2023年度 数理論理学

講義資料(11)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

目次

- 述語論理式の真偽 **(2)**
- 変数の自由出現と束縛出現
- 変数束縛と束縛変数の名前替え
- 冠頭標準形
- 述語論理式の省略記法

はじめに

前回，述語論理式の基本的な同値式をいくつか紹介した．今回は，より難易度の高い，真偽の議論や同値式を見ていく．

また，そのために必要になる，自由出現や変数束縛といった述語論理式における構文的な概念についても紹介する．

自由出現や変数束縛といった概念は，同値式においてだけでなく，次回以降で説明する述語論理の自然演繹法においても用いられる重要な概念である．

異なる量化記号の出現順序

全称記号同士，存在記号同士の順番は入れ替えできることを前回の資料で説明した.

一方，全称記号と存在記号が混ざっている場合には，その順番によって意味が異なるため，順番を入れ替えることはできない.

例. 対象となる世界が自然数全体として，$\forall \mathrm{x}$と$\exists \mathrm{y}$の出現順序が入れ替わった

$$\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{x} < \mathrm{y}) \quad \text{および} \quad \exists \mathrm{y}\, \forall \mathrm{x}\, (\mathrm{x} < \mathrm{y})$$

の**2**つの述語論理式の意味について考えてみよう.

(1) $\forall x\, \exists y\, (x < y)$ は真.

なぜなら，どのような数を x がとった場合でも，
$y = x + 1$ととればよい.

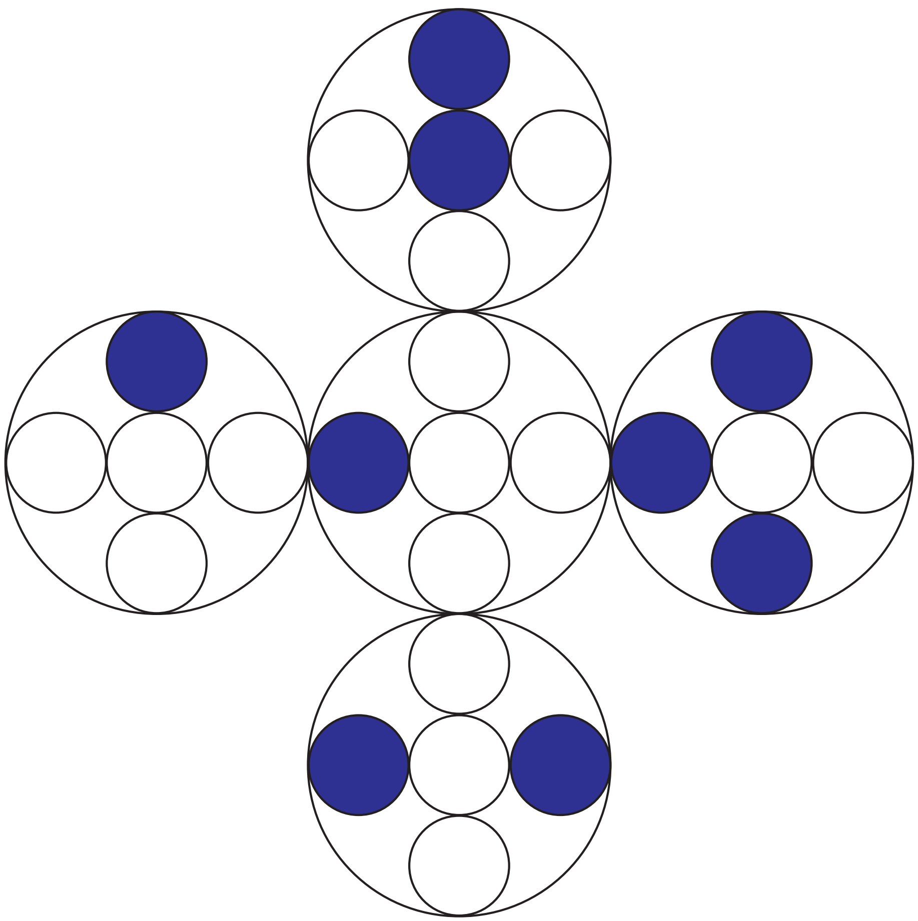
どんなxについても，$\exists y\, (x < y)$ が成立している，ということなので，yの選択は，xの選択の後．つまり，yの選択はxに依存して変えてよい.

(2) $\exists y\, \forall x\, (x < y)$ は偽.

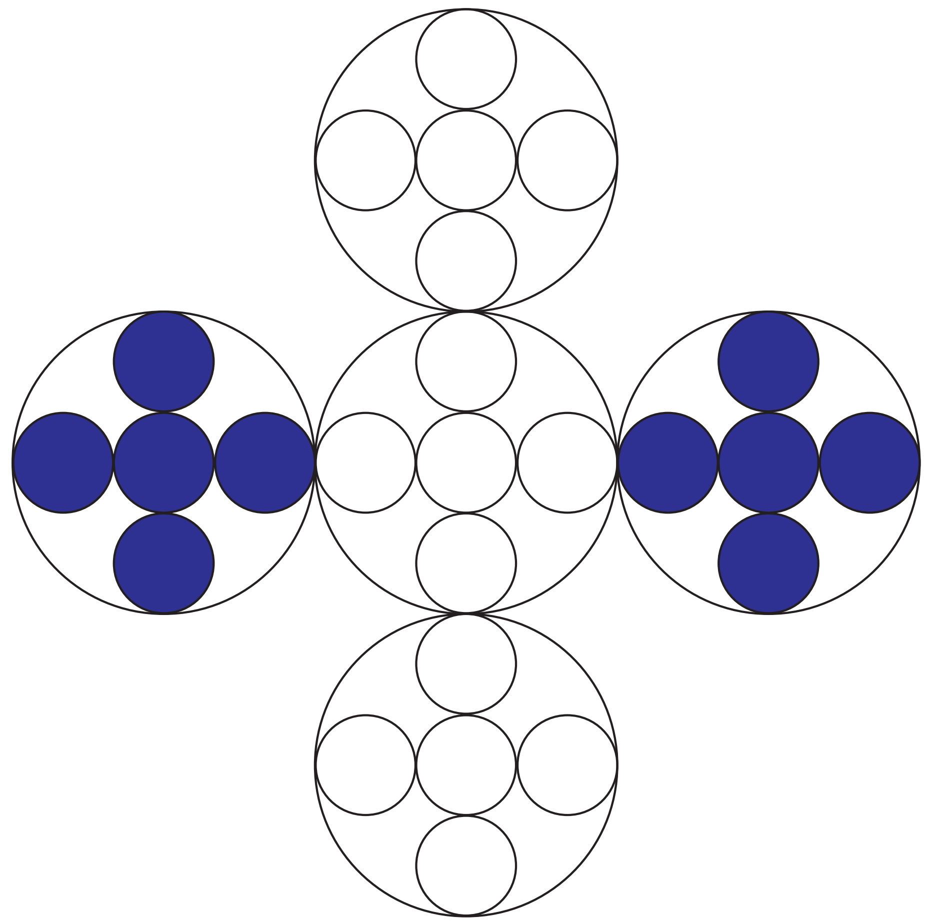
なぜなら，“どのような数xについても $x < y$となる”
ようなyは存在しないから.

このとき，yは$\forall x\, (x < y)$を満たすyということだから，yの選択は，xより先．つまり，xを考えるときにはyの選択はすでに決まっている.

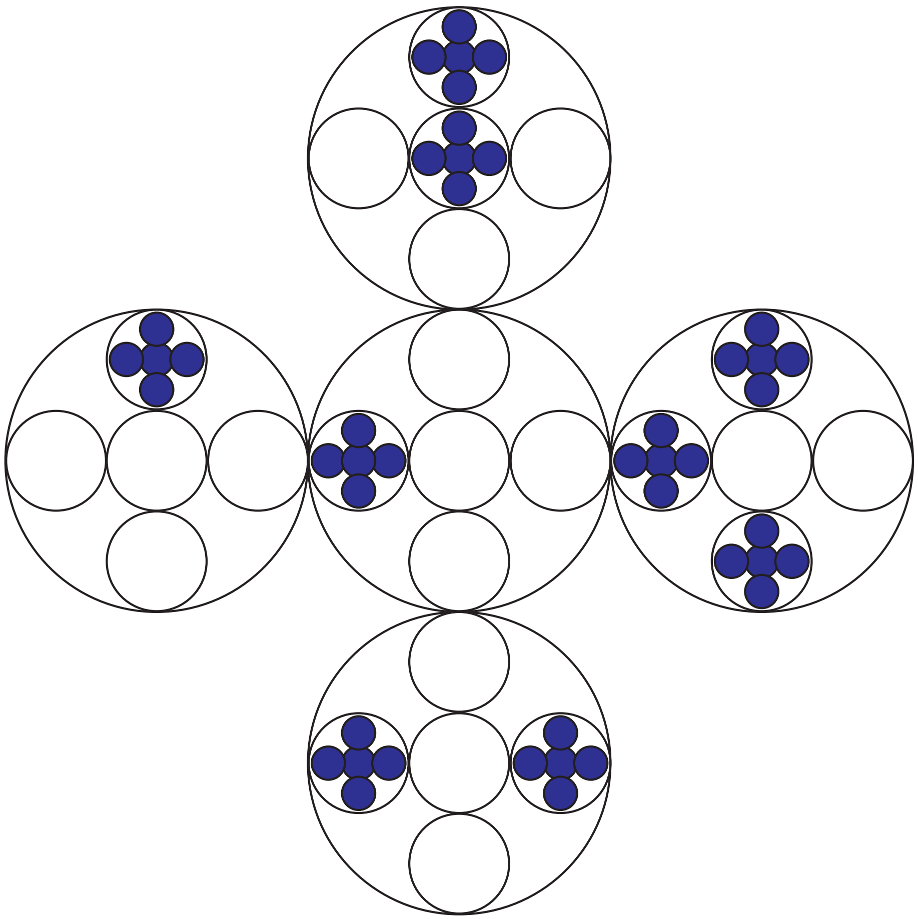
$\forall \exists \ldots$のイメージ



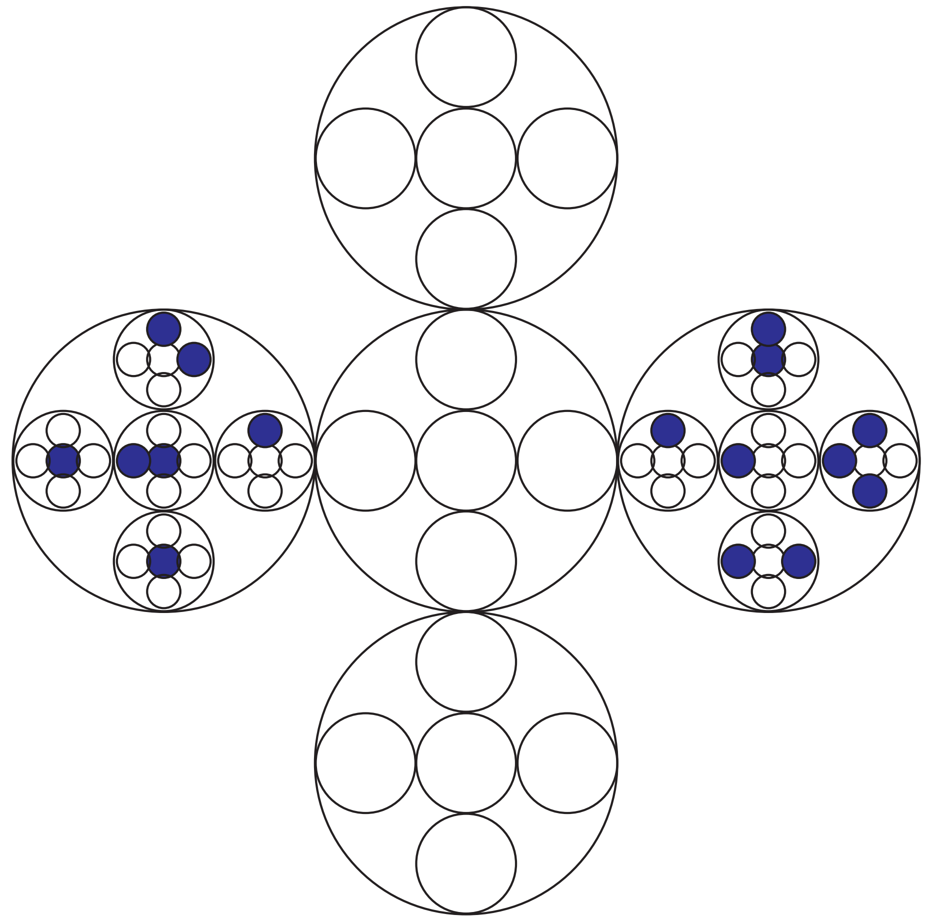
$\exists \forall \ldots$のイメージ



∀∃∀ ...のイメージ



∃∀∃ ...のイメージ



演習 **11.1.**　自然数全体を考えるとき，次の命題の真偽を考えよ．また，整数全体を考えるときにはどうなるか．

(1) $\exists \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} \leq \mathrm{y})$

(2) $\forall \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{x} + \mathrm{y} \approx 12)$

自然数全体を考えるとき．

(1) $\mathrm{x} = 0$をとると，$\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \leq \mathrm{y})$が成立しているので，真．

(2) $\exists \mathrm{y}\,(\mathrm{x} + \mathrm{y} \approx 12)$は，$\mathrm{x}$が$12$以下のときは成立するが，$\mathrm{x}$が$13$以上のときは成立しない．従って，偽．

整数全体を考えるとき．

(1) xをどのような整数nにとったとしても，$\forall \mathrm{y}(\mathrm{x} \leq \mathrm{y})$は成立していていない．なぜなら，$\mathrm{y}$として$n-1$をとると$\mathrm{x} \leq \mathrm{y}$が成立していないから．$\mathrm{x}$が存在しないため，偽．

(2) $\mathrm{x} = n$とおくとき，$\exists \mathrm{y}\,(\mathrm{x} + \mathrm{y} \approx 12)$はいつも成立する．なぜなら，$\mathrm{y} = 12 - n$とればよいから．従って，真．

存在の個数の記述

$\exists x A$の形の述語論理式は，Aを見たすxが何個ある場合でも真になってしまう．丁度n個だけ真になるものがあることは記述できないのだろうか?

実は，丁度n個だけ真になる，というような性質は，存在命題だけでは示せないが，全称と存在，そして等号も用いることで示すことが出来る．以下の述語論理式は，$\mathtt{P}(x)$を満たすxが丁度**1**つだけ存在することを意味している：

$$\exists \mathtt{x}\ (\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge \forall \mathtt{y}\ (\mathtt{P}(\mathtt{y}) \to \mathtt{x} \approx \mathtt{y}))$$

前半の$\mathtt{P}(\mathtt{x})$で$\mathtt{x}$が$\mathtt{P}$を満たすこと，そして，後半の$\forall \mathtt{y}(\mathtt{P}(\mathtt{y}) \to \mathtt{x} \approx \mathtt{y})$で，$\mathtt{P}$を満たすどんな$\mathtt{y}$も$\mathtt{x}$に等しい，ということを

いっている．つまり，両者を満たすようなxが存在するのは，Pを満たすxが丁度**1**つだけ存在するときである．

演習 **11.2.** 以下の述語論理式もPを満たすものが丁度**1**つだけであることを意味することを確認せよ．

$$\exists \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}) \wedge \forall \mathrm{y}\, \forall \mathrm{z}\, (\mathrm{P}(\mathrm{y}) \wedge \mathrm{P}(\mathrm{z}) \to \mathrm{y} \approx \mathrm{z})$$

演習 **11.3.** $\mathrm{P}(\mathrm{x})$を満たすxが丁度**2**つだけ存在することを意味する述語論理式を書け.

(演習11.2の解答例)
前半の$\exists x\, P(x)$でPを満たすものが**1**つ以上あることをいっている．そして，後半の$\forall y \forall z\, (P(y) \wedge P(z) \to y \approx z)$は，Pを満たすものをとってくればそれらは同一である，ということをいっている．これらが論理積で結ばれているわけだから，この**2**つが正しいということ，すなわちPを満たすものが丁度**1**つだけであることを，この述語論理式は意味する．

(演習 11.3の解答例) **2**つ存在することをいうためには，異なるものが**2**つ存在する，ということを言う必要がある．また，**3**つ以上存在しないことを言うためには，その**2**つのどちらかになることを言えばよい．

$$\exists x\, \exists y\, (P(x) \wedge P(y) \wedge \neg(x \approx y) \wedge \forall z\, (P(z) \to z \approx x \vee z \approx y))$$

3個以上についても同様にできることは明らかだろう．

目次

- 述語論理式の真偽 **(2)**
- 変数の自由出現と束縛出現
- 変数束縛と束縛変数の名前替え
- 冠頭標準形
- 述語論理式の省略記法

量化子とそのスコープ

定義 11.4. $\forall x$ や $\exists x$ を量化子という．述語論理式に $\forall xA$ や $\exists xA$ の形が含まれるとき，A の部分を量化子 $\forall x$ や $\exists x$ のスコープとよぶ.

例．述語論理式 $\forall \mathrm{x}\,(\forall \mathrm{y}\,\mathtt{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \wedge \mathtt{Q}(\mathrm{x}))$ を考える．この述語論理式には，$\forall \mathrm{x}$ と $\forall \mathrm{y}$ の **2** つの量化子が出現する．$\forall \mathrm{x}$ のスコープは，$\forall \mathrm{y}\,\mathtt{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \wedge \mathtt{Q}(\mathrm{x})$．$\forall \mathrm{y}$ のスコープは，$\mathtt{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})$.

例．述語論理式 $\forall \mathrm{x}\,(\forall \mathrm{x}\,\mathtt{P}(\mathrm{x}) \wedge \forall \mathrm{x}\,\mathtt{Q}(\mathrm{x}) \wedge \mathtt{R}(\mathrm{x}))$ を考える．この述語論理式には，量化子 $\forall \mathrm{x}$ が **3** 箇所に出現する．そのスコープは左から順に，$\forall \mathrm{x}\,\mathtt{P}(\mathrm{x}) \wedge \forall \mathrm{x}\,\mathtt{Q}(\mathrm{x}) \wedge \mathtt{R}(\mathrm{x})$，$\mathtt{P}(\mathrm{x})$，$\mathtt{Q}(\mathrm{x})$.

変数の束縛出現と自由出現

定義 11.5. 変数 x の原子論理式における出現が量化子 $\forall x$ や $\exists x$ のスコープに入っていないとき，その出現を自由出現とよび，量化子 $\forall x$ や $\exists x$ のスコープに入っているとき，その出現を束縛出現とよぶ.

例．述語論理式 $\forall \mathtt{x}\, \mathtt{P}(\mathtt{x}, \mathtt{y})$ において，変数 $\mathtt{x}$ の出現は束縛出現，変数 $\mathtt{y}$ の出現は自由出現.

例．述語論理式 $\forall \mathtt{x}\, (\forall \mathtt{y}\, \mathtt{P}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{x}, \mathtt{y}))$ を考える．$\mathtt{P}(\mathtt{x}, \mathtt{y})$ に現われる変数 $\mathtt{x}, \mathtt{y}$ の出現は束縛出現．$\mathtt{Q}(\mathtt{x}, \mathtt{y})$ に現われる変数 $\mathtt{x}, \mathtt{y}$ の出現については，変数 $\mathtt{x}$ の方は束縛出現だが，変数 $\mathtt{y}$ の方は自由出現.

項に含まれる変数集合

定義 11.6. tを項とするとき，項に含まれる変数集合$\mathrm{V}(t)$を以下のように定義する．

$$\mathrm{V}(t) = \begin{cases} \{t\} & \text{(}t\text{が変数の場合)} \\ \bigcup_{1 \leq i \leq n} \mathrm{V}(t_i) & \text{(}t = f(t_1, \ldots, t_n)\text{の場合)} \end{cases}$$

定数の場合，2番目の場合分けによって，例えば，$\mathrm{V}(0) = \emptyset$となることに注意.

演習 11.7. 以下を求めよ．

(1) $\mathrm{V}(\mathrm{x})$

(2) $\mathrm{V}(0)$

(3) $\mathrm{V}(+(\mathrm{x}, +(\mathrm{y}, 0)))$

(1) $\mathrm{V}(\mathrm{x}) = \{\mathrm{x}\}$

(2) $\mathrm{V}(0) = \emptyset$

この場合，“$t = f(t_1, \ldots, t_n)$の場合” の$n = 0$の場合を適用し，$\bigcup_{1 \leq i \leq 0} \mathrm{V}(t_i) = \emptyset$となる．

(3) 再帰的定義であるから，最後まで定義を展開しないと解が得られない．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}(+(\mathrm{x}, +(\mathrm{y}, 0))) &= \mathrm{V}(\mathrm{x}) \cup \mathrm{V}(+(\mathrm{y}, 0)) \\
&= \{\mathrm{x}\} \cup \mathrm{V}(\mathrm{y}) \cup \mathrm{V}(0) \\
&= \{\mathrm{x}\} \cup \{\mathrm{y}\} \cup \emptyset \\
&= \{\mathrm{x}, \mathrm{y}\}
\end{aligned}
$$

よって，$\mathrm{V}(+(\mathrm{x}, +(\mathrm{y}, 0))) = \{\mathrm{x}, \mathrm{y}\}$.

述語論理式に含まれる自由変数の集合

自由出現をもつ変数を自由変数とよぶ.

定義 11.8. Aを述語論理式とするとき，Aに含まれる自由変数集合$\mathrm{FV}(A)$を以下のように定義する．$\mathrm{FV}(A) =$

$$
\begin{cases}
\bigcup_{1\le i\le n} \mathrm{V}(t_i) & (A = P(t_1,\ldots,t_n)\text{のとき}) \\
\mathrm{V}(s) \cup \mathrm{V}(t) & (A = s \approx t\text{のとき}) \\
\emptyset & (A \in \{\bot, \top\}\text{のとき}) \\
\mathrm{FV}(B) & (A = \neg B\text{のとき}) \\
\mathrm{FV}(B) \cup \mathrm{FV}(C) & (A = B \circ C,\ \circ \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}\text{のとき}) \\
\mathrm{FV}(B) \setminus \{x\} & (A = QxB,\ Q \in \{\forall, \exists\}\text{のとき})
\end{cases}
$$

$\mathrm{V}(t)$は項tに含まれる変数集合を表わすことに注意.

例．述語論理式 $A = \forall \mathtt{y}\,(\mathtt{x} \approx \mathtt{y} \wedge \mathtt{P}(\mathtt{y}, \mathtt{z}))$ を考える．このとき，$\mathrm{FV}(A) = \{\mathtt{x}, \mathtt{z}\}$．つまり，自由変数は $\mathtt{x}$ と $\mathtt{z}$.

例．述語論理式 $A = \forall \mathtt{y}\,(\mathtt{x} \approx \mathtt{y}) \wedge \mathtt{P}(\mathtt{x}, \mathtt{y})$ を考える．このとき，$\mathrm{FV}(A) = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$．(左側の $\mathtt{y}$ は束縛出現だが，右側の $\mathtt{y}$ は自由出現であることに注意．)

演習 **11.9.** 以下を求めよ．

(1) $\mathrm{FV}(\mathtt{f}(\mathtt{x}) \approx \mathtt{g}(\mathtt{x}, \mathtt{y}))$

(2) $\mathrm{FV}(\forall \mathtt{x}\,\forall \mathtt{y}\,\mathtt{P}(\mathtt{f}(\mathtt{x}), \mathtt{g}(\mathtt{y}, \mathtt{z})))$

(3) $\mathrm{FV}(\forall \mathtt{y}\,(\mathtt{x} + \mathtt{y} \leq 10) \wedge \forall \mathtt{x}\,\mathtt{P}(\mathtt{x}, \mathtt{y}))$

(解答)

(1) $\mathrm{FV}(\mathtt{f}(\mathtt{x}) \approx \mathtt{g}(\mathtt{x}, \mathtt{y})) = \mathrm{V}(\mathtt{f}(\mathtt{x})) \cup \mathrm{V}(\mathtt{g}(\mathtt{x}, \mathtt{y}))$

$= \mathrm{V}(\mathtt{x}) \cup (\mathrm{V}(\mathtt{x}) \cup \mathrm{V}(\mathtt{y})) = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$

(2) $\mathrm{FV}(\forall \mathtt{x}\, \forall \mathtt{y}\, \mathtt{P}(\mathtt{f}(\mathtt{x}), \mathtt{g}(\mathtt{y}, \mathtt{z})))$

$= \mathrm{FV}(\forall \mathtt{y}\, \mathtt{P}(\mathtt{f}(\mathtt{x}), \mathtt{g}(\mathtt{y}, \mathtt{z}))) \setminus \{\mathtt{x}\}$

$= (\mathrm{FV}(\mathtt{P}(\mathtt{f}(\mathtt{x}), \mathtt{g}(\mathtt{y}, \mathtt{z}))) \setminus \{\mathtt{y}\}) \setminus \{\mathtt{x}\}$

$= (\{\mathtt{x}, \mathtt{y}, \mathtt{z}\} \setminus \{\mathtt{y}\}) \setminus \{\mathtt{x}\} = \{\mathtt{z}\}$

(3) $\mathrm{FV}(\forall \mathtt{y}\, (\mathtt{x} + \mathtt{y} \leq 10) \wedge \forall \mathtt{x}\, \mathtt{P}(\mathtt{x}, \mathtt{y}))$

$= \mathrm{FV}(\forall \mathtt{y}\, (\mathtt{x} + \mathtt{y} \leq 10)) \cup \mathrm{FV}(\forall \mathtt{x}\, \mathtt{P}(\mathtt{x}, \mathtt{y}))$

$= (\mathrm{FV}(\mathtt{x} + \mathtt{y} \leq 10) \setminus \{\mathtt{y}\}) \cup (\mathrm{FV}(\mathtt{P}(\mathtt{x}, \mathtt{y})) \setminus \{\mathtt{x}\})$

$= ((\mathrm{V}(\mathtt{x} + \mathtt{y}) \cup \mathrm{V}(10)) \setminus \{\mathtt{y}\}) \cup ((\mathrm{V}(\mathtt{x}) \cup \mathrm{V}(\mathtt{y})) \setminus \{\mathtt{x}\})$

$= (((\mathrm{V}(\mathtt{x}) \cup \mathrm{V}(\mathtt{y})) \cup \emptyset) \setminus \{\mathtt{y}\}) \cup (\{\mathtt{x}, \mathtt{y}\} \setminus \{\mathtt{x}\})$

$= (\{\mathtt{x}, \mathtt{y}\} \setminus \{\mathtt{y}\}) \cup (\{\mathtt{x}, \mathtt{y}\} \setminus \{\mathtt{x}\}) = \{\mathtt{x}\} \cup \{\mathtt{y}\} = \{\mathtt{x}, \mathtt{y}\}$

重要な同値式 (4)

自由変数集合を利用した次の同値式が成立する．

束縛の導入・消去 ($x \notin \mathrm{FV}(C)$とする)

$$\forall x\, C \cong C, \qquad \exists x\, C \cong C$$

束縛の移動 ($x \notin \mathrm{FV}(C)$とする)

$$\begin{aligned}
&\forall x\,(A \lor C) \cong \forall x\, A \lor C, \ \forall x\,(C \lor A) \cong C \lor \forall x\, A, \\
&\forall x\,(A \land C) \cong \forall x\, A \land C, \ \forall x\,(C \land A) \cong C \land \forall x\, A, \\
&\exists x\,(A \land C) \cong \exists x\, A \land C, \ \exists x\,(C \land A) \cong C \land \exists x\, A, \\
&\exists x\,(A \lor C) \cong \exists x\, A \lor C, \ \exists x\,(C \lor A) \cong C \lor \exists x\, A
\end{aligned}$$

演習 11.10. 以下の同値式を示せ.

(1) $\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}(\mathtt{x})) \cong \mathtt{P} \to \forall \mathtt{x}\,\mathtt{Q}(\mathtt{x})$

(2) $\neg\forall \mathtt{x}\,\exists \mathtt{y}\,\exists \mathtt{x}\,\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \cong \forall \mathtt{x}\,\forall \mathtt{y}\,\neg\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{y})$

解答例

(1)

$$\begin{aligned}
\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{P} \to \mathtt{Q}(\mathrm{x})) &\cong \forall \mathrm{x}\,(\neg \mathrm{P} \lor \mathtt{Q}(\mathrm{x})) && \textbf{(含意)} \\
&\cong \neg \mathrm{P} \lor \forall \mathrm{x}\, \mathtt{Q}(\mathrm{x}) && \textbf{(束縛の移動)} \\
&\cong \mathrm{P} \to \forall \mathrm{x}\, \mathtt{Q}(\mathrm{x}) && \textbf{(含意)}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\neg\forall \mathrm{x}\,\exists \mathrm{y}\,\exists \mathrm{x}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}) &\cong \neg\exists \mathrm{y}\,\exists \mathrm{x}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}) && \textbf{(束縛の導入・除去)} \\
&\cong \forall \mathrm{y}\,\neg\exists \mathrm{x}\,\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}) && \textbf{(ド・モルガンの法則)} \\
&\cong \forall \mathrm{y}\,\forall \mathrm{x}\,\neg\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}) && \textbf{(ド・モルガンの法則)} \\
&\cong \forall \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,\neg\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}) && \textbf{(全称の交換)}
\end{aligned}$$

目次

変数の束縛

定義 11.11. 変数xのAにおける自由出現は，$\forall x\, A$や$\exists x\, A$において，量化子$\forall x$や$\exists x$によって束縛されるという．

“束縛されている”という関係(束縛関係)を矢印で表わしてみる．

例． $\forall \mathtt{y}\, (\forall \mathtt{x}\, \mathtt{Q}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{x}, \mathtt{y}))$

変数xのどんな束縛出現も，ある量化子$\forall x$や$\exists x$のスコープにあるが，その出現をスコープにもつ量化子の中で**1**番内側の$\forall x\, A$や$\exists x\, A$を考えると，Aで変数xは自由に出現しているはず．従って，どんな束縛出現も，ある量化子により束縛されている．

例.

$$\forall \mathrm{x}\,(\forall \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{x}\,\mathrm{R}(\mathrm{x}) \to \mathtt{Q}(\mathrm{x}))$$

先頭の$\forall \mathrm{x}$により束縛されているのは，$\forall \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \exists \mathrm{x}\,\mathrm{R}(\mathrm{x}) \to \mathtt{Q}(\mathrm{x})$で自由な出現のみ．つまり，$\mathtt{Q}(\mathrm{x})$の$\mathrm{x}$のみ．

逆に，出現する変数の方から見ると，**1**番近い量化子に束縛される．

演習 11.12. 次の述語論理式における束縛関係を図示せよ．

$$\forall \mathrm{y}\,(\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x} + \mathrm{y} \geq 0) \to \forall \mathrm{x}\,(|\mathrm{x} + \mathrm{y}| \approx \mathrm{x} + \mathrm{y}))$$

(解答)

$$\forall \mathrm{y}\,(\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x}+\mathrm{y}\geq 0)\rightarrow \forall \mathrm{x}\,(|\mathrm{x}+\mathrm{y}|\approx \mathrm{x}+\mathrm{y}))$$

束縛変数の名前替え

自由変数でない変数を束縛変数とよぶことがある．しかし，変数の束縛出現では，どこに束縛されているかが重要で，その変数が何かということは重要でない．従って，量化子$Q\,x$とそれにより束縛されている変数出現を一斉に他の変数に置きかえても論理的には同値である．この変数置き換え操作を束縛変数の名前替えとよぶ．

以下の述語論理式は全て論理的に同値であり，相互に変換してもよい．

$$\forall \mathrm{y}\,(\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x}+\mathrm{y}\geq 0)\to \forall \mathrm{x}\,(|\mathrm{x}+\mathrm{y}|\approx \mathrm{x}+\mathrm{y}))$$
$$\forall \mathrm{z}\,(\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x}+\mathrm{z}\geq 0)\to \forall \mathrm{x}\,(|\mathrm{x}+\mathrm{z}|\approx \mathrm{x}+\mathrm{z}))$$
$$\forall \mathrm{z}\,(\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{y}+\mathrm{z}\geq 0)\to \forall \mathrm{y}\,(|\mathrm{y}+\mathrm{z}|\approx \mathrm{y}+\mathrm{z}))$$

束縛関係を図示してみれば一目瞭然.

$$\forall \mathtt{y}\,(\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{x}+\mathtt{y}\geq 0)\to\forall \mathtt{x}\,(|\mathtt{x}+\mathtt{y}|\approx \mathtt{x}+\mathtt{y}))$$

$$\forall \mathtt{z}\,(\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{x}+\mathtt{z}\geq 0)\to\forall \mathtt{x}\,(|\mathtt{x}+\mathtt{z}|\approx \mathtt{x}+\mathtt{z}))$$

$$\forall \mathtt{z}\,(\forall \mathtt{y}\,(\mathtt{y}+\mathtt{z}\geq 0)\to\forall \mathtt{y}\,(|\mathtt{y}+\mathtt{z}|\approx \mathtt{y}+\mathtt{z}))$$

演習 11.13. 以下の述語論理式で，束縛変数の名前替えで得られるものはどれとどれか.

(1) $\exists \mathtt{w}\,\forall \mathtt{x}\,((\mathtt{w}+\mathtt{x}\geq 0)\to \forall \mathtt{y}\,(|\mathtt{y}+\mathtt{x}|\approx \mathtt{y}+\mathtt{x}))$

(2) $\exists \mathtt{z}\,\forall \mathtt{y}\,((\mathtt{z}+\mathtt{y}\geq 0)\to \forall \mathtt{x}\,(|\mathtt{x}+\mathtt{z}|\approx \mathtt{x}+\mathtt{z}))$

(3) $\exists \mathtt{x}\,\forall \mathtt{y}\,((\mathtt{x}+\mathtt{y}\geq 0)\to \forall \mathtt{z}\,(|\mathtt{z}+\mathtt{x}|\approx \mathtt{z}+\mathtt{x}))$

(4) $\exists \mathtt{y}\,\forall \mathtt{z}\,((\mathtt{y}+\mathtt{z}\geq 0)\to \forall \mathtt{x}\,(|\mathtt{x}+\mathtt{z}|\approx \mathtt{x}+\mathtt{z}))$

(解答)

(1)と(4)は束縛変数の名前替えで得られる．(1)と(4)の述語論理式の束縛関係は以下のようになっている．

$$\exists \mathtt{w}\,\forall \mathtt{x}\,((\mathtt{w} + \mathtt{x} \geq 0) \to \forall \mathtt{y}\,(|\mathtt{y} + \mathtt{x}| \approx \mathtt{y} + \mathtt{x}))$$

(2)と(3)は束縛変数の名前替えで得られる．(2)と(3)の述語論理式の束縛関係は以下のようになっている．

$$\exists \mathtt{z}\,\forall \mathtt{y}\,((\mathtt{z} + \mathtt{y} \geq 0) \to \forall \mathtt{x}\,(|\mathtt{x} + \mathtt{z}| \approx \mathtt{x} + \mathtt{z}))$$

重要な同値式 (5)

束縛変数の名前替え

(A' は A から束縛変数の名前替えで得られるとする)

$$A \cong A'$$

演習 11.14.　以下の同値式を示せ.

(1) $\forall \mathtt{x}\, \forall \mathtt{y}\, (\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge \mathtt{Q}(\mathtt{y})) \cong \forall \mathtt{x}\, \mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge \forall \mathtt{x}\, \mathtt{Q}(\mathtt{x})$

(2) $\forall \mathtt{x}\, \mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \exists \mathtt{x}\, \mathtt{Q}(\mathtt{x}) \cong \exists \mathtt{x}\, \exists \mathtt{y}\, (\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{y}))$

(解答例) (1)

$$
\begin{aligned}
& \forall x\, \forall y\, (P(x) \land Q(y)) & \\
\cong\ & \forall x\, (P(x) \land \forall y\, Q(y)) & \textbf{(束縛の移動)} \\
\cong\ & \forall x\, P(x) \land \forall y\, Q(y) & \textbf{(束縛の移動)} \\
\cong\ & \forall x\, P(x) \land \forall x\, Q(x) & \textbf{(束縛変数の名前替え)}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
& \forall x\, P(x) \to \exists x\, Q(x) & \\
\cong\ & \neg\forall x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x) & \textbf{(含意の法則)} \\
\cong\ & \exists x\, \neg P(x) \lor \exists x\, Q(x) & \textbf{(ド・モルガンの法則)} \\
\cong\ & \exists x\, (\neg P(x) \lor \exists x\, Q(x)) & \textbf{(束縛の移動)} \\
\cong\ & \exists x\, (\neg P(x) \lor \exists y\, Q(y)) & \textbf{(束縛変数の名前替え)} \\
\cong\ & \exists x\, \exists y\, (\neg P(x) \lor Q(y)) & \textbf{(束縛の移動)} \\
\cong\ & \exists x\, \exists y\, (P(x) \to Q(y)) & \textbf{(含意の法則)}
\end{aligned}
$$

目次

- 述語論理式の真偽 **(2)**
- 変数の自由出現と 束縛出現
- 変数束縛と 束縛変数の名前替え
- 冠頭標準形
- 述語論理式の省略記法

述語論理式の冠頭標準形

定義 11.15. $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$ および量化記号を含まない述語論理式Aについて，$Q_1 x_1 \ \cdots Q_n x_n \ A$なる形の述語論理式を冠頭標準形とよぶ.

冠頭標準形の例:

$$\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{x} \approx 0)$$
$$\forall \mathrm{x}\,\exists \mathrm{y}\,\exists \mathrm{z}\,((\mathrm{x} \leq \mathrm{y}) \wedge (\mathrm{x} \leq \mathrm{z}))$$

冠頭標準形でない例:

$$\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{x} \approx 0) \vee \forall\,\mathrm{x}(\mathrm{x} \approx 1)$$
$$\neg\exists \mathrm{x}\,((\mathrm{x} \approx 0) \wedge (\mathrm{x} \approx 1))$$
$$\exists \mathrm{x}\,(\mathrm{x} \approx 0 \to \exists\,\mathrm{y}(\mathrm{x} \times \mathrm{y} = 1))$$

冠頭標準形への同値変形

定理 11.16. 任意の述語論理式 A について，A と論理的同値な冠頭標準形 B が存在する．述語論理式 B を A の冠頭標準形とよぶ.

以下の同値規則を用いて全称 (存在) 束縛を外に出す.

- 含意/同値の法則で $\to, \leftrightarrow$ を除去
- 束縛変数の名前替え
- 束縛の移動規則
- ド・モルガンの法則

例 1.

$$\begin{aligned} & \neg\exists \mathrm{x}\,((\mathrm{x} \approx 0) \land (\mathrm{x} \approx 1)) \\ \cong\ & \forall \mathrm{x}\,\neg((\mathrm{x} \approx 0) \land (\mathrm{x} \approx 1)) \quad \text{(ド・モルガンの法則)} \end{aligned}$$

例 2.

$$
\begin{aligned}
& \exists x\,(x \approx 0 \rightarrow \exists y\,(x \times y = 1)) \\
\cong\ & \exists x\,(\neg(x \approx 0) \vee \exists y\,(x \times y = 1)) && \textbf{(含意の法則)} \\
\cong\ & \exists x\,\exists y\,(\neg(x \approx 0) \vee (x \times y = 1)) && \textbf{(束縛の移動)}
\end{aligned}
$$

例 3.

$$
\begin{aligned}
& \exists x\,(x \approx 0) \wedge \exists x\,(x \approx 1) \\
\cong\ & \exists x\,((x \approx 0) \wedge \exists x\,(x \approx 1)) && \textbf{(束縛の移動)} \\
\cong\ & \exists x\,((x \approx 0) \wedge \exists y\,(y \approx 1)) && \textbf{(束縛変数の名前替え)} \\
\cong\ & \exists x\,\exists y\,((x \approx 0) \wedge (y \approx 1)) && \textbf{(束縛の移動)}
\end{aligned}
$$

演習 11.17. 以下の述語論理式の冠頭標準形を求めよ.

(1) $\neg\forall x\,\exists y\,P(x, y)$

(2) $\forall x\,P(x) \rightarrow \forall x\,Q(x)$

(解答)

(1)

$$\begin{aligned} & \neg\forall \mathrm{x}\,\exists \mathrm{y}\,\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \\ \cong\ & \exists \mathrm{x}\,\neg\exists \mathrm{y}\,\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) && \textbf{(ド・モルガンの法則)} \\ \cong\ & \exists \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,\neg\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) && \textbf{(ド・モルガンの法則)} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \forall \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}) \to \forall \mathrm{x}\,\mathtt{Q}(\mathrm{x}) \\ \cong\ & \neg\forall \mathrm{x}\,\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \forall \mathrm{x}\,\mathtt{Q}(\mathrm{x}) && \textbf{(含意の法則)} \\ \cong\ & \exists \mathrm{x}\,\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \forall \mathrm{x}\,\mathtt{Q}(\mathrm{x}) && \textbf{(ド・モルガンの法則)} \\ \cong\ & \exists \mathrm{x}\,(\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \forall \mathrm{x}\,\mathtt{Q}(\mathrm{x})) && \textbf{(束縛の移動)} \\ \cong\ & \exists \mathrm{x}\,(\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \forall \mathrm{y}\,\mathtt{Q}(\mathrm{y})) && \textbf{(束縛変数の名前替え)} \\ \cong\ & \exists \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,(\neg\mathrm{P}(\mathrm{x}) \vee \mathtt{Q}(\mathrm{y})) && \textbf{(束縛の移動)} \end{aligned}$$

目次

- 述語論理式の真偽 **(2)**
- 変数の自由出現と束縛出現
- 変数束縛と束縛変数の名前替え
- 冠頭標準形
- 述語論理式の省略記法

述語論理式の省略記法

(1) 並んだ同じ量化記号の省略

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n\, A \qquad \exists x_1 \cdots \exists x_n\, A$$

を，それぞれ,

$$\forall x_1, \ldots, x_n\, A \qquad \exists x_1, \ldots, x_n\, A$$

と省略することがある.

(2) 制約付きの量化子 (1)

$$\forall x \in u\, A \qquad \forall x \leq n\, A \qquad \forall x > 0\, A$$

は，それぞれ，

$$\forall x\, (x \in u \to A) \qquad \forall x\, (x \leq n \to A) \qquad \forall x\, (x > 0 \to A)$$

の省略．($x \in u, x \leq n, x > 0$ のところは，他にもいろいろあり得る．)

(3) 制約付きの量化子 (2)

$$\exists x \in u\, A \qquad \exists x \leq n\, A \qquad \exists x > 0\, A$$

は，それぞれ

$$\exists x\, (x \in u \wedge A) \qquad \exists x\, (x \leq n \wedge A) \qquad \exists x\, (x > 0 \wedge A)$$

の省略.

　制約付きの量化子は，$\forall$と$\exists$で制約の解釈が異なることに注意.

制約付きの全称・存在についても，ド・モルガンの法則が成立する

$$\begin{aligned}
\neg\forall x \in u\, A &= \neg\forall x\,(x \in u \to A)\\
&\cong \exists x\,\neg(x \in u \to A)\\
&\cong \exists x\,\neg(\neg(x \in u) \vee A)\\
&\cong \exists x\,(\neg(\neg(x \in u)) \wedge \neg A)\\
&\cong \exists x\,(x \in u \wedge \neg A)\\
&= \exists x \in u\,\neg A
\end{aligned}$$

演習 11.18. 同様にして，$\neg\exists x \in u\, A \cong \forall x \in u\,\neg A$となることを確かめよ．

ただし，どんな場合でも，制約 “$\in u$” 等を追加して論理的同値性が保たれるということではない．怪しい場合には定義に戻って考えること．

量化子のドット記法

$\forall x$ や $\exists x$ の結合力を弱くした方が，括弧が減って読みやすい場合がある．$\forall x\, A$ や $\exists x\, A$ の代わりに，$\forall x.\, A$ や $\exists x.\, A$ を用いる記法は，量化子の結合力を命題結合子の結合力よりも弱くすることを意味する．

命題結合子およびドット付き量化子の結合力

$$\neg \quad > \quad \wedge, \vee \quad > \quad \rightarrow \quad > \quad \forall x., \exists x.$$

例．最初の **3** つと最後の **2** つは同じ述語論理式を表わす．

[ドットなし] $\forall \mathtt{x}\, (\mathtt{x} < \mathtt{y} \rightarrow \exists \mathtt{z}\, (\mathtt{x} < \mathtt{z} \wedge \mathtt{z} < \mathtt{y}))$

[ドットあり] $\forall \mathtt{x}.\ \mathtt{x} < \mathtt{y} \rightarrow \exists \mathtt{z}.\ \mathtt{x} < \mathtt{z} \wedge \mathtt{z} < \mathtt{y}$

[ドットあり＋制約部] $\forall \mathtt{x} < \mathtt{y}.\ \exists \mathtt{z}.\ \mathtt{x} < \mathtt{z} \wedge \mathtt{z} < \mathtt{y}$

[ドットなし] $\forall \mathtt{x}\, \mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge \exists \mathtt{y}\, \mathtt{Q}(\mathtt{y})$

[ドットあり] $(\forall \mathtt{x}.\ \mathtt{P}(\mathtt{x})) \wedge \exists \mathtt{y}.\ \mathtt{Q}(\mathtt{y})$

まとめ

- 述語論理式の真偽と同値変形
  - 量化記号の異なる出現順序による違い
  - 存在する個数の表現
  - 重要な同値式**(4),(5)**と冠頭標準形
- 変数の自由出現と束縛出現
  - 自由変数集合
  - 束縛関係と束縛変数の名前替え
- 述語論理式の省略記法
  - 並んだ量化記号の省略
  - 制約付きの量化子
  - ドット付きの量化子