2022年度 数理論理学

講義資料(5)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

目次

- 自然演繹体系 **(1)** 証明図, $\to$と $\wedge$の規則
- 自然演繹体系 **(2)** $\neg$と $\leftrightarrow$の規則

自然演繹体系

自然演繹体系は **20** 世紀の初頭にゲンツェンにより考案された．自然演繹体系は，より形式的な操作に適したシーケント計算，さまざまな異なる体系を扱うのに適したヒルベルト流の体系とともに，最も一般的な証明体系の **1** つである．

自然演繹体系の重要性

- 自然演繹体系は我々の直観と合致した証明体系 **(**“証明”の構成方法を規定する枠組み**)** であり，その推論方法はそのまま数学の証明に用いることが出来る．
- この先に学ぶ述語論理 **(**$\forall, \exists$ を扱う論理**)** を包括した証明体系となっている．述語論理では，命題論理の推論に加えて新しい推論規則が追加される．

証明図

自然演繹体系では，証明図という図を作ることによって導出を行う．

証明図の例

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathtt{P} \land (\mathtt{P} \to \mathtt{Q})]^1}{\mathtt{P} \to \mathtt{Q}}\,\land\mathrm{E} \qquad \dfrac{[\mathtt{P} \land (\mathtt{P} \to \mathtt{Q})]^1}{\mathtt{P}}\,\land\mathrm{E}}{\mathtt{Q}}\,{\to}\mathrm{E}}{\mathtt{P} \land (\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{Q}}\,{\to}\mathrm{I}^1$$

証明図の結論と仮定

証明図は (根が下，葉が上にある) 木の形.

$$
\begin{array}{ccc}
[\mathtt{P} \land (\mathtt{P} \to \mathtt{Q})]^1 & & [\mathtt{P} \land (\mathtt{P} \to \mathtt{Q})]^1 \\
| & & | \\
\mathtt{P} \to \mathtt{Q} & & \mathtt{P} \\
& \mathtt{Q} & \\
& | & \\
& \mathtt{P} \land (\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{Q} &
\end{array}
$$

証明図の結論

証明図の木の根にある 命題論理式

証明図の仮定

証明図の木の葉にある $[A]$ や $[A]^i$ の部分

推論ステップ

証明図は仮定から始めて，複数の推論ステップを適用して構成される．証明図の横線で示されている**1**つ**1**つが推論ステップ.

$$\dfrac{\dfrac{[\mathtt{P} \wedge (\mathtt{P} \to \mathtt{Q})]}{\mathtt{P} \to \mathtt{Q}}\,\wedge\mathrm{E} \qquad \dfrac{[\mathtt{P} \wedge (\mathtt{P} \to \mathtt{Q})]}{\mathtt{P}}\,\wedge\mathrm{E}}{\mathtt{Q}}\,\to\mathrm{E}$$

- 推論の方向は上から下.
- どのような推論が可能かは推論規則により定められる．
- $\wedge$E や $\to$E は推論規則の識別子.

仮定の除去

　仮定は最初は肩に番号が付いていないが，推論の過程で肩に番号を付ける．

番号が付いている仮定：除去された仮定
番号が付いていない仮定：除去されていない仮定

例．除去された仮定と除去されていない仮定を指摘せよ．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathtt{P} \to \mathtt{P} \to \mathtt{Q}] \quad \dfrac{[\mathtt{S} \to \mathtt{P}] \quad [\mathtt{S}]^1}{\mathtt{P}}\,{\to}\mathrm{E}}{\mathtt{P} \to \mathtt{Q}}\,{\to}\mathrm{E} \qquad \dfrac{[\mathtt{S} \to \mathtt{P}] \quad [\mathtt{S}]^1}{\mathtt{P}}\,{\to}\mathrm{E}}{\mathtt{Q}}\,{\to}\mathrm{E}}{\mathtt{S} \to \mathtt{Q}}\,{\to}\mathrm{I}^1$$

証明図の直観的な意味

定義 5.1. Γを命題論理式の集合，Aを命題論理式とする．任意の$B \in \Gamma$に対して$[\![B]\!]_v = \mathrm{T}$となる付値vについて，$[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$となるとき，$\Gamma \models A$と記す．(特に，$\emptyset \models A$はAがトートロジーであることを意味する．)

Γを証明図の除去されていない仮定の集合，Aを証明図の結論とするとき，証明図は$\Gamma \models A$を意味している．

例.

$$\dfrac{[\mathtt{P} \to \mathtt{Q}] \qquad [\mathtt{P}]}{\mathtt{Q}}\to\mathrm{E} \qquad\qquad \{\mathtt{P} \to \mathtt{Q}, \mathtt{P}\} \models \mathtt{Q}$$

自然演繹体系における導出

定義 5.2. 結論が A ですべての仮定が除去された証明図を A の証明図とよぶ．A の証明図があるとき，A は導出可能 **(**証明可能**)** であるといい．そのような A を定理とよぶ.

A の証明図があること **(**定理であること**)** は，$\emptyset \models A$, つまり，A がトートロジーであることに対応する.

(注意**)**
ただし ,「そうなる」と記しただけで，現段階では，まだ証明をしたわけではない．この対応関係は，健全性や完全性とよばれる性質である.

自然演繹体系の推論規則

命題論理の自然演繹体系には 12 種類の推論規則がある．まず，$\to, \wedge, \vee, \neg, \leftrightarrow$ のそれぞれの命題結合子について，導入規則と除去規則がある．その他に，排中律と背理法という特別な規則がある．

英語で導入は **“introduction”**，除去は **“elimination”** なので，$\to$ の導入規則を $\to$I，$\wedge$ の除去規則を $\wedge$E 等と記す．

推論規則を記述するために，A を結論に持つ証明図を以下のように記す．

$$\begin{array}{c} \vdots \\ A \end{array}$$

$\rightarrow$の導入・除去規則

(1) $\rightarrow$の導入

$$\cfrac{\begin{array}{c}[A]^i\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \rightarrow B}\ {\rightarrow}\mathrm{I}\ ^i$$

(2) $\rightarrow$の除去

$$\cfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A \rightarrow B\end{array}\quad \begin{array}{c}\vdots\\ A\end{array}}{B}\ {\rightarrow}\mathrm{E}$$

推論規則中の$[A]^i$は，推論規則を適用するときに，証明図中に現われる仮定$[A]$を0個以上**(**適当な数だけ**)**除去してよい，ということを意味する．iにはそれまで使っていない自然数を用いる．

証明図の構成例 (1)

1. 証明図はまず仮定から構成する．

$$[\mathtt{P}]$$

は結論が $\mathtt{P}$ の証明図．同様に，

$$[\mathtt{P} \to \mathtt{Q}]$$

は結論が $\mathtt{P} \to \mathtt{Q}$ の証明図となる．

2. この 2 つの証明図から，$\to$ の除去規則を用いると，次の証明図が得られる．

$$\frac{[\mathtt{P} \to \mathtt{Q}] \quad [\mathtt{P}]}{\mathtt{Q}} \to\mathrm{E}$$

3. 次に，$\to$の導入規則を用いて，次の証明図が得られる．

$$\cfrac{\cfrac{[\mathtt{P} \to \mathtt{Q}]^1 \qquad [\mathtt{P}]}{\mathtt{Q}}\to\mathrm{E}}{(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{Q}}\to\mathrm{I}^1$$

4. さらに，$\to$の導入規則を用いて，次のような証明図が得られる．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\mathtt{P} \to \mathtt{Q}]^1 \qquad [\mathtt{P}]^2}{\mathtt{Q}}\to\mathrm{E}}{(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{Q}}\to\mathrm{I}^1}{\mathtt{P} \to (\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{Q}}\to\mathrm{I}^2$$

仮定の除去は，推論前の証明図にあった仮定$[A]$の肩に自然数iを付けることによって行う．また，自然数iには，それ以前に使われていない新しい値を用いる．

各推論規則の直観的な意味

- $\rightarrow$の導入規則は，Aを仮定としてBを示せたならば，(Aを仮定せずに) $A \rightarrow B$を示したことになる，という推論.
- $\rightarrow$の除去規則は，Aと$A \rightarrow B$からBが推論できる，という推論.

演習 5.3. 以下の証明図には **3** つの推論が使われている．どの推論が正しく，どの推論が正しくないか?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathtt{P} \rightarrow \mathtt{Q}]^2 \qquad [\mathtt{Q}]^1}{\mathtt{P}}\rightarrow\mathrm{E}}{\mathtt{Q} \rightarrow \mathtt{P}}\rightarrow\mathrm{I}^1}{(\mathtt{Q} \rightarrow \mathtt{P}) \rightarrow \mathtt{P} \rightarrow \mathtt{Q}}\rightarrow\mathrm{I}^2$$

除去する仮定の数について

除去される仮定は，0個でも複数個でも良い．

演習 5.4. $\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{P}$の証明図である．足りない部分(推論規則の識別子を含む)を補え．

$$\dfrac{\dfrac{[\qquad]}{\mathtt{Q} \to \mathtt{P}} \to \mathrm{I}^1}{\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{P}}$$

演習 5.5. 以下は，$(\mathtt{P} \to \mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{P} \to \mathtt{Q}$の証明図である．足りない部分を補え．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\qquad\qquad\qquad]^2 \quad [\mathtt{P}]^1}{\mathtt{P} \to \mathtt{Q}}\,{\to}\mathrm{E} \qquad [\mathtt{P}]^1}{\mathtt{Q}}}{}}{(\mathtt{P} \to \mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{P} \to \mathtt{Q}}\,{\to}\mathrm{I}^2
$$

除去される仮定が0個のときの$\to$の導入規則は冗長な仮定を付加することに相当し，逆に，除去される仮定が$\mathbf{2}$個以上の$\to$の導入規則は何度も使われている同じ仮定を$\mathbf{1}$つにまとめて，冗長な仮定をなくすことに相当する．

∧の導入・除去規則

(3) ∧の導入

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ A & B\end{matrix}}{A \wedge B}\wedge\mathrm{I}$$

(4) ∧の除去

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A \wedge B\end{matrix}}{A}\wedge\mathrm{E} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A \wedge B\end{matrix}}{B}\wedge\mathrm{E}$$

∧の除去規則は **2** 種類あるが区別しない.

証明図の構成例 (2)

1. 証明図 $[\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}]$ から $\wedge$ の除去規則を使うと，

$$\mathcal{D}_1 \;=\; \frac{[\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}]}{\mathtt{Q}}\,\wedge\mathrm{E}$$

という証明図が作れる．また，同様に

$$\mathcal{D}_2 \;=\; \frac{[\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}]}{\mathtt{P}}\,\wedge\mathrm{E}$$

も作れる．

2. $\mathcal{D}_1$，$\mathcal{D}_2$ に $\land$ の導入規則を使うと，

$$\dfrac{\dfrac{[\mathtt{P} \land \mathtt{Q}]}{\mathtt{Q}}\land\mathrm{E} \qquad \dfrac{[\mathtt{P} \land \mathtt{Q}]}{\mathtt{P}}\land\mathrm{E}}{\mathtt{Q} \land \mathtt{P}}\land\mathrm{I}$$

という証明図が作れる．

3. 最後に，$\rightarrow$ の導入規則を適用して，**(2** 箇所の $[\mathtt{P} \land \mathtt{Q}]$ を除去する**)**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathtt{P} \land \mathtt{Q}]^1}{\mathtt{Q}}\land\mathrm{E} \qquad \dfrac{[\mathtt{P} \land \mathtt{Q}]^1}{\mathtt{P}}\land\mathrm{E}}{\mathtt{Q} \land \mathtt{P}}\land\mathrm{I}}{\mathtt{P} \land \mathtt{Q} \rightarrow \mathtt{Q} \land \mathtt{P}}\rightarrow\mathrm{I}^1$$

定理の証明

命題論理式が定理であることを示すには，その命題論理式を証明図を構成すればよい．このためには，その命題論理式から始めて，下から上へ，適用できる推論規則を探りながら，証明図を書く．

演習 5.6. $(\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{R}) \to \mathtt{P} \land \mathtt{Q} \to \mathtt{R}$ の証明図を与えよ．

1. まず，結論が $(\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{R}) \to \mathtt{P} \land \mathtt{Q} \to \mathtt{R}$ になっているはずなので，証明図の形は

$$\dfrac{\vdots}{(\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{R}) \to \mathtt{P} \land \mathtt{Q} \to \mathtt{R}}$$

となっていることがわかる．

2. 最後に適用できる推論規則が複数あることもあるが，一般的には**1番外側の命題結合子の導入規則を用いるとよい．**

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{R}] \\ \vdots\end{matrix}}{\mathtt{P} \land \mathtt{Q} \to \mathtt{R}}}{(\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{R}) \to \mathtt{P} \land \mathtt{Q} \to \mathtt{R}} \to\mathrm{I}$$

$\to$の導入で $[\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{R}]$という仮定は除去されるので，$\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q} \to \mathtt{R}$を導くのに，$[\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{R}]$という仮定を使ってもよいことがわかる．そこで，証明図の上の方に覚え書きとして，$[\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{R}]$を書いておく **(**証明図完成後には消してよい**)**．書いておいた仮定は，これより上の推論の途中で，何度でも使える **(**使わなくてもよい**)**．また，これより以前に枝分かれした証明図の部分では使えない．

3. 次も同様で，素直に$\to$の導入を選ぶと以下のようになる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{R}] \quad [\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}] \\ \vdots\end{matrix}}{\mathtt{R}}}{\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q} \to \mathtt{R}} \to\mathrm{I}}{(\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{R}) \to \mathtt{P} \wedge \mathtt{Q} \to \mathtt{R}} \to\mathrm{I}$$

4. ここで問題になるのは，どうやって，**2**つの仮定$[\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{R}]$と$[\mathtt{P} \land \mathtt{Q}]$から，$\mathtt{R}$を導くか．

今，$\mathtt{R}$が使われている仮定は$[\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{R}]$だけである，ということから，$\mathtt{R}$を結論とする証明図は以下の形の可能性しかない．

$$\dfrac{\dfrac{[\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{R}] \qquad \dfrac{\vdots}{\mathtt{P}}}{\mathtt{Q} \to \mathtt{R}}\,{\to}\mathrm{E} \qquad \dfrac{\vdots}{\mathtt{Q}}}{\mathtt{R}}\,{\to}\mathrm{E}$$

5. ここで，$\mathtt{P}$や$\mathtt{Q}$が$\wedge$の除去規則によって$\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}$から導かれることに気がつくと次の証明図が得られる．

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{R}]^2 \qquad \cfrac{[\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}]^1}{\mathtt{P}}\,{\wedge}\mathrm{E}}{\mathtt{Q} \to \mathtt{R}}\,{\to}\mathrm{E} \qquad \cfrac{[\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}]^1}{\mathtt{Q}}\,{\wedge}\mathrm{E}}{\cfrac{\mathtt{R}}{\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q} \to \mathtt{R}}\,{\to}\mathrm{I}^1}\,{\to}\mathrm{E}}{(\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{R}) \to \mathtt{P} \wedge \mathtt{Q} \to \mathtt{R}}\,{\to}\mathrm{I}^2
$$

演習 **5.7.**

(1) $\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{P} \wedge \mathtt{P}$の証明図を与えよ．

(2) $(\mathtt{P} \to \mathtt{P} \wedge \mathtt{P}) \wedge (\mathtt{Q} \to \mathtt{P} \to \mathtt{Q})$の証明図を与えよ．

(1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathtt{P}]^2 \qquad [\mathtt{P}]^2}{\mathtt{P} \land \mathtt{P}}\,{\land}\mathrm{I}}{\mathtt{Q} \to \mathtt{P} \land \mathtt{P}}\,{\to}\mathrm{I}^1}{\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{P} \land \mathtt{P}}\,{\to}\mathrm{I}^2$$

除去される仮定はなくてもよい (${[\mathtt{Q}]^1}$). また，除去される仮定が **2** 個以上でもよい (${[\mathtt{P}]^2}$).

(2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathtt{P}]^1 \qquad [\mathtt{P}]^1}{\mathtt{P} \land \mathtt{P}}\,{\land}\mathrm{I}}{\mathtt{P} \to \mathtt{P} \land \mathtt{P}}\,{\to}\mathrm{I}^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[\mathtt{Q}]^3}{\mathtt{P} \to \mathtt{Q}}\,{\to}\mathrm{I}^2}{\mathtt{Q} \to \mathtt{P} \to \mathtt{Q}}\,{\to}\mathrm{I}^3}{(\mathtt{P} \to \mathtt{P} \land \mathtt{P}) \land (\mathtt{Q} \to \mathtt{P} \to \mathtt{Q})}\,{\land}\mathrm{I}$$

仮定は自分の分岐の上にあるものしか使えないことに注意．右の証明図の $[\mathtt{P}]$ が余っているからといって左の証明図で使ってはいけない．

仮定の番号の付け方についての補足

　仮定の番号の付け方に意味はない．番号を上から順につけてもよいし，分岐の上であれば区別がつくので，同じ番号を使っても構わない．例えば，前ページの証明図は，以下のように番号付けして書いても構わない．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathtt{P}]^2 \qquad [\mathtt{P}]^2}{\mathtt{P} \land \mathtt{P}}\land\mathrm{I}}{\mathtt{P} \to \mathtt{P} \land \mathtt{P}}\to\mathrm{I}^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\mathtt{Q}]^2}{\mathtt{P} \to \mathtt{Q}}\to\mathrm{I}^1}{\mathtt{Q} \to \mathtt{P} \to \mathtt{Q}}\to\mathrm{I}^2}{(\mathtt{P} \to \mathtt{P} \land \mathtt{P}) \land (\mathtt{Q} \to \mathtt{P} \to \mathtt{Q})}\land\mathrm{I}$$

証明図の左側と右側で ^{2} を使っているが，**2** つの枝は $[A]^2$ の仮定を除去した後に合流しているので曖昧さはない．

目次

- 自然演繹体系 **(1)** 証明図，$\to$と $\land$の規則
- 自然演繹体系 **(2)** $\neg$と $\leftrightarrow$の規則

¬の導入・除去規則

(5) ¬の導入

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]^i\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg A}\,\neg\mathrm{I}^i$$

(6) ¬の除去

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \neg A\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\\ A\end{array}}{\bot}\,\neg\mathrm{E}$$

しばしば $\bot$ は矛盾と読まれる．つまり，

¬の導入規則: $\neg A$を示すには，Aを仮定して矛盾を導け
¬の除去規則: $\neg A$と Aが同時に言えたなら，矛盾である

とよめばよい．

$\perp$ (常に偽となる命題) がトートロジーとなることはない．なぜ，$\perp$ を導く推論規則が必要なのだろうか?

導出途中の証明図には，まだ除去されていない仮定がある．証明図の結論は，これらの除去されていない仮定から正しい推論によって導かれる結論である．

これらの仮定は，正しい命題とは限らない．また，いくつかの仮定をおいた場合，これらが，一緒に成立できるような場合もある．例えば，$\neg A$と Aを同時に仮定しているかもしれない．このような場合には，正しい推論によって，仮定から矛盾が導かれる．

演習 5.8. $(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \neg\mathtt{Q} \to \neg\mathtt{P}$の証明図を与えよ．

1. 素直に $\to$ の導入で展開していくと,

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{cc}[\mathtt{P} \to \mathtt{Q}] & [\neg\mathtt{Q}] \\ \vdots & \end{array}}{\neg\mathrm{P}}}{\neg\mathtt{Q} \to \neg\mathrm{P}} \to\mathrm{I}}{(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \neg\mathtt{Q} \to \neg\mathrm{P}} \to\mathrm{I}$$

2. ここで，$\neg$P が出てくる論理式が仮定にないので，$\to$ の除去規則では $\neg$P は導けない．そこで，$\neg$ の導入規則が使えないか考える.

$$\cfrac{\cfrac{\begin{array}{ccc}[\mathtt{P}] & [\mathtt{P} \to \mathtt{Q}] & [\neg\mathtt{Q}] \\ & \vdots & \end{array}}{\perp}}{\neg\mathrm{P}} \neg\mathrm{I}$$

3. $[\mathtt{P}], [\mathtt{P} \to \mathtt{Q}], [\neg\mathtt{Q}]$ から $\perp$ を導く 証明図に気がつけば,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\mathtt{Q}]^2 \qquad \dfrac{[\mathtt{P} \to \mathtt{Q}]^3 \qquad [\mathtt{P}]^1}{\mathtt{Q}} \to\mathrm{E}}{\perp} \neg\mathrm{E}}{\neg\mathtt{P}} \neg\mathrm{I}^1}{\neg\mathtt{Q} \to \neg\mathtt{P}} \to\mathrm{I}^2}{(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \neg\mathtt{Q} \to \neg\mathtt{P}} \to\mathrm{I}^3$$

$\to$の推論規則と の関連性

$\neg A$と $A \to \bot$は論理的同値であった.

　$\neg$に関する推論規則において，$\neg A$を $A \to \bot$と置き換えてみると，$\to$に関する推論規則の特殊な場合とみなすことができる:

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]^i\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{A \to \bot}\,\to\mathrm{I}^i \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A \to \bot\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix}}{\bot}\,\to\mathrm{E}$$

従って，$\to$に関する推論を認めるならば，$\neg$に関する推論はごく自然に得られる推論である.

$\leftrightarrow$ の導入・除去規則

(7) $\leftrightarrow$ の導入

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]^i \\ \vdots \\ B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]^i \\ \vdots \\ A\end{matrix}}{A \leftrightarrow B} \leftrightarrow\mathrm{I}^i$$

(8) $\leftrightarrow$ の除去

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A \leftrightarrow B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix}}{B} \leftrightarrow\mathrm{E} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A \leftrightarrow B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ B\end{matrix}}{A} \leftrightarrow\mathrm{E}$$

$\leftrightarrow$ の除去規則は 2 種類あるが区別しない.

$\to, \wedge$ の推論規則との関連性

$A \leftrightarrow B$ と $(A \to B) \wedge (B \to A)$ は論理的同値であった.

$\leftrightarrow$ に関する推論規則において，$A \leftrightarrow B$ を $(A \to B) \wedge (B \to A)$ と置き換えてみると，$\to$ と $\wedge$ に関する推論規則による推論ステップの省略とみなすことができる:

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A]^i \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\to\mathrm{I}^i \qquad \dfrac{\begin{matrix}[B]^i \\ \vdots \\ A\end{matrix}}{B \to A}\to\mathrm{I}^i}{(A \to B) \wedge (B \to A)}\wedge\mathrm{I}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ (A \to B) \wedge (B \to A)\end{matrix}}{A \to B}\wedge\mathrm{E} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix}}{B}\to\mathrm{E}
$$

従って，$\to$ と $\wedge$ に関する推論を認めるならば，$\leftrightarrow$ に関する推論はごく自然に得られる推論である.

まとめ

- 自然演繹法
  証明図，推論規則，導出
  仮定の除去
  導出可能性，定理
- $\to$と $\wedge$に関する導入規則と除去規則
  定理の証明
- $\neg$と $\leftrightarrow$に関する導入規則と除去規則
  $\perp$を矛盾とよむ
  $\to$と $\wedge$に関する規則との関係