2024 年 10 月 18 日

「オートマトンと形式言語」補足資料 (2)

1　NFA の計算に関する補足 (教科書 1.2 節)

例 1 例 1.35 における NFA $N_4 = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \delta, q_1, \{q_1\})$ を考える．$w = \mathtt{aa}$ として，教科書の受理性の定義 (p.62-63) にしたがって，受理されることを示してみよう．

1. $w = \mathtt{aa} = \varepsilon \mathtt{a} \varepsilon \mathtt{a}$ と表わされる．そこで，$y_1 = \varepsilon$, $y_2 = \mathtt{a}$, $y_3 = \varepsilon$, $y_4 = \mathtt{a}$ とおく．
2. $r_0 = q_1$
3. $r_1 = q_2 \in \delta(r_0, y_1) = \delta(q_1, \varepsilon) = \{q_3\}$
4. $r_2 = q_1 \in \delta(r_1, y_2) = \delta(q_2, \mathtt{a}) = \{q_1\}$
5. $r_3 = q_2 \in \delta(r_2, y_3) = \delta(q_1, \varepsilon) = \{q_3\}$
6. $r_4 = q_1 \in \delta(r_3, y_4) = \delta(q_2, \mathtt{a}) = \{q_1\}$
7. $r_4 \in \{q_1\}$

以上より，w は受理される．

2　NFA における受理性についての補足 (教科書 1.2 節)

DFA のときに倣って (補足資料 (1))，$\hat{\delta}$ を用いた NFA の受理性の別定義を紹介する．

定義 2 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を非決定性有限オートマトンとする．

1. $R \subseteq Q$ とするとき，$\mathcal{E}_\delta(R)$ は以下を満たす最小の集合と定義する：
   (1) $R \subseteq \mathcal{E}_\delta(R)$
   (2) 任意の $q \in \mathcal{E}_\delta(R)$ について，$\delta(q, \varepsilon) \subseteq \mathcal{E}_\delta(R)$
   $\mathcal{E}_\delta(R)$ を R の δ による **ε-閉包**とよぶ.
2. このとき，$\hat{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$ を以下のように再帰的に定義する：

$$\hat{\delta}(P, w) = \begin{cases} P & (w = \varepsilon \text{ の場合}) \\ \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(P'), w') & (w = xw',\ x \in \Sigma \text{ の場合}) \\ \qquad \text{ただし，} P' = \bigcup_{q \in P} \delta(q, x) & \end{cases}$$

NFA の遷移関数 δ は，$\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \to \mathcal{P}(Q)$．一方，上で定義した関数 $\hat{\delta}$ は，$\hat{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$ であることに注意.

例 3 図 1.27 の非決定性有限オートマトン $N_1 = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}, \delta, q_1, \{q_4\})$ を考える．このとき，

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\{q_1\}), \mathtt{0101}) &= \hat{\delta}(\{q_1\}, \mathtt{0101}) \\
&= \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\delta(q_1, \mathtt{0})), \mathtt{101}) \\
&= \hat{\delta}(\{q_1\}, \mathtt{101}) \\
&= \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\delta(q_1, \mathtt{1})), \mathtt{01}) \\
&= \hat{\delta}(\{q_1, q_2, q_3\}, \mathtt{01}) \\
&= \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\delta(q_1, \mathtt{0}) \cup \delta(q_2, \mathtt{0}) \cup \delta(q_3, \mathtt{0})), \mathtt{1}) \\
&= \hat{\delta}(\{q_1, q_3\}, \mathtt{1}) \\
&= \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\delta(q_1, \mathtt{1}) \cup \delta(q_3, \mathtt{1})), \varepsilon) \\
&= \hat{\delta}(\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \varepsilon) \\
&= \{q_1, q_2, q_3, q_4\}
\end{aligned}$$

上で定義した関数 $\hat{\delta}$ を用いると，非決定性有限オートマトンの受理する言語は，以下のように定義できる：

定義 4 $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を非決定性有限オートマトンとする．このとき，N の認識する (受理する) 言語 $L(N)$ は，次のように定義される．

$$L(N) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\{q_0\}), w) \cap F \neq \emptyset\}$$

3 NFAとDFAの等価性に関する補足(教科書 定理1.39)

前節で定義した受理性の定義を用いて，NFA と DFA の等価性の詳細な証明を示す．

定理 5 $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を非決定性有限オートマトンとする．このとき，決定性有限オートマトン $M = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ を以下により定義する：

1. $Q' = \mathcal{P}(Q)$,
2. $\delta'(R, x) = \mathcal{E}_\delta(\bigcup_{r \in R} \delta(r, x))$,
3. $q_0' = \mathcal{E}_\delta(\{q_0\})$,
4. $F' = \{R \subseteq Q \mid R \cap F \neq \emptyset\}$.

このとき，$L(N) = L(M)$.

証明. まず，

$$\textbf{性質 (A)} : 任意の\ w \in \Sigma^*, R \subseteq Q\ について，\hat{\delta}(R, w) = \widehat{\delta'}(R, w)$$

を示す．
性質 (A) の証明．文字列 w の長さに関する帰納法で示す．

1. $|w| = 0$ の場合．このとき，$w = \varepsilon$．よって，

$$\hat{\delta}(R, \varepsilon) = R = \widehat{\delta'}(R, \varepsilon)$$

2. $|w| > 0$ の場合．このとき，$w = xw'$ $(x \in \Sigma, w' \in \Sigma^*)$ とおける．よって，

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta'}(R, xw') &= \widehat{\delta'}(\delta'(R, x), w') && (\widehat{\delta'} \text{ の定義より}) \\
&= \hat{\delta}(\delta'(R, x), w') && (\text{帰納法の仮定より}) \\
&= \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\textstyle\bigcup_{r \in R} \delta(r, x)), w') && (\delta' \text{ の定義より}) \\
&= \hat{\delta}(R, xw') && (\hat{\delta} \text{ の定義より})
\end{aligned}$$

(性質 (A) の証明の終わり)

従って，

$$\begin{aligned}
w \in L(M) &\iff \widehat{\delta'}(q_0, w) \in F' && (L(M) \text{ の定義より}) \\
&\iff \widehat{\delta'}(\mathcal{E}_\delta(\{q_0\}), w) \cap F \neq \emptyset && (F' \text{ の定義より}) \\
&\iff \hat{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\{q_0\}), w) \cap F \neq \emptyset && (\text{性質 } A \text{ より}) \\
&\iff w \in L(N) && (L(N) \text{ の定義より})
\end{aligned}$$

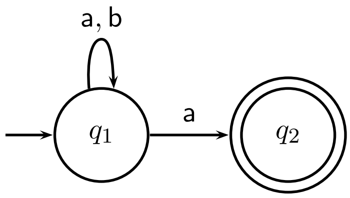
□

4 NFA の構成に関する補足 (1)(教科書 1.2 節)

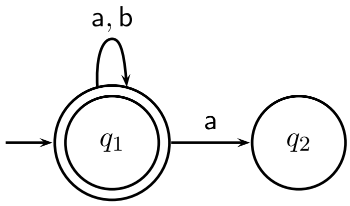
DFA のときに，受理状態を反転 (受理状態を $Q \setminus F$ へ変更) することで，認識する言語が補集合になることを示した (補足資料 (1))．

それとは対照的に，NFA の場合には，受理状態を反転したからといって，認識する言語が補集合になるとは限らない．

例 6 アルファベットを $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ とする．以下の状態遷移図で表わされる NFA N_1 を考えてみる．



このとき，$L(N_1) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ の末尾は } \mathsf{a}\}$ となる．一方，N_1 の受理状態を反転した NFA N_2 は以下のようになる．



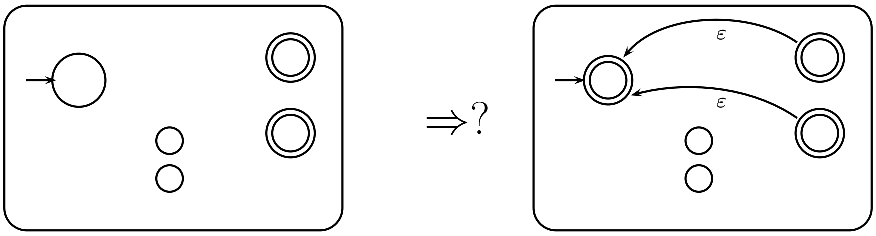
このとき，$L(N_2) = \Sigma^*$．よって，$L(N_2) \neq \Sigma^* \setminus L(N_1)$．

したがって，一般に，与えられた NFA の補集合を認識する有限オートマトンを構成するには，一度，DFA へ変換した後，受理状態を反転することになる．

5　NFAの構成に関する補足(2)(教科書 1.2節)

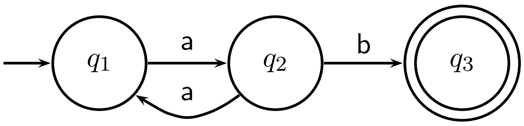
教科書 定理1.49で，Aを認識するNFAから，A^*を認識するNFAの構成法を示している．そこでは，初期状態として，新しい状態を追加して用いているが，もとの初期状態をそのまま使ってはいけないのだろうか．

つまり，次のような構成法である：

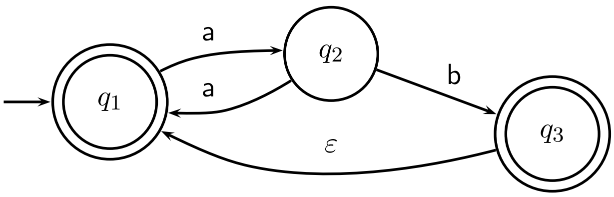


実際，以下のように，この構成では，A^*を受理するNFAにならない場合がある．

例 7 アルファベットを $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$とする．以下の状態遷移図で表わされるNFA N_3を考えてみる．



このとき，$L(N_3) = \{w \in \Sigma^* \mid w$ は末尾が b でその前に奇数個の a がある $\}$となる．一方，N_3を上記の構成法を使って変形したNFA N_4は以下のようになる．



このとき，$\mathsf{aa} \in L(N_4)$となるが，$L(N_3)$の文字列を0回以上繰り返しても，aaは得られない．つまり，$\mathsf{aa} \notin L(N_3)^*$である．

このように，(新しい初期状態の追加が必要ない場合もあるが)，一般的には，教科書のように新しい初期状態を追加する必要がある．