\mathrm{E}}{\mathtt{P}(\mathtt{x}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{x})}\,\land\mathrm{I}}{\forall \mathtt{x}\, (\mathtt{P}(\mathtt{x}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{x}))}\,\forall\mathrm{I}}{\forall \mathtt{y}\, \mathtt{P}(\mathtt{y}) \land \forall \mathtt{z}\, \mathtt{Q}(\mathtt{z}) \to \forall \mathtt{x}\, (\mathtt{P}(\mathtt{x}) \land \mathtt{Q}(\mathtt{x}))}\,\to\mathrm{I}^1$$

**演習 13.5.** $\forall \mathtt{x}\, \forall \mathtt{y}\, \mathtt{P}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) \to \forall \mathtt{z}\, \mathtt{P}(\mathtt{z}, \mathtt{z})$ の証明図を書け.

$$\forall x\, \forall y\, P(x, y) \to \forall z\, P(z, z)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\, \forall y\, P(x, y)]^1}{\forall y\, P(z, y)}\,\forall E}{P(z, z)}\,\forall E}{\forall z\, P(z, z)}\,\forall I}{\forall x\, \forall y\, P(x, y) \to \forall z\, P(z, z)}\,{\to}I^1$$

# まとめ

- 述語論理の自然演繹体系 **(1)**
  - $\forall$の導入規則と除去規則
  - $\forall$の導入規則における変数条件