2022年度 数理論理学

講義資料(2)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

目次

命題と命題の結合

命題: 正しかったり(真)，正しくなかったり(偽)する言明のこと．さまざまな命題結合子を用いてより複雑な命題を構成することが出来る．

$A \wedge B$ (AとBの論理積)

命題Aと命題Bが共に正しいことを表わす命題

読み方:「AかつB」，「A **and** B」

(記号$\wedge$の代わりに，記号$\&$を使うことも多い)

$A \vee B$ (AとBの論理和)

命題Aと命題Bのどちらかが正しいことを表わす命題

(A, Bの両方が正しい場合も含む)

読み方:「AまたはB」，「A **or** B」

(記号$\vee$の代わりに，記号$|$を使うことも多い)

$A \to B$

命題Aが正しいとき命題Bが正しくなるような命題

読み方:「AならばB」，「A **implies** B」

(記号$\to$の代わりに，記号$\supset$を使うことも多い)

$A \leftrightarrow B$

命題AとBの真偽が等しいことを表わす命題

読み方:「AとBは同値」

「Aであるとき，そのときに限り，B」

「A **iff** B」，「A **if and only if** B」

$\neg A$ **(**Aの否定**)**

命題Aの真偽の反転

読み方:「**not** A」，「Aでない」

(記号$\neg$の代わりに，記号$\tilde{}$を使うことも多い)

演習 **2.1.** レストランについての，以下のような命題を考える．

P**:** 料理がおいしい．

Q**:** 値段が高い．

以下の自然言語による言明を，記号による命題で表わせ．

(1) 料理はおいしいが，値段は高い．

(2) 値段が高いからといって，必ずしも料理がおいしいわけではない．

(3) 値段が高いなら料理はおいしいし，料理がおいしいなら値段は高い．

演習 **2.1.** レストランについての，以下のような命題を考える．

> $\mathtt{P}$**:** 料理がおいしい．
>
> $\mathtt{Q}$**:** 値段が高い．

以下の自然言語による言明を，記号による命題で表わせ．

(1) 料理はおいしいが，値段は高い． $\mathtt{P} \land \mathtt{Q}$

(2) 値段が高いからといって，必ずしも料理がおいしいわけではない． $\neg(\mathtt{Q} \to \mathtt{P})$

(3) 値段が高いなら料理はおいしいし，料理がおいしいなら値段は高い． $(\mathtt{Q} \to \mathtt{P}) \land (\mathtt{P} \to \mathtt{Q})$

真理値と真理値表

真理値

命題が正しい/正しくないと考えるかわりに，命題それぞれが，真(正しい場合)や偽(正しくない場合)という値をもっていると考える

この講義では，真は英語で**true**なのでT，偽は**false**なのでFと記す．(真を1，偽を0と書く流儀もある．真理値は真偽値ともいう．)

真理値表

命題A, Bの真偽が決まったときに，命題$\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$の真偽がどのようになるかを表にしたもの

真理値表

A	$\neg A$
T	F
F	T

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

A	B	$A \to B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

A	B	$A \leftrightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

最初のうちは，$\mathrm{T} \sim 1$，$\mathrm{F} \sim 0$，$\wedge \sim \times$，$\vee \sim +$ と対応付けると覚えやすい．

A, B の両方が真のときも，$A \vee B$ は真.

「または」の自然言語の意味を考えると，不自然に思えるかもしれない．A, B の片方だけが真のときにのみ真となるような「または」は，“排他的論理和”とよばれ区別される．

A が偽のときは，$A \to B$ は真.

$A \to B$ の意味は，自然言語の「ならば」とずいぶん違っているように思えるかもしれない．数学の基礎となっている論理をつきつめるとこのようになっているが，このように定めない論理もいろいろと考えられている．例えば，様相論理や適切さの論理では，自然言語の「ならば」の意味をとりいれるさまざまな試みがなされている．

真理値表をよく眺めてみる

真理値表をみてわかる次のようなことはさまざまな推論の基礎となっている．

$$\neg A \text{が真} \iff A \text{が偽}$$
$$\neg A \text{が偽} \iff A \text{が真}$$

$$A \wedge B \text{が真} \iff A \text{と} B \text{の両方が真}$$

$$A \vee B \text{が偽} \iff A \text{と} B \text{の両方が偽}$$

$$A \to B \text{が偽} \iff A \text{が真かつ} B \text{が偽}$$

$$A \leftrightarrow B \text{が真} \iff A \text{と} B \text{の真理値が同じ}$$

この講義では，$\iff$を，「左辺が成立すれば右辺も成立し，その逆も真」という意味で使う．

真理値の計算 (1)

$C \to D$を A，$D \to C$を Bに対応させることにより，

$C \to D$	$D \to C$	$(C \to D) \wedge (D \to C)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

という表が出来る．このようにして，$A \wedge B$という形の命題の真理値はAと Bの真理値から計算できる．$\neg A$や $A \vee B$, $A \to B$，$A \leftrightarrow B$についても同様.

真理値表を繰り返し使って，より複雑な命題の真理値を計算することが出来る．次に，これを一般的に考察しよう．

例 **2.2.** 以下の命題は，真か偽か？ 式を見てすぐにわかるだろうか？

$$((\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{P}) \to \mathtt{P}$$

このように，一見，真か偽かすぐにはわからないような命題も沢山ある．

そこで，これから紹介するような統一的な方法を知っていると，真理値を簡単に調べることができて有用であろう．

まず，準備として，命題変数そして命題論理式とよばれるものを導入する．

命題論理式

これ以上分解できないような命題を $\mathtt{P}, \mathtt{Q}, \mathtt{R}, \ldots$ 等の変数で表わす．これらを命題変数とよぶ．命題変数から命題結合子を用いて構成した命題を命題論理式とよび，以下のように定義される．

定義 2.3. 命題論理式を次のように帰納的に定義する．

(規則1.) P を命題変数とするとき，P は命題論理式である．

(規則2.) A が命題論理式であるとき，$(\neg A)$ は命題論理式である．

(規則3.) A と B がともに命題論理式であるとき，

$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \to B)$，$(A \leftrightarrow B)$

は，ともに命題論理式である．

命題変数集合を Var，命題論理式集合を Prop と記す．

計算機科学の分野では，帰納的定義に **BNF** をよく用いる．

定義 2.4. 命題変数集合$\mathtt{Var}$および命題論理式集合$\mathtt{Prop}$を以下のように与える：

$$
\begin{aligned}
P \in \mathtt{Var} \quad &::= \quad \mathtt{P} \mid \mathtt{Q} \mid \cdots \\
A, B \in \mathtt{Prop} \quad &::= \quad P \mid (\neg A) \mid (A \wedge B) \mid (A \vee B) \\
&\qquad\qquad \mid (A \to B) \mid (A \leftrightarrow B)
\end{aligned}
$$

なお，命題論理式(命題変数は除く)の最も外側の括弧は，なくても曖昧でないので，省略することにする．

命題論理式の例：

○ $\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}$

○ $(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \to \mathtt{P}$

× $\mathtt{P} \vee \mathtt{Q} \wedge \mathtt{R}$ [括弧づけが曖昧]

真理値の計算 (2)

含まれている命題変数の真理値によって，命題論理式の真理値は決定される．命題変数の真理値に応じて，命題論理式の真理値がどのようになるかは，各々の命題結合子について真理値表を繰り返し適用することにより計算できる．

P	Q	R	$Q \to R$	$P \to (Q \to R)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

前ページ例の計算の仕方

(1) 含まれている命題変数が**3**つなので，$2^3(=8)$行の表を作って，$\mathtt{P},\mathtt{Q},\mathtt{R}$のとり得る真理値のすべての組み合わせを書き入れる．

(2) 次に，$\mathtt{P}\rightarrow(\mathtt{Q}\rightarrow\mathtt{R})$の真理値の計算には$\mathtt{Q}\rightarrow\mathtt{R}$の真理値が必要になるので，$\mathtt{Q}\rightarrow\mathtt{R}$の真理値を計算する．$\mathtt{Q}\rightarrow\mathtt{R}$の真理値は，$\mathtt{Q}$と$\mathtt{R}$の真理値を見て計算する．

(3) 次に，$\mathtt{P}$の真理値と$\mathtt{Q}\rightarrow\mathtt{R}$の真理値を見ながら，$\mathtt{P}\rightarrow(\mathtt{Q}\rightarrow\mathtt{R})$の真理値を計算する．

命題論理式の真理値の計算には，その命題論理式を構成する途中に使われる命題論理式の真理値の値の計算が必要.

演習 2.5.

$(\mathtt{P} \land \mathtt{Q}) \to \mathtt{R}$の真理値表を書いてみよ.

P	Q	R		$(\mathtt{P} \land \mathtt{Q}) \to \mathtt{R}$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

演習 2.5.

$(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \to \mathtt{R}$の真理値表を書いてみよ.

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{R}$	$\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}$	$(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \to \mathtt{R}$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

演習 2.6.
$((\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{P}) \to \mathtt{P}$の真理値表を書いてみよ.

演習 2.6.

$((\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{P}) \to \mathtt{P}$の真理値表を書いてみよ．

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \to \mathtt{Q}$	$(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{P}$	$((\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{P}) \to \mathtt{P}$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

命題変数を$\mathtt{P}$と$\mathtt{Q}$の**2**種類しか使っていないので，真理値表は**4**段で済むことに注意．逆に，使っている命題変数の種類が増えれば，真理値表に必要な行数はどんどん大きくなる．**(**k種類なら2^k行．**)**

真理値表の計算(3)

余計な変数を加えても，真理値表による計算結果は変わらない．冗長な表になるだけ.

P	Q	P ∨ Q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

vs.

R	P	Q	P ∨ Q
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	F

左では，Rの真理値の考慮なし．右では，Rの真理値を考慮して場合分けしているが，結果の真理値は変わらない．

真理値表の計算(4)

以下のような問題は，真理値表を応用することで解ける．

演習 2.7. $(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \vee \mathtt{R}$が偽のとき，$\mathtt{R} \to (\mathtt{P} \to \mathtt{Q})$の真理値は$1$つに定まるか，定まる場合はそれを求めよ．

$\mathbf{2}$つの命題論理式の真理値を，$\mathbf{1}$つの真理値表で計算する．

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{R}$	$\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}$	$(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \vee \mathtt{R}$	$\mathtt{P} \to \mathtt{Q}$	$\mathtt{R} \to (\mathtt{P} \to \mathtt{Q})$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	T	T

真理値表から，$(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \vee \mathtt{R}$が偽のときには，$\mathtt{R} \to (\mathtt{P} \to \mathtt{Q})$はいつも真となることがわかる．

論理パズルも真理値表が助けになることが多い．

演習 2.8. ある島には**2**つの種族が済んでいる．**1**つの種族はいつも真実を話し，もう**1**つの種族はいつも嘘をつく．あなたは，この島にやってきて，「この島に金はあるか」と尋ねた．すると，その島人は，「この島に金があるのは，私が真実をいっているとき，そのときに限る」と答えた．この島に金はあるだろうか?

ヒント：以下のように命題をおく．`P:` 島人の答えは真実である，`Q:` 島には金がある．

以下のように命題をおく．P: 島人の答えは真実である，Q: 島には金がある．

答えた人が，いつも真実をいう種族であれば，P も $P \leftrightarrow Q$ も真であり，いつも嘘をつく種族であれば，P も $P \leftrightarrow Q$ も偽である．

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

どちらの場合も，Q の真理値は真であるから，結局，この島には金があることになる．

目次

- 命題論理式と真理値表
- 命題論理式の括弧の省略
- 命題論理式の特徴付け

命題論理式の括弧の省略

すでに **1** 番外側の括弧を括弧を省略すると約束したが，それ以外にも，慣習に従って以下のように括弧を省略する．

(1) **1** 番外側の括弧，および連続する $\neg$ の間の括弧は省略する．

例．　$(\neg(\neg \mathrm{P}))$ は，$\neg\neg\mathrm{P}$ と書く．

(2) 命題結合子の結合力に基づき括弧を省略する．

命題結合子の結合力:　$\neg \ > \ \wedge, \vee \ > \ \rightarrow, \leftrightarrow$

例．　$\neg \mathrm{P} \wedge \mathrm{R}$ は，$(\neg \mathrm{P}) \wedge \mathrm{R}$ であって $\neg(\mathrm{P} \wedge \mathrm{R})$ でない

$\mathtt{Q} \rightarrow \mathrm{P} \wedge \mathrm{R}$ は，$(\mathtt{Q} \rightarrow \mathrm{P}) \wedge \mathrm{R}$ でなく $\mathtt{Q} \rightarrow (\mathrm{P} \wedge \mathrm{R})$．

(3) $\rightarrow$ は右結合であるとして括弧を省略する.

例. $\mathtt{Q} \rightarrow \mathtt{P} \rightarrow \mathtt{R}$ は, $(\mathtt{Q} \rightarrow \mathtt{P}) \rightarrow \mathtt{R}$ でなく $\mathtt{Q} \rightarrow (\mathtt{P} \rightarrow \mathtt{R})$.

なお, 本講義では, 教育的な配慮から, 一部の括弧を省略しないで書くこともある.

省略できない括弧の例

(1) 結合力が小さい命題結合子が先に結合している場合

$\mathtt{P} \land (\mathtt{R} \to \mathtt{Q})$ や $\neg(\mathtt{P} \land \mathtt{R})$ など

(2) 右結合や左結合が仮定されているが，その逆側に結合している場合

$(\mathtt{P} \to \mathtt{R}) \to \mathtt{Q}$ など

(3) 左結合や右結合が仮定されていない場合

$\mathtt{P} \leftrightarrow (\mathtt{R} \leftrightarrow \mathtt{Q})$ や $(\mathtt{P} \leftrightarrow \mathtt{R}) \leftrightarrow \mathtt{Q}$ や $(\mathtt{P} \land \mathtt{R}) \land \mathtt{Q}$ など

($(\mathtt{P} \land \mathtt{R}) \land \mathtt{Q}$と $\mathtt{P} \land (\mathtt{R} \land \mathtt{Q})$は論理的な意味は同じなので，括弧を省略する場合もある**)**

(4) 結合力が同じ場合で異なる命題結合子の場合

$\mathtt{P} \land (\mathtt{R} \lor \mathtt{Q})$ や $(\mathtt{P} \land \mathtt{R}) \lor \mathtt{Q}$ など

演習 2.9. 以下の命題論理式の括弧が正しく省略されているか考え，括弧の省略が正しい場合は省略されている括弧を全て補いなさい．

(1) $\neg\ \mathtt{P}\ \wedge\ \neg\ \mathtt{R}$

(2) $\mathtt{P}\ \wedge\ \mathtt{R}\ \vee\ \mathtt{P}\ \wedge\ \mathtt{Q}$

(3) $\mathtt{P} \rightarrow \mathtt{R}\ \vee\ \mathtt{P} \rightarrow \mathtt{Q}$

(4) $\mathtt{P}\ \wedge\ \mathtt{R} \leftrightarrow \mathtt{P}\ \wedge\ \mathtt{Q}$

(5) $\neg\ \neg\ \mathtt{P} \rightarrow \mathtt{R}\ \wedge\ \neg\ \neg\ \mathtt{Q}$

(1) $((\neg\ \mathtt{P}) \wedge (\neg\ \mathtt{R}))$

(2) $\mathtt{P} \wedge \mathtt{R} \vee \mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}$ 正しくない

(3) $(\mathtt{P} \to ((\mathtt{R} \vee \mathtt{P}) \to \mathtt{Q}))$

(4) $((\mathtt{P} \wedge \mathtt{R}) \leftrightarrow (\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}))$

(5) $((\neg\ (\neg\ \mathtt{P})) \to (\mathtt{R} \wedge (\neg\ (\neg\ \mathtt{Q}))))$

なお，流儀によっては，**(2)** の場合でも括弧がつくように，命題結合子の結合力に $\wedge > \vee$ や $\vee > \wedge$ を追加する場合もあるが，この講義では採用しない．

目次

- 命題論理式と真理値表
- 命題論理式の括弧の省略
- 命題論理式の特徴付け

命題論理式の特徴付け

以下の **2** つの特徴付け，および，その相互関係を学習する．

- トートロジー
- 充足可能性

トートロジーの真理値表

トートロジー
命題変数がどのような真理値を取る場合にも真となる命題論理式

トートロジー A の真理値表:

P	Q	$\cdots$	R		$\cdots$		A
T	T	$\cdots$	T				T
T	T	$\cdots$	F				T
⋮							
F	F	$\cdots$	F				T

演習 2.10.

$\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q} \to \mathtt{P}$がトートロジーであることを真理値表を用いて確かめよ.

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}$	$(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \to \mathtt{P}$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

演習 2.10.

$\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q} \to \mathtt{P}$がトートロジーであることを真理値表を用いて確かめよ．

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}$	$(\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \to \mathtt{P}$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

重要なトートロジー

よく使われるトートロジーとして，以下を挙げておく．

$\mathtt{P} \to \mathtt{P}$

$\neg \mathtt{P} \lor \mathtt{P}$ **(排中律)**

$\neg\neg \mathtt{P} \leftrightarrow \mathtt{P}$ **(2重否定)**

$(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \leftrightarrow (\neg \mathtt{Q} \to \neg \mathtt{P})$ **(対偶)**

$\neg B \to \neg A$ の形の命題論理式を，命題論理式 $A \to B$ の対偶とよぶ．

充足可能性

充足可能な命題論理式

命題論理式の真理値をとり方によっては，真となる場合のある命題論理式

充足可能な A の真理値表:

P	Q	$\cdots$	R		$\cdots$		A
T	T	$\cdots$	T				
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
		$\cdots$					T
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
F	F	$\cdots$	F				

演習 2.11.

$\mathtt{P} \vee \mathtt{Q} \to \neg\mathtt{P}$が充足可能であることを確かめよ.

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}$	$\neg\mathtt{P}$	$(\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}) \to (\neg\mathtt{P})$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

演習 2.11.

$\mathtt{P} \vee \mathtt{Q} \to \neg\mathtt{P}$ が充足可能であることを確かめよ．

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}$	$\neg\mathtt{P}$	$(\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}) \to (\neg\mathtt{P})$
T	T	T	F	F
T	F	T	F	F
F	T	T	T	T
F	F	F	T	T

注意：充足可能性は，このように真になる場合が **2** つ以上あってもよい．

充足可能性とトートロジーの関係

　充足可能な命題論理式の，真となる真理値の取り方は，1 個以上ならばいくつあってもよい．従って，命題論理式 A がトートロジーならば，A は充足可能．

定理 2.12.

$$A\text{はトートロジー} \Longrightarrow A\text{は充足可能}$$

演習 2.13.

以下を確かめよ．

$$A\text{はトートロジー} \Longleftrightarrow \neg A\text{は充足可能でない}$$
$$A\text{は充足可能} \Longleftrightarrow \neg A\text{はトートロジーでない}$$

(参考) "充足可能でない" の代わりに，"充足不能" という

言葉を使うこともある．

演習 2.14.

以下を確かめよ.

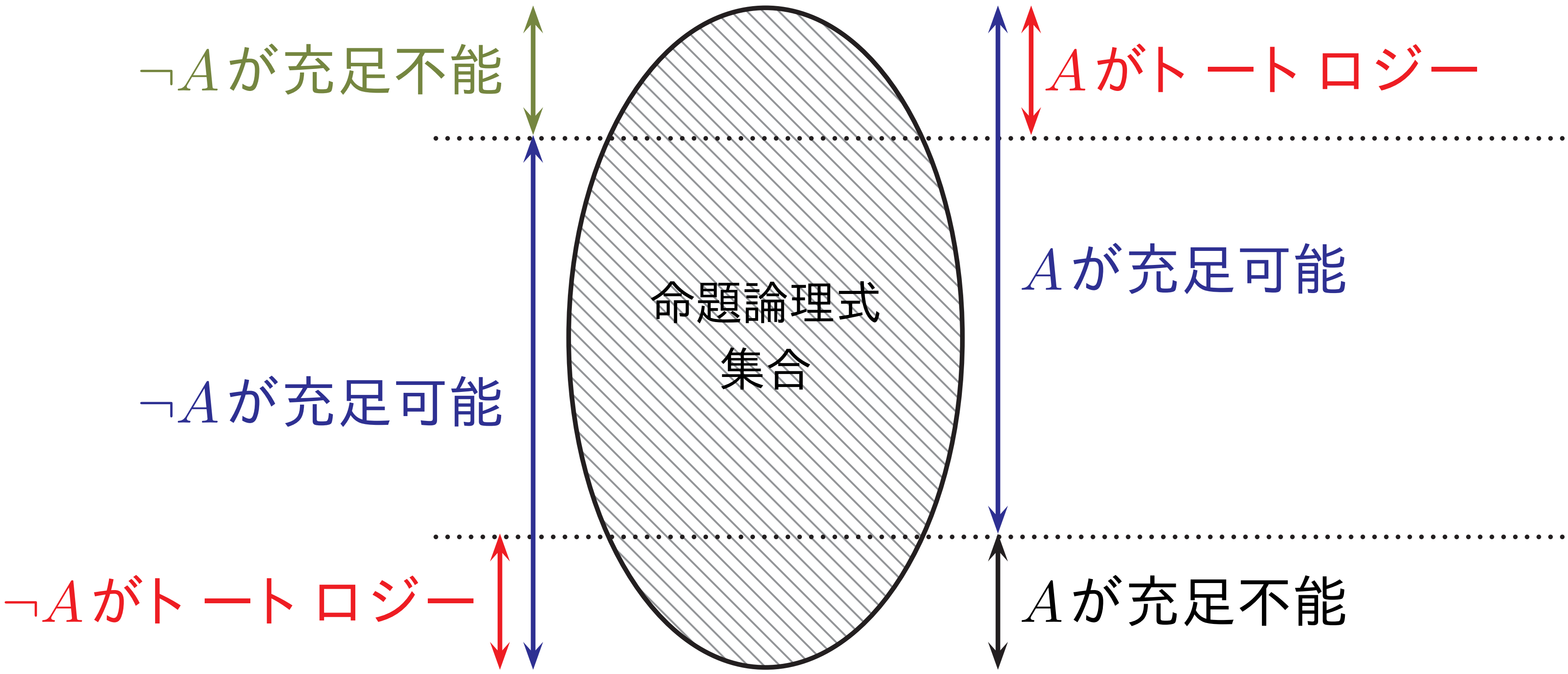
(1) A はトートロジー $\iff \neg A$ は充足可能でない

(2) A は充足可能 $\iff \neg A$ はトートロジーでない

説明: **(1)** A がトートロジー $\iff$ 命題変数のどのような真理値の取り方についても A の真理値は真 $\iff$ 命題変数のどのような真理値の取り方についても $\neg A$ の真理値は偽 $\iff \neg A$ は充足可能でない.

(2) A が充足可能 $\iff$ 命題変数の真理値のある取り方について A の真理値は真 $\iff$ 命題変数の真理値のある取り方について $\neg A$ の真理値は偽 $\iff \neg A$ はトートロジーでない.

命題論理式集合の全体像



まとめ

- 命題結合子 $(\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg)$ と真理値表
- 真理値表を用いた真理値の計算
- 命題論理式の括弧の省略
- トートロジーと充足可能性