2023年度 数理論理学

講義資料(12)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

目次

ここでは，命題論理にはなかった代入という概念について学習する．代入はいろいろな形式体系で用いられるが，変数束縛のある体系では繊細な取り扱いが必要となる．代入は，次回の資料で始まる述語論理の自然演繹体系においても，とても重要な役割を果たしている．

代入

定義 12.1. 変数集合 V から項集合 $\mathrm{T}(F, V)$ への関数を代入とよぶ．

代入の例1.

$$\sigma(\mathrm{x}_i) = \begin{cases} +(\mathrm{x}_{i-1}, \mathrm{x}_{i+1}) & (i\text{が奇数のとき}) \\ -(\mathrm{x}_i) & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

代入の例2.

$$\sigma(\mathrm{x}_i) = \begin{cases} -(0) & (i = 0\text{のとき}) \\ -(+(0, \mathrm{x}_0)) & (i = 1\text{のとき}) \\ \mathrm{x}_i & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

代入の準同型拡張

定義 12.2. σを代入とする．σを項tに適用した結果$\sigma(t)$を次のように定義する．

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma(t) & t \in V\text{のとき} \\ f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n)) & t = f(t_1, \ldots, t_n)\text{のとき} \end{cases}$$

2番目の場合分けは f が定数の場合も含むことに注意．

演習 12.3.

$$\sigma(\mathrm{x}_i) = \begin{cases} +(\mathrm{x}_{i-1}, \mathrm{x}_{i+1}) & (i\text{が奇数のとき}) \\ \mathrm{x}_i & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

とするとき，$\sigma(+(-(\mathrm{x}_3), -(0)))$ を計算せよ．

$$\sigma(\mathrm{x}_i) = \begin{cases} +(\mathrm{x}_{i-1}, \mathrm{x}_{i+1}) & (i\text{が奇数のとき}) \\ \mathrm{x}_i & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

のとき，

$$\begin{aligned} \sigma(+(-(\mathrm{x}_3), -(0))) &= +(\sigma(-(\mathrm{x}_3)), \sigma(-(0))) \\ &= +(-(\sigma(\mathrm{x}_3)), \sigma(-(0))) \\ &= +(-(\sigma(\mathrm{x}_3)), -(\sigma(0))) \\ &= +(-(+(\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_4)), -(\sigma(0))) \\ &= +(-(+(\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_4)), -(0)) \end{aligned}$$

σは，項の変数の部分だけをσで変更し，残りはそのままにするような関数になっている．

代入の記法

代入が有限個の変数しか変更しないとき，つまり，

$$\sigma(\mathrm{x}_i) = \begin{cases} t_1 & (i = k_1\text{のとき}) \\ t_2 & (i = k_2\text{のとき}) \\ \vdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_m & (i = k_m\text{のとき}) \\ \mathrm{x}_i & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

と書けるとき，この代入σを

$$[\mathrm{x}_{k_1} := t_1, \mathrm{x}_{k_2} := t_2, \ldots, \mathrm{x}_{k_m} := t_m]$$

と書く．

演習 12.4. $\sigma = [\mathrm{x}_1 := +(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2), \mathrm{x}_2 := -(\mathrm{x}_1)]$とする．このとき，以下を求めよ．

(1) $\sigma(-(-(0)))$
(2) $\sigma(+(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_1))$
(3) $\sigma(+(\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3))$

(1)

$$\begin{aligned}\sigma(-(-(0))) &= -(\sigma(-(0))) \\ &= -(-(\sigma(0))) \\ &= -(-(0))\end{aligned}$$

$\sigma(0)=0$となることに注意.

(2)

$$\begin{aligned}\sigma(+(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_1)) &= +(\sigma(\mathrm{x}_1),\sigma(\mathrm{x}_1)) \\ &= +(+(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2),+(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2))\end{aligned}$$

x_1が2箇所あっても定義通りに計算すればよい.

(3)

$$\begin{aligned}\sigma(+(\mathrm{x}_2,\mathrm{x}_3)) &= +(\sigma(\mathrm{x}_2),\sigma(\mathrm{x}_3)) \\ &= +(-(\mathrm{x}_1),\mathrm{x}_3)\end{aligned}$$

x_3:=は代入$[\ldots]$の中に現わないので, $\sigma(\mathrm{x}_3)=\mathrm{x}_3$となることに注意

代入の制限

定義 12.5. σを代入, xを変数とするとき, $\sigma|_x$を以下により与えられる代入と定義する:

$$\sigma|_x(y) = \begin{cases} x & (x = y\text{のとき}) \\ \sigma(y) & (x \neq y\text{のとき}) \end{cases}$$

つまり, $\sigma|_x$は, x以外について, σと同じように代入する.

例. $\sigma = [\mathrm{x} := \mathrm{a}, \mathrm{y} := \mathrm{b}, \mathrm{z} := \mathrm{c}]$とする. このとき,

$\sigma|_{\mathrm{x}}(\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})) = \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{b},\mathrm{c})$
$\sigma|_{\mathrm{y}}(\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})) = \mathrm{f}(\mathrm{a},\mathrm{y},\mathrm{c})$
$\sigma|_{\mathrm{z}}(\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})) = \mathrm{f}(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{z})$

目次

述語論理式に対する代入のアイデア

代入を述語論理式に適用する. 述語論理式に対する代入の適用は, 変数の自由な出現だけを項に置きかえる.

例. $\sigma = [\mathrm{x} := \mathrm{s}(\mathrm{y})]$とする. このとき,

$$\sigma(\mathrm{x} < 0 \land \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x} \in \mathrm{u})) = \mathrm{s}(\mathrm{y}) < 0 \land \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x} \in \mathrm{u})$$

このように, 束縛出現は代入により置き代わらない.

しかし, このアイデアだけでは問題があり, もうひと工夫する (次ページ).

素朴な代入の問題点

代入される項に, 量化子のスコープにある変数が存在すると, 束縛関係を破壊してしまう.

例(誤り). $\sigma = [\mathrm{x} := \mathrm{y}+1]$とする. このとき,

$$\sigma(\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{y} \in \mathrm{u} \to \mathrm{x} < \mathrm{y})) = \forall \mathrm{y}\,(\mathrm{y} \in \mathrm{u} \to \mathrm{y}+1 < \mathrm{y})$$

としてしまうと, $\forall \mathrm{y}$に対する束縛関係が変わってしまう!

$$\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{y} \in \mathrm{u} \to \mathrm{x} < \mathrm{y}) \qquad \forall \mathrm{y}\,(\mathrm{y} \in \mathrm{u} \to \mathrm{y}+1 < \mathrm{y})$$

そこで, 束縛関係を保存して代入を行うために次に説明する便宜法を用いる.

束縛変数の名前替えの便宜法

約束 12.6. [束縛変数の名前替えの便宜法] 述語論理式の代入においては, 代入する項にある自由変数と代入される項にある束縛変数が代入によって重なる場合は, 代入の前に束縛変数の名前替えを行って重なりをなくした後, 代入を行う.

<u>正しい代入</u> $\sigma = [\mathrm{x} := \mathrm{y}+1]$とする.

$$\begin{aligned}\sigma(\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{y} \in \mathrm{u} \to \mathrm{x} < \mathrm{y})) &= \sigma(\forall \mathrm{z}\,(\mathrm{z} \in \mathrm{u} \to \mathrm{x} < \mathrm{z})) \\ &= \forall \mathrm{z}\,(\mathrm{z} \in \mathrm{u} \to \mathrm{y}+1 < \mathrm{z})\end{aligned}$$

この約束に従えば, 束縛関係は代入によって変わらない.

述語論理式に対する代入

束縛変数の名前替えの便宜法のもとで, 代入の定義を行う.

定義 12.7. 述語論理式Aへ代入σを行って得られる述語論理式$\sigma(A)$を次のように定義する. $\sigma(A) =$

$$\begin{cases} P(\sigma(t_1),\ldots,\sigma(t_n)) & (A = P(t_1,\ldots,t_n)\text{のとき}) \\ \sigma(s) \approx \sigma(t) & (A = s \approx t\text{のとき}) \\ A & (A \in \{\bot,\top\}\text{のとき}) \\ \neg\sigma(B) & (A = \neg B\text{のとき}) \\ \sigma(B)\circ\sigma(C) & (A = B \circ C,\ \circ \in \{\land,\lor,\to,\leftrightarrow\}\text{のとき}) \\ Qx\sigma|_x(B) & (A = QxB,\ Q \in \{\forall,\exists\}\text{のとき}) \end{cases}$$

代入の制限$|_x$を用いることにより, 変数の束縛出現は代入によって置き換わらないことに注意.

例. $\sigma = [\mathrm{x} := \mathrm{s}(\mathrm{y})]$とする.

$$\begin{aligned} & \sigma(\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \approx \mathrm{y} \times \mathrm{x}) \land \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x} \approx \mathrm{y}+0)) \\ = {} & \sigma(\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \approx \mathrm{y} \times \mathrm{x})) \land \sigma(\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x} \approx \mathrm{y}+0)) \\ = {} & \sigma(\forall \mathrm{w}\,(\mathrm{x} \approx \mathrm{w} \times \mathrm{x})) \land \sigma(\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x} \approx \mathrm{y}+0)) \quad \text{(束縛変数の名前替え)} \\ = {} & \forall \mathrm{w}\,(\sigma|_{\mathrm{w}}(\mathrm{x} \approx \mathrm{w} \times \mathrm{x})) \land \sigma(\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x} \approx \mathrm{y}+0)) \\ = {} & \forall \mathrm{w}\,(\mathrm{s}(\mathrm{y}) \approx \mathrm{w} \times \mathrm{s}(\mathrm{y})) \land \sigma(\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x} \approx \mathrm{y}+0)) \\ = {} & \forall \mathrm{w}\,(\mathrm{s}(\mathrm{y}) \approx \mathrm{w} \times \mathrm{s}(\mathrm{y})) \land \forall \mathrm{x}\,(\sigma|_{\mathrm{x}}(\mathrm{x} \approx \mathrm{y}+0)) \\ = {} & \forall \mathrm{w}\,(\mathrm{s}(\mathrm{y}) \approx \mathrm{w} \times \mathrm{s}(\mathrm{y})) \land \forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x} \approx \mathrm{y}+0) \end{aligned}$$

定義12.7自体には記述されていないが, 束縛変数の名前替えを用いることに注意.

演習 12.8. 以下で与えられる σ に対して $\sigma(\forall \mathrm{z}\,(\mathrm{x} \times \mathrm{z} \approx \mathrm{y} \times \mathrm{z}))$ を計算せよ．

(1) $\sigma = [\mathrm{x} := 0]$，**(2)** $\sigma = [\mathrm{u} := 0]$，
(3) $\sigma = [\mathrm{z} := 0]$，**(4)** $\sigma = [\mathrm{x} := \mathrm{z}]$.

解.
(1) $\forall \mathrm{z}\,(0 \times \mathrm{z} \approx \mathrm{y} \times \mathrm{z})$
(2) $\forall \mathrm{z}\,(\mathrm{x} \times \mathrm{z} \approx \mathrm{y} \times \mathrm{z})$
(3) $\forall \mathrm{z}\,(\mathrm{x} \times \mathrm{z} \approx \mathrm{y} \times \mathrm{z})$
(4) $\forall \mathrm{w}\,(\mathrm{z} \times \mathrm{w} \approx \mathrm{y} \times \mathrm{w})$

(4) は,「束縛変数の名前替えの便宜法」により，代入を行う前に，束縛変数の名前替えを行う必要がある．名前替えに用いる変数は，z, y 以外なら，w でなくてもよい．

まとめ

- 代入
- 項に対する代入
  - 代入の準同型拡張
  - 代入の記法
  - 代入の制限
- 述語論理式における代入
  - 代入は自由変数のみを置き換える
  - 束縛変数の名前替えの便宜法