2023年度 数理論理学 復習問題 (15)

Rを集合A上の関係とする．

1. Rが反射的である (反射性をもつ) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の$x \in A$について$x\ R\ x$
2. Rが推移的である (推移性をもつ) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の$x, y, z \in A$について，$x\ R\ y$ かつ$y\ R\ z$ならば，$x\ R\ z$

また，関係とは集合Aの要素の対の集合で，$x\ R\ y$は$\langle x, y\rangle \in R$の略記であることに注意せよ．

集合A上の関係Sが，以下の4つの条件
(1) $R \subseteq S$
(2) Sは反射的
(3) Sは推移的
(4) 任意の関係S'について，$R \subseteq S'$かつS'が反射的かつS'が推移的ならば，$S \subseteq S'$が成立
を満たすとき，関係Sを，Rの反射推移閉包とよぶ．

問題 1 Rの反射推移閉包が一意に定まることを示せ．(つまり，S_1とS_2の両方が，Rの反射推移閉包ならば，$S_1 = S_2$となることを示せ．)

次に，A上の関係$R_0, R_1, \ldots$を以下のように再帰的に定める：

$$\begin{array}{lcl} R_0 & = & \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\} \\ R_{n+1} & = & R \circ R_n \end{array}$$

なお，関係の合成の定義に注意せよ：

$$S \circ T = \{\langle x, z\rangle \mid \text{ある } y \text{ が存在して } \langle x, y\rangle \in S \text{ かつ } \langle y, z\rangle \in T\}$$

最後に，$R_\infty = \bigcup_{i \geq 0} R_i$とおく．

問題 2 $R \subseteq R_\infty$となることを示せ．

問題 3 R_∞が反射的であることを示せ．(ヒント：$R = R_1$となることを示せ．)

問題 4 任意の自然数n, mについて，$R_n \circ R_m = R_{n+m}$となることを示せ．(ただし，関係の合成についての結合律$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$は用いてよいものとする．)

問題 5 R_∞が推移的であることを示せ．

問題 6 R_∞がRの反射推移閉包であることを示せ．

2023年度 数理論理学 復習問題解答 (15)

問題 1 S_1 と S_2 の両方が，R の反射推移閉包であると仮定する．このとき，S_1 が反射推移閉包であるので，S_1 について条件 (4) が成立する．すなわち，任意の関係 S' について，$R \subseteq S'$ かつ S' が反射的かつ S' が推移的ならば，$S_1 \subseteq S'$．よって，$R \subseteq S_2$ かつ S_2 が反射的かつ S_2 が推移的ならば，$S_1 \subseteq S_2$．ここで，仮定より S_2 は R の反射推移閉包であったから，S_2 について条件 (1)–(3) が成立し，$R \subseteq S_2$ かつ S_2 は反射的かつ S_2 は推移的．よって，$S_1 \subseteq S_2$ が成立する．また，以上の議論を，S_1 と S_2 を逆にしてすれば，$S_2 \subseteq S_1$ が成立することがわかる．したがって，$S_1 \subseteq S_2$ かつ $S_2 \subseteq S_1$ となり，$S_1 = S_2$ が成立する．

問題 2 まず，$R = R_1$ を示す．

いま，任意の $\langle x, z\rangle \in R_1$ をとる．このとき，$R_1 = R \circ R_0$ であるから，$\langle x, z\rangle \in R \circ R_0$．よって，ある y が存在して，$\langle x, y\rangle \in R$ かつ $\langle y, z\rangle \in R_0$．ここで，$R_0$ の定義から，$y = z$．よって，$\langle x, y\rangle \in R$ から，$\langle x, z\rangle \in R$ が成立する．以上より，$\langle x, z\rangle \in R_1$ ならば $\langle x, z\rangle \in R$．よって，任意の $\langle x, z\rangle \in R_1$ について，$\langle x, z\rangle \in R$．よって，部分集合の定義から，$R_1 \subseteq R$.

任意の $\langle x, z\rangle \in R$をとる．このとき，$\langle z, z\rangle \in R_0$ であることから，$\langle x, z\rangle \in R \circ R_0$．よって，$\langle x, z\rangle \in R_1$．以上より，任意の $\langle x, z\rangle \in R$ について，$\langle x, z\rangle \in R_1$．よって，$R \subseteq R_1$.

以上から，$R_1 \subseteq R$ かつ $R \subseteq R_1$ となるので，$R = R_1$.

最後に，和集合の性質から $R_1 \subseteq \bigcup_{i\geq 0} R_i$ となるので，$R \subseteq R_\infty$ が成立する．

問題 3 x を集合 A の任意の要素とする．このとき，R_0 の定義から，$\langle x, x\rangle \in R_0$．また，和集合の性質から $R_0 \subseteq \bigcup_{i\geq 0} R_i$ となるので，$\langle x, x\rangle \in R_\infty$ が成立する．以上より，任意の $x \in A$ について，$\langle x, x\rangle \in R_\infty$．したがって，$R_\infty$ は反射的.

問題 4 n に関する帰納法で示す.
基本ステップ: $n = 0$ のとき．このとき，R_0 の定義から，$R_0 \circ R_m = R_m$ が成立する．(丁寧な証明も問題2と同様にしてできるが，ここでは省略．)
基本ステップ: $n = k+1$ のとき．このとき，帰納法の仮定および関係の合成の結合律を用いて，$R_{k+1} \circ R_m = (R \circ R_k) \circ R_m = R \circ (R_k \circ R_m) = R \circ R_{k+m} = R_{k+m+1} = R_{n+m}$.
(最後の等式変形は，自然数の加算の交換律や結合律を用いているが，もちろん，ここでは使ってよいものとしておく．)

問題 5 x, y, z を集合 A の任意の要素とする．いま，$\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in R_\infty$ と仮定する．このとき，$\langle x, y\rangle \in \bigcup_{i\geq 0} R_i$．よって，和集合の定義から，ある自然数 n が存在して，$\langle x, y\rangle \in R_n$．よって，$\langle x, y\rangle \in R_n$ となる自然数 n が得られる．

同様に，$\langle y, z\rangle \in \bigcup_{i\geq 0} R_i$ であることから，ある自然数 m が存在して，$\langle y, z\rangle \in R_m$．よって，$\langle y, z\rangle \in R_m$ となる自然数 m が得られる．

したがって，$\langle x, z\rangle \in R_n \circ R_m$ が成立する．ここで，問題4を用いると，$\langle x, z\rangle \in R_{n+m}$ が成立．したがって，$\langle x, z\rangle \in R_l$ となる自然数 l が得られた．よって，ある

自然数 l が存在して，$\langle x,z\rangle \in R_l$．よって，和集合の性質から，$\langle x,z\rangle \in \bigcup_{i\geq 0} R_i$．したがって，$\langle x,z\rangle \in R_\infty$．

以上より，任意の $x,y,z \in A$ について，$\langle x,y\rangle, \langle y,z\rangle \in R_\infty$ なら，$\langle x,z\rangle \in R_\infty$ が成立する．よって，R_∞ は推移的.

問題 6 問題 2,3,5 より，反射推移閉包の条件 (1)–(3) は成立する．あと，条件 (4) が成立することを示せばよい.

S' を A 上の任意の関係とする．また，$R \subseteq S'$，かつ，S' は反射的，かつ，S' は推移的，と仮定する．$\langle x,y\rangle \in R_\infty$ とする．すると，ある自然数 n が存在して，$\langle x,y\rangle \in R_n$．よって，$\langle x,y\rangle \in R_n$ となる自然数 n が得られる．

ここで，任意の自然数 i について，i に関する帰納法で，$R_i \subseteq S'$ となることを示す.

基本ステップ：$i = 0$ の場合．$\langle x,y\rangle \in R_0$ と仮定する．すると，R_0 の定義から，$x = y$．よって，S' が反射的であることから，$\langle x,y\rangle \in S'$．したがって，任意の $\langle x,y\rangle \in R_0$ について，$\langle x,y\rangle \in S'$．よって，$R_0 \subseteq S'$．帰納ステップ：$i = k+1$ の場合.

$\langle x,z\rangle \in R_{k+1}$ と仮定する．すると，$\langle x,z\rangle \in R \circ R_k$．よって，ある y が存在して，$\langle x,y\rangle \in R$ かつ $\langle y,z\rangle \in R_k$．つまり，$\langle x,y\rangle \in R$ かつ $\langle y,z\rangle \in R_k$ なる y が得られる．このとき，$R \subseteq S'$ であったから，$\langle x,y\rangle \in S'$ が成立．また，帰納法の仮定より，$\langle y,z\rangle \in S'$ が成立する．さらに，S' の推移性より，$\langle x,y\rangle \in S'$ および $\langle y,z\rangle \in S'$ なので，$\langle x,z\rangle \in S'$ が成立する．以上より，任意の $\langle x,z\rangle \in R_i$ について，$\langle x,z\rangle \in S'$ が成立する．したがって，$R_{k+1} \subseteq S'$.

以上より，任意の自然数 i について，$R_i \subseteq S'$ が成立する．よって，和集合の性質から $\bigcup_{i\geq 0} R_i \subseteq S'$ となり，$R_\infty \subseteq S'$.

したがって，R_∞ について，反射推移閉包の条件 (1)–(4) が成立するので，R_∞ は R の反射推移閉包.