

2023年度 数理論理学 復習問題 (4)

問題 1 以下の命題論理式は論理的同値か, 真理値表を書いて調べよ.

- (1) $P \rightarrow Q$ と $\neg P \vee Q$
- (2) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R$ と $P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$

問題 2 $P \wedge (P \vee Q) \cong P$ を (真理値表を使わず) 解釈の定義を使って示せ.

問題 3 以下の論理的同値性を同値変形を用いて示せ. (変形に用いた規則の名前も記入すること.)

- (1) $P \rightarrow P \rightarrow Q \cong P \rightarrow Q$
- (2) $P \rightarrow Q \rightarrow S \cong P \wedge Q \rightarrow S$
- (3) $(P \rightarrow Q) \rightarrow Q \cong P \vee Q$
- (4) $P \leftrightarrow Q \cong (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

問題 4 以下の命題論理式の論理積標準形および論理和標準形を同値変形によって求めよ. (変形に用いた規則の名前も記入すること.)

- (1) $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$
- (2) $\neg(P \wedge (Q \rightarrow R))$
- (3) $(P \rightarrow Q \wedge R) \rightarrow S$
- (4) $\neg(P \leftrightarrow Q)$

問題 5 以下の命題論理式の真理値表を書き, そこから論理積標準形および論理和標準形を求めよ.

- (1) $\neg(P \leftrightarrow Q)$
- (2) $\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow Q \wedge P$

2023年度 数理論理学 復習問題解答 (4)

問題 1 (1) 真理値表は以下のようになる。

P	Q	P → Q	¬P	¬P ∨ Q
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

ゆえに、 $P \rightarrow Q$ と $\neg P \vee Q$ は論理的同値。

(2) 真理値表は以下のようになる。

P	Q	R	P ↔ Q	(P ↔ Q) ↔ R	Q ↔ R	P ↔ (Q ↔ R)
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T	F
F	T	F	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	F	T	F

ゆえに、 $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R$ と $P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$ は論理的同値。

問題 2 v を任意の付値とする。 $v(P)$ の値で場合分けする。

- $v(P) = T$ のとき。このとき、 $\llbracket P \rrbracket_v = T$ であるから、 $\llbracket P \vee Q \rrbracket_v = T$ 。よって、 $\llbracket P \wedge (P \vee Q) \rrbracket_v = T = \llbracket P \rrbracket_v$ となる。
- $v(P) = F$ のとき。このとき、 $\llbracket P \rrbracket_v = F$ であるから、 $\llbracket P \wedge (P \vee Q) \rrbracket_v = F = \llbracket P \rrbracket_v$ となる。

よって、いずれの場合も $\llbracket P \wedge (P \vee Q) \rrbracket_v = \llbracket P \rrbracket_v$ となる。ゆえに、 $P \wedge (P \vee Q) \cong P$ が成立。

問題 3

- (1)
- $$\begin{aligned}
 P \rightarrow (P \rightarrow Q) &\cong (\neg P) \vee (P \rightarrow Q) && \text{(含意)} \\
 &\cong (\neg P) \vee ((\neg P) \vee Q) && \text{(含意)} \\
 &\cong ((\neg P) \vee (\neg P)) \vee Q && \text{(結合律)} \\
 &\cong (\neg P) \vee Q && \text{(べき等律)} \\
 &\cong P \rightarrow Q && \text{(含意)}
 \end{aligned}$$
- (2)
- $$\begin{aligned}
 P \rightarrow Q \rightarrow S &\cong \neg P \vee (Q \rightarrow S) && \text{(含意)} \\
 &\cong \neg P \vee (\neg Q \vee S) && \text{(含意)} \\
 &\cong (\neg P \vee \neg Q) \vee S && \text{(結合律)} \\
 &\cong \neg(P \wedge Q) \vee S && \text{(ド・モルガン)} \\
 &\cong P \wedge Q \rightarrow S && \text{(含意)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad (P \rightarrow Q) \rightarrow Q &\cong \neg(P \rightarrow Q) \vee Q && \text{(含意)} \\
&\cong \neg(\neg P \vee Q) \vee Q && \text{(含意)} \\
&\cong (\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee Q && \text{(ド・モルガン)} \\
&\cong (P \wedge \neg Q) \vee Q && \text{(二重否定)} \\
&\cong (P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee Q) && \text{(分配律)} \\
&\cong (P \vee Q) \wedge \top && \text{(}\top\text{規則)} \\
&\cong P \vee Q && \text{(}\top\text{規則)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \quad P \leftrightarrow Q & \\
\cong (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) &&& \text{(同値)} \\
\cong (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) &&& \text{(含意}\times 2\text{)} \\
\cong ((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee ((\neg P \vee Q) \wedge P) &&& \text{(分配律)} \\
\cong ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q)) \vee ((\neg P \vee Q) \wedge P) &&& \text{(分配律)} \\
\cong ((\neg P \wedge \neg Q) \vee \perp) \vee ((\neg P \vee Q) \wedge P) &&& \text{(}\perp\text{規則)} \\
\cong (\neg P \wedge \neg Q) \vee ((\neg P \vee Q) \wedge P) &&& \text{(}\perp\text{規則)} \\
\cong (\neg P \wedge \neg Q) \vee ((\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P)) &&& \text{(分配律)} \\
\cong (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\perp \vee (Q \wedge P)) &&& \text{(}\perp\text{規則)} \\
\cong (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P) &&& \text{(}\perp\text{規則)} \\
\cong (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) &&& \text{(交換律}\times 2\text{)}
\end{aligned}$$

問題 4

(1)

$$\begin{aligned}
\neg(\neg P \wedge \neg Q) &\cong \neg\neg P \vee \neg\neg Q && \text{(ド・モルガン)} \\
&\cong P \vee Q && \text{(二重否定}\times 2\text{)} \dots \text{論理和標準形かつ論理積標準形}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\neg(P \wedge (Q \rightarrow R)) &\cong \neg(P \wedge (\neg Q \vee R)) && \text{(含意)} \\
&\cong \neg P \vee \neg(\neg Q \vee R) && \text{(ド・モルガン)} \\
&\cong \neg P \vee (\neg\neg Q \wedge \neg R) && \text{(ド・モルガン)} \\
&\cong \neg P \vee (Q \wedge \neg R) && \text{(二重否定)} \dots \text{論理和標準形} \\
&\cong (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R) && \text{(分配律)} \dots \text{論理積標準形}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
(P \rightarrow Q \wedge R) \rightarrow S &\cong (\neg P \vee (Q \wedge R)) \rightarrow S && \text{(含意)} \\
&\cong \neg(\neg P \vee (Q \wedge R)) \vee S && \text{(含意)} \\
&\cong (\neg\neg P \wedge \neg(Q \wedge R)) \vee S && \text{(ド・モルガン)} \\
&\cong (\neg\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R)) \vee S && \text{(ド・モルガン)} \\
&\cong (P \wedge (\neg Q \vee \neg R)) \vee S && \text{(二重否定)} \dots (a) \\
&\cong (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R) \vee S && \text{(分配律)} \dots \text{論理和標準形} \\
(a) &\cong (P \vee S) \wedge (\neg Q \vee \neg R \vee S) && \text{(分配律)} \dots \text{論理積標準形}
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} & \neg(P \leftrightarrow Q) \\ \cong & \neg((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)) && \text{(同値)} \\ \cong & \neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)) && \text{(含意} \times 2) \\ \cong & \neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P) && \text{(ド・モルガン)} \\ \cong & (\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg\neg Q \wedge \neg P) && \text{(ド・モルガン} \times 2) \\ \cong & (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) && \text{(二重否定} \times 2) \cdots \text{論理和標準形} \\ \cong & (P \vee (Q \wedge \neg P)) \wedge (\neg Q \vee (Q \wedge \neg P)) && \text{(分配律)} \\ \cong & (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P) && \text{(分配律)} \cdots \text{論理積標準形} \\ \cong & (P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg P) && \text{(T規則} \times 4) \cdots \text{論理積標準形(より簡単)} \end{aligned}$$

問題 5 (1) $\neg(P \leftrightarrow Q)$ の真理値表を書くと以下ようになる。

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$\neg(P \leftrightarrow Q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	F

論理和標準形

$\neg(P \leftrightarrow Q)$ が真となる行に注目すると，論理和標準形 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ が得られる。

論理積標準形

$\neg(P \leftrightarrow Q)$ が偽となる行に注目すると，命題論理式 $\neg((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$ が構成できる。ここから，ド・モルガンの法則と二重否定の法則で同値変形を行うと，論理積標準形 $(\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$ が得られる。

(2) $\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow Q \wedge P$ の真理値表は以下のような。

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg(P \rightarrow Q)$	$Q \wedge P$	$(\neg(P \rightarrow Q)) \rightarrow (Q \wedge P)$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	F	F	T

論理和標準形

$\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow Q \wedge P$ の真理値が真になる行に着目して，論理和標準形 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ が得られる。

論理積標準形

$\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow Q \wedge P$ の真理値が偽になる行に着目すると，命題論理式 $\neg(P \wedge \neg Q)$ が得られる。これをド・モルガンの法則と二重否定の法則で同値変形すると，論理積標準形 $\neg P \vee Q$ が得られる。(これは実は論理和標準形にもなっている。)