2023年度 数理論理学 復習問題(10)

問題 1 (a) 自然数の集合 $\{0\}$ を対象とするとき，(b) 自然数の集合 $\{0,1\}$ を対象とするとき，のそれぞれで，次の述語論理式の真偽を答えよ．

(1) $\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \times \mathtt{x} \approx 0)$

(2) $\exists \mathtt{x}\,\exists \mathtt{y}\,\neg(\mathtt{x} \approx \mathtt{y})$

問題 2 (a) 自然数全体を対象とするとき，(b) 整数全体を対象とするとき，のそれぞれで，次の述語論理式の真偽を答えよ．

(1) $\exists \mathtt{x}\,\exists \mathtt{y}\,(\neg(\mathtt{x} \approx 0) \wedge (\mathtt{x} + \mathtt{y} \approx 0))$

(2) $\forall \mathtt{x}\,\forall \mathtt{y}\,(\mathtt{x} \times \mathtt{x} \approx \mathtt{y} \times \mathtt{y} \to \mathtt{x} \approx \mathtt{y})$

問題 3 $A \cup B = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad A = \emptyset$ かつ $B = \emptyset$，となることを，述語論理式の同値変形を用いて説明せよ．

問題 4 以下の論理的同値性を同値変形を用いて示せ．(変形に用いた規則の名前も示すこと．)

(1) $\neg\forall \mathtt{x}\,\neg\exists \mathtt{y}\,\mathtt{P}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \cong \exists \mathtt{y}\,\exists \mathtt{x}\,\mathtt{P}(\mathtt{x},\mathtt{y})$

(2) $\neg\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x})) \cong \exists \mathtt{x}\,(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge \neg\mathtt{Q}(\mathtt{x}))$

(3) $\exists \mathtt{x}\,(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x})) \cong \forall \mathtt{x}\,\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \exists \mathtt{x}\,\mathtt{Q}(\mathtt{x})$

2023年度 数理論理学 復習問題解答 (10)

問題 1 (1)
(a) $0 \times 0 = 0$ だから，すべての要素 $\mathtt{x}$ について，$\mathtt{x} \times \mathtt{x} \approx 0$ は真になっている．よって，真.
(b) 与えられた述語論理式が真となるには，0 と 1 の両方について，$\mathtt{x} \times \mathtt{x} \approx 0$ が真になる必要がある．しかし，$1 \times 1 \approx 0$ は偽．すなわち，すべての要素 $\mathtt{x}$ について $\mathtt{x} \times \mathtt{x} \approx 0$ が真なわけではない．よって，偽.
(2) $\neg(\mathtt{x} \approx \mathtt{y})$ が真 $\Leftrightarrow$ $\mathtt{x} \approx \mathtt{y}$ が偽，であるから，$\mathtt{x} \approx \mathtt{y}$ が偽となるような $\mathtt{x}, \mathtt{y}$ があれば，論理式全体としては真となることに注意.
(a) 対象が $\{0\}$ なので，$\mathtt{x} = 0$，$\mathtt{y} = 0$ としか値の取りようがないが，$0 \approx 0$ は真．よって，$\mathtt{x} \approx \mathtt{y}$ が偽となるような $\mathtt{x}, \mathtt{y}$ は存在しない．よって，偽.
(b) $\mathtt{x} = 0$，$\mathtt{y} = 1$ (あるいは，$\mathtt{x} = 1$，$\mathtt{y} = 0$) ととれば，$\mathtt{x} \approx \mathtt{y}$ が偽，つまり，$\neg(\mathtt{x} \approx \mathtt{y})$ は真となる．よって，真となる．

問題 2 (1) $\neg(\mathtt{x} \approx 0)$ と $\mathtt{x} + \mathtt{y} \approx 0$ の両方が真となるような $\mathtt{x}, \mathtt{y}$ があれば真となる．
(a) $\mathtt{x}, \mathtt{y}$ が自然数とすると，$\mathtt{x} + \mathtt{y} \approx 0$ となるためには，$\mathtt{x} = \mathtt{y} = 0$ となるしかないが，そのときは $\neg(\mathtt{x} \approx 0)$ が偽となってしまう．よって，$(\neg(\mathtt{x} \approx 0) \land (\mathtt{x} + \mathtt{y} \approx 0))$ が真となるような自然数 $\mathtt{x}, \mathtt{y}$ は存在しない．よって，偽.
(b) 整数を対象とする場合は，負の数があるので，例えば，$\mathtt{x} = -1$，$\mathtt{y} = 1$ ととれば，$\neg(\mathtt{x} \approx 0)$ も $\mathtt{x} + \mathtt{y} \approx 0$ も真となる．よって，真.
(2) (a) 自然数上では負の数がないので，$x^2 = y^2$ が真ならば，$x = y$ が真となる．すなわち，どのような $\mathtt{x}, \mathtt{y}$ をとっても，$(\mathtt{x} \times \mathtt{x} \approx \mathtt{y} \times \mathtt{y} \to \mathtt{x} \approx \mathtt{y})$ は真．よって，真.
(b) 整数上では，例えば，$\mathtt{x} = -1$，$\mathtt{y} = 1$ ととれば，$x^2 = y^2$ は真となるが，$x = y$ は偽．よって，すべての $\mathtt{x}, \mathtt{y}$ について $(\mathtt{x} \times \mathtt{x} \approx \mathtt{y} \times \mathtt{y} \to \mathtt{x} \approx \mathtt{y})$ が真となるわけではない．よって，偽.

問題 3 集合 $\mathtt{C}$ が空集合であることは $\neg\exists \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{C})$，また，集合 $\mathtt{x} \in \mathtt{A} \cup \mathtt{B}$ は，$(\mathtt{x} \in \mathtt{A}) \lor (\mathtt{x} \in \mathtt{B})$ で表現されることから，$\mathtt{A} \cup \mathtt{B} = \emptyset$ は，

$$\neg\exists \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{A} \lor \mathtt{x} \in \mathtt{B}) \tag{1}$$

と表現される．一方，$\mathtt{A} = \emptyset$ かつ $\mathtt{B} = \emptyset$ は，

$$\neg\exists \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{A}) \land \neg\exists \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{B}) \tag{2}$$

と表現される．述語論理式 (1),(2) は以下の同値変形により論理的に同値:

$$\begin{aligned}
\neg\exists \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{A} \lor \mathtt{x} \in \mathtt{B}) &\cong \neg(\exists \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{A}) \lor \exists \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{B})) && \text{(存在の分配)} \\
&\cong \neg\exists \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{A}) \land \neg\exists \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{B}) && \text{(ド・モルガンの法則)}
\end{aligned}$$

問題 4 (1)

$$\begin{aligned}
\neg\forall \mathtt{x}\,\neg\exists \mathtt{y}\,\mathtt{P}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) &\cong \exists \mathtt{x}\,\neg\neg\exists \mathtt{y}\,\mathtt{P}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) && \text{(ド・モルガンの法則)} \\
&\cong \exists \mathtt{x}\,\exists \mathtt{y}\,\mathtt{P}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) && \text{(二重否定)} \\
&\cong \exists \mathtt{y}\,\exists \mathtt{x}\,\mathtt{P}(\mathtt{x}, \mathtt{y}) && \text{(束縛の交換)}
\end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\neg\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x})) &\cong \exists \mathtt{x}\,\neg(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x})) && (\text{ド・モルガンの法則})\\
&\cong \exists \mathtt{x}\,\neg(\neg\mathtt{P}(\mathtt{x}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{x})) && (\text{含意の法則})\\
&\cong \exists \mathtt{x}\,(\neg\neg\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge \neg\mathtt{Q}(\mathtt{x})) && (\text{ド・モルガンの法則})\\
&\cong \exists \mathtt{x}\,(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \wedge \neg\mathtt{Q}(\mathtt{x})) && (\text{二重否定})
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\exists \mathtt{x}\,(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x})) &\cong \exists \mathtt{x}\,(\neg\mathtt{P}(\mathtt{x}) \vee \mathtt{Q}(\mathtt{x})) && (\text{含意の法則})\\
&\cong \exists \mathtt{x}\,\neg\mathtt{P}(\mathtt{x}) \vee \exists \mathtt{x}\,\mathtt{Q}(\mathtt{x}) && (\text{存在の分配})\\
&\cong \neg\forall \mathtt{x}\,\mathtt{P}(\mathtt{x}) \vee \exists \mathtt{x}\,\mathtt{Q}(\mathtt{x}) && (\text{ド・モルガンの法則})\\
&\cong \forall \mathtt{x}\,\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \exists \mathtt{x}\,\mathtt{Q}(\mathtt{x}) && (\text{含意の法則})
\end{aligned}
$$