

「オートマトンと形式言語」補足資料(1)

1 文字列に関する補足 (教科書0.2節)

- ε は空文字列を表わしているから、任意の文字列 w について、 $\varepsilon w = w\varepsilon = w$
- ε は文字列の連結に関する単位元なので、以下のように定義する：任意の文字列 w について、 $w^0 = \varepsilon$
- 任意の $k \geq 0$ について、 $\varepsilon^k = \varepsilon$
- Σ を文字集合とする。このとき、 Σ^* は、以下のように定義される文字列の集合：

$$\Sigma^* = \{x_1 \cdots x_k \mid k \geq 0, \text{任意の } 1 \leq i \leq k \text{ について } x_i \in \Sigma\}$$

- 以下の性質が成り立つことにも注意：
 1. $\varepsilon \in \Sigma^*$
 2. $u \in \Sigma^*$ かつ $w \in \Sigma^*$ ならば、 $uw \in \Sigma^*$

2 有限オートマトンの計算に関する補足 (教科書1.1節)

定義 1 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を (決定性) 有限オートマトンとする。このとき、 $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ を以下のように再帰的に定義する：

$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} q & (w = \varepsilon \text{ の場合}) \\ \hat{\delta}(\delta(x, q), w') & (w = xw', x \in \Sigma \text{ の場合}) \end{cases}$$

遷移関数 δ は、 $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ 。一方、上で定義した関数 $\hat{\delta}$ は、 $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ であることに注意。

例 2 例 1.7 の有限オートマトン $M_2 = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_1, \{q_2\})$ を考える。このとき、

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q_1, 101) &= \hat{\delta}(\delta(q_1, 1), 01) \\ &= \hat{\delta}(q_2, 01) \\ &= \hat{\delta}(\delta(q_2, 0), 1) \\ &= \hat{\delta}(q_1, 1) \\ &= \hat{\delta}(\delta(q_1, 1), \varepsilon) \\ &= \hat{\delta}(q_2, \varepsilon) \\ &= q_2 \end{aligned}$$

上で定義した関数 $\hat{\delta}$ を用いると、有限オートマトンの受理する言語は、以下のように定義できる：

定義 3 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を (決定性) 有限オートマトンとする。このとき、 M の認識する (受理する) 言語 $L(M)$ は、次のように定義される。

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$$

3 演算に関する補足 (p.51)

1. $n \geq 1$ を自然数とし, A を集合とするとき, 関数 $f: A^n \rightarrow A$ を A 上の n 項演算という. なお, $n = 1$ のときは, $A^1 = A$ に注意. $n = 1$ のときは単項演算ともいう.
2. f を集合 A 上の n 項演算とし, $B \subseteq A$ とする. 任意の $b_1, \dots, b_n \in B$ について $f(b_1, \dots, b_n) \in B$ となるとき, B は演算 f について閉じている, という.

4 補集合を認識する有限オートマトン (演習 1.5)

以下では, 次の集合演算を用いる.

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

(A が全体集合である場合, $A \setminus B$ は B の補集合を表わす.)

定理 4 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を (決定性) 有限オートマトンとする. このとき, (決定性) 有限オートマトン M' を以下のように定義する:

$$M' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$$

このとき, $\Sigma^* \setminus L(M) = L(M')$.

証明.

$$\begin{aligned} w \in \Sigma^* \setminus L(M) & \\ \iff w \in \Sigma^* \wedge w \notin L(M) & \quad (\setminus \text{の定義より}) \\ \iff w \in \Sigma^* \wedge w \notin \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\} & \quad (L(M) \text{の定義より}) \\ \iff w \in \Sigma^* \wedge \neg(w \in \Sigma^* \wedge \hat{\delta}(q_0, w) \in F) & \quad (\text{内包表記の展開}) \\ \iff w \in \Sigma^* \wedge \neg(\hat{\delta}(q_0, w) \in F) & \quad (\text{論理演算による同値変形}) \\ \iff w \in \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \notin F\} & \quad (\text{内包表記への変形}) \\ \iff w \in \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in Q \setminus F\} & \\ \iff w \in L(M') & \end{aligned}$$

□

5 定理 1.25 に関する補足 (教科書 1.1 節) (1)

定理 5 $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ および $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ を (決定性) 有限オートマトンとする. このとき, (決定性) 有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を以下により定義する:

1. $Q = Q_1 \times Q_2$,
2. $\delta((r_1, r_2), x) = (\delta_1(r_1, x), \delta_2(r_2, x))$,
3. $q_0 = (q_1, q_2)$,

$$4. F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2).$$

このとき, $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$.

証明. まず,

$$\begin{aligned} \text{性質 (A)} : \text{任意の } w \in \Sigma^*, r_1 \in Q_1, r_2 \in Q_2 \text{ について,} \\ (\hat{\delta}_1(r_1, w), \hat{\delta}_2(r_2, w)) = \hat{\delta}((r_1, r_2), w) \end{aligned}$$

を示す.

性質 (A) の証明. 文字列 w の長さに関する帰納法で示す.

1. $|w| = 0$ の場合. このとき, $w = \varepsilon$. よって,

$$(\hat{\delta}_1(r_1, \varepsilon), \hat{\delta}_2(r_2, \varepsilon)) = (r_1, r_2) = \hat{\delta}((r_1, r_2), \varepsilon)$$

2. $|w| > 0$ の場合. このとき, $w = xw'$ ($x \in \Sigma, w' \in \Sigma^*$) とおける. いま, $\delta_1(r_1, x) = r'_1$, $\delta_2(r_2, x) = r'_2$ とおくと, δ の定義から,

$$(r'_1, r'_2) = (\delta_1(r_1, x), \delta_2(r_2, x)) = \delta((r_1, r_2), x) \quad (1)$$

が成立する. よって,

$$\begin{aligned} & (\hat{\delta}_1(r_1, xw'), \hat{\delta}_2(r_2, xw')) \\ &= (\hat{\delta}_1(\delta_1(r_1, x), w'), \hat{\delta}_2(\delta_2(r_2, x), w')) \quad (\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2 \text{ の定義より}) \\ &= (\hat{\delta}_1(r'_1, w'), \hat{\delta}_2(r'_2, w')) \quad (r'_1, r'_2 \text{ の定義より}) \\ &= \hat{\delta}((r'_1, r'_2), w') \quad (\text{帰納法の仮定より}) \\ &= \hat{\delta}(\delta((r_1, r_2), x), w') \quad (\text{等式 (1) より}) \\ &= \hat{\delta}((r_1, r_2), xw') \quad (\hat{\delta} \text{ の定義より}) \end{aligned}$$

(性質 (A) の証明の終わり)

従って,

$$\begin{aligned} w \in L(M_1) \cup L(M_2) \\ \iff w \in L(M_1) \vee w \in L(M_2) \\ \iff w \in \Sigma^* \wedge (\hat{\delta}_1(q_1, w) \in F_1 \vee \hat{\delta}_2(q_2, w) \in F_2) \\ \iff w \in \Sigma^* \wedge (\hat{\delta}_1(q_1, w), \hat{\delta}_2(q_2, w)) \in (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2) \\ \iff w \in \Sigma^* \wedge (\hat{\delta}_1(q_1, w), \hat{\delta}_2(q_2, w)) \in F \quad (F \text{ の定義より}) \\ \iff w \in \Sigma^* \wedge \hat{\delta}((q_1, q_2), w) \in F \quad (\text{性質 (A) より}) \\ \iff w \in \Sigma^* \wedge \hat{\delta}(q_0, w) \in F \quad (q_0 \text{ の定義より}) \\ \iff w \in \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\} \\ \iff w \in L(M) \end{aligned}$$

□

定理 6 $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ および $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ を (決定性) 有限オートマトンとする. このとき, (決定性) 有限オートマトン $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を以下により定義する:

1. $Q = Q_1 \times Q_2$,

$$2. \delta((r_1, r_2), x) = (\delta_1(r_1, x), \delta_2(r_2, x)),$$

$$3. q_0 = (q_1, q_2),$$

$$4. F = F_1 \times F_2.$$

このとき, $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$.

証明. まず, 性質 (A) は定理 5 のときと同様に証明できる. これを使って,

$$\begin{aligned} w \in L(M_1) \cap L(M_2) & \\ \iff w \in L(M_1) \wedge w \in L(M_2) & \\ \iff w \in \Sigma^* \wedge (\hat{\delta}_1(q_1, w) \in F_1 \wedge \hat{\delta}_2(q_2, w) \in F_2) & \\ \iff w \in \Sigma^* \wedge (\hat{\delta}_1(q_1, w), \hat{\delta}_2(q_2, w)) \in F_1 \times F_2 & \\ \iff w \in \Sigma^* \wedge (\hat{\delta}_1(q_1, w), \hat{\delta}_2(q_2, w)) \in F & \\ \iff w \in \Sigma^* \wedge \hat{\delta}((q_1, q_2), w) \in F & \text{(性質 (A) より)} \\ \iff w \in \Sigma^* \wedge \hat{\delta}(q_0, w) \in F & \text{(} q_0 \text{ の定義より)} \\ \iff w \in \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\} & \\ \iff w \in L(M) & \end{aligned}$$

□

6 定理 1.25 に関する補足 (教科書 1.1 節) (2)

前節の定理では, M_1 と M_2 として, シグニチャが同一のものを考えた. 異なるシグニチャをもつ場合はどうなるだろうか.

一般に, $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, F_1)$, $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2, F_2)$ とおくとき, まず $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ととり, $L(M'_1) = L(M_1)$, $L(M'_2) = L(M_2)$ となるような, $M'_1 = (Q'_1, \Sigma, \delta'_1, q'_1, F'_1)$, $M'_2 = (Q'_2, \Sigma, \delta'_2, q'_2, F'_2)$ を構成した後に, 前節の構成を適用すれば, $L(M_1) \cap L(M_2) = L(M'_1) \cap L(M'_2)$ や $L(M_1) \cup L(M_2) = L(M'_1) \cup L(M'_2)$ を認識する (決定性) 有限オートマトンを構成することができる.

このように, 考えるシグニチャを広げて (最初考えていなかった記号でも動くようにして), しかも, 認識する言語を変えないようなことはできるのだろうか. それは以下のようにすればよい.

定理 7 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を (決定性) 有限オートマトンとする. Γ を $\Sigma \subseteq \Gamma$ なるアルファベットとする. このとき, (決定性) 有限オートマトン $M' = (Q', \Gamma, \xi, q_0, F)$ を以下により定義する:

$$1. Q' = Q \cup \{q'\}. \text{ ただし, } q' \notin Q \text{ とする.}$$

2.

$$\xi(r, x) = \begin{cases} \delta(r, x) & (r \in Q \text{ かつ } x \in \Sigma \text{ の場合}) \\ q' & (r \notin Q \text{ または } x \notin \Sigma \text{ の場合}) \end{cases}$$

このとき, $L(M) = L(\hat{M})$.

証明. まず,

性質 (B) : 任意の $w \in \Sigma^*, r \in Q$ について, $\hat{\delta}(r, w) = \hat{\xi}(r, w)$

を示す.

性質 (B) の証明. 文字列 $w \in \Sigma^*$ の長さに関する帰納法で示す.

1. $|w| = 0$ の場合. このとき, $w = \varepsilon$. よって,

$$\hat{\delta}(r, \varepsilon) = r = \hat{\xi}(r, \varepsilon)$$

2. $|w| > 0$ の場合. このとき, $w = xw'$ ($x \in \Sigma, w' \in \Sigma^*$) とおける. いま, $\delta(r, x) = r'$ とおくと, $r' \in Q$ であることに注意する.

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(r, xw') &= \hat{\delta}(\delta(r, x), w') \quad (\hat{\delta} \text{ の定義より}) \\ &= \hat{\xi}(\delta(r, x), w') \quad (w' \in \Sigma^* \text{ と } \delta(r, x) \in Q \text{ より, 帰納法の仮定から}) \\ &= \hat{\xi}(\xi(r, x), w') \quad (r \in Q, x \in \Sigma \text{ より, } \xi \text{ の定義から}) \\ &= \hat{\xi}(r, xw') \quad (\hat{\xi} \text{ の定義より})\end{aligned}$$

(性質 (B) の証明の終わり)

次に,

性質 (B') : 任意の $w \in \Gamma^*$ について, $\hat{\xi}(q', w) = q'$

を示す.

性質 (B') の証明. 文字列 $w \in \Sigma^*$ の長さに関する帰納法で示す.

1. $|w| = 0$ の場合. このとき, $w = \varepsilon$. よって, 定義より, $\hat{\xi}(q', \varepsilon) = q'$ が成立.
2. $|w| > 0$ の場合. このとき, $w = xw'$ ($x \in \Gamma, w' \in \Gamma^*$) とおける.

$$\begin{aligned}\hat{\xi}(q', xw') &= \hat{\xi}(\xi(q', x), w') \quad (\hat{\xi} \text{ の定義より}) \\ &= \hat{\xi}(q', w') \quad (\xi \text{ の定義より}) \\ &= q' \quad (\text{帰納法の仮定より})\end{aligned}$$

(性質 (B') の証明の終わり)

次に,

性質 (B'') : 任意の $w \in \Gamma^* \setminus \Sigma^*$ と $r \in Q'$ について, $\hat{\xi}(r, w) = q'$

を示す.

性質 (B'') の証明. 文字列 $w \in \Sigma^*$ の長さに関する帰納法で示す.

1. $|w| = 0$ の場合. このとき, $w = \varepsilon$. よって, $w \notin \Gamma^* \setminus \Sigma^*$ となるので, 自明に成立する.
2. $|w| > 0$ の場合. このとき, $w = xw'$ ($x \in \Gamma, w' \in \Gamma^*$) とおける. 仮定 $w \notin \Sigma^*$ より, $x \notin \Sigma$ または $w' \notin \Sigma^*$ が成立する.

- $x \notin \Sigma$ の場合

$$\begin{aligned}\hat{\xi}(r, xw') &= \hat{\xi}(\xi(r, x), w') \quad (\hat{\xi} \text{ の定義より}) \\ &= \hat{\xi}(q', w') \quad (x \notin \Sigma \text{ より, } \xi \text{ の定義から}) \\ &= q' \quad (\text{性質 (B')} \text{ より})\end{aligned}$$

- $w' \notin \Sigma^*$ の場合

$$\begin{aligned}\hat{\xi}(r, xw') &= \hat{\xi}(\xi(r, x), w') \quad (\hat{\xi} \text{ の定義より}) \\ &= q' \quad (\text{帰納法の仮定より})\end{aligned}$$

(性質 (B'')) の証明の終わり)

以上の準備を用いて、定理を示す.

$$\text{任意の } w \in \Gamma^* \text{ について, } w \in L(M) \iff w \in L(M')$$

示せばよい. 2通りに場合分けする.

- $w \in \Sigma^*$ の場合

$$\begin{aligned}w \in L(M) &\iff \hat{\delta}(q_0, w) \in F \\ &\iff \hat{\xi}(q_0, w) \in F \quad (w \in \Sigma^*, q_0 \in Q \text{ より, 性質 (B) から}) \\ &\iff w \in L(M')\end{aligned}$$

- $w \notin \Sigma^*$ の場合

このとき, $L(M) \subseteq \Sigma^*$ より, $w \in L(M)$ は成立しない. よって, $w \notin L(M')$ を示せば十分.

いま, $w \in \Gamma^*$ で $w \notin \Sigma^*$ であるから, $w \in \Gamma^* \setminus \Sigma^*$. したがって, 性質 (B'') より, $\hat{\xi}(q_0, w) = q'$. よって, $q' \notin F$ より, $w \notin L(M')$ となる.

□