

# 2022年度 数理論理学

## 講義資料(14)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

# 目次

- 述語論理の自然演繹体系 (2):  $\exists$ の推論
- 述語論理の自然演繹体系:  $\forall$ と $\exists$ の推論の演習
- 述語論理の自然演繹体系 (3): 等号に関する推論

## 自然演繹体系 (2): $\exists$ の推論

### (13) $\exists$ の導入

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ [x := t](A) \end{array}}{\exists x A} \exists I$$

ここで,  $t$  は任意の項を表す.

### (14) $\exists$ の除去

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \exists x A \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ C \end{array}}{C} \exists E^i}{C} \exists E^i$$

ただし,  $z$  は  $C$ ,  $\exists x A$  に自由に出現しない変数で, 右側の証明図で, 除去される仮定  $[[x := z](A)]$  以外の, 変数  $z$  が自由に出現する仮定は全て除去されているものとする.

## ∃の導入規則の適用例と注意

∃の導入規則の適用例.

$$\frac{\vdots}{\exists x (x \times x \approx 9)} \exists I \qquad \frac{\vdots}{\exists x (x \times 3 \approx 9)} \exists I$$

∀Eの場合(上式の論理式に代入したのが下式)とは逆に, 下式に代入をして上式が得られていることに注意.

(上から下へ考えると) 述語論理式  $A$  の (共通の) 項を変数に置き替えてもよいことになる. このため, 同じ上式であっても,  $\exists I$  規則の適用によって得られる下式は一般に複数ある.

演習 14.1. 以下の $\exists I$ の適用例が正しいかどうか述べてよ.

$$\frac{\frac{P(0, 0)}{\exists y P(0, y)} \exists I}{\exists x \exists y P(x, y)} \exists I$$

$$\frac{\frac{P(x, y)}{\exists y P(x, y)} \exists I}{\exists x \exists y P(x, y)} \exists I$$

$$\frac{P(z, z)}{\exists x P(x, x)} \exists I$$

$$\frac{P(x, y)}{\exists z P(z, z)} \exists I$$

$$\frac{\frac{P(z, z)}{\exists y P(z, y)} \exists I}{\exists x \exists y P(x, y)} \exists I$$

$$\frac{\frac{P(y, y)}{\exists z P(y, z)} \exists I}{\exists x \exists y P(x, y)} \exists I$$

(解答)

$$\frac{\frac{P(0, 0)}{\exists y P(0, y)} \exists I}{\exists x \exists y P(x, y)} \exists I$$

正しい

$$\frac{\frac{P(x, y)}{\exists y P(x, y)} \exists I}{\exists x \exists y P(x, y)} \exists I$$

正しい

$$\frac{P(z, z)}{\exists x P(x, x)} \exists I$$

正しい

$$\frac{P(x, y)}{\exists z P(z, z)} \exists I$$

正しくない

$$\frac{\frac{P(z, z)}{\exists y P(z, y)} \exists I}{\exists x \exists y P(x, y)} \exists I$$

正しい

$$\frac{\frac{P(y, y)}{\exists z P(y, z)} \exists I}{\exists x \exists y P(x, y)} \exists I$$

正しい

## ∃の除去規則の適用例と注意

∃の除去規則の直観的な説明

$\exists x A(x) = A(0) \vee A(1) \vee \dots$ と考えると

$$\frac{\begin{array}{cccc} & [A(0)]^i & [A(1)]^i & \\ & \vdots & \vdots & \\ \exists x A(x) & C & C & \dots \\ \hline & C & & \end{array}}{C}$$

は $\vee$ の除去規則に似ている。

また、このとき、 $C$ は $0, 1, \dots$ によらない論理式になっていることに注意する。

しかし，全ての  $0, 1, \dots$  について証明するわけにはいかないので，全く新しい変数  $z$  で代表させると，

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \exists x A(x) \\ \hline C \end{array}}{\begin{array}{c} \vdots \\ [A(z)]^i \\ \hline C \end{array}}$$

推論規則の条件「変数  $z$  は， $\exists x A(x)$  や  $C$ ，および，右側の証明図内の，(直後に除去される)  $[A(z)]$  以外の除去されていない仮定のなかで，自由変数として表われてはいけな

い」は，変数  $z$  が  $(0, 1, \dots$  を代表して用いられている) 全く新しい変数ということを保証する条件になっている。



証明図の例.

$$\frac{\frac{[\exists x P(x)]^2 \quad \frac{[P(z)]^1}{\exists y P(y)} \exists I}{\exists y P(y)} \exists E^1}{\exists x P(x) \rightarrow \exists y P(y)} \rightarrow I^2$$

$$\frac{\frac{[\exists x P(x, x)]^2 \quad \frac{[P(y, y)]^1}{\exists z P(y, z)} \exists I}{\exists y \exists z P(y, z)} \exists E^1}{\exists x P(x, x) \rightarrow \exists y \exists z P(y, z)} \rightarrow I^2$$

上の証明図の場合,  $[P(z)]^1$  のところは  $[P(y)]^1$  などでもよい.  
 下の証明図の場合,  $[P(y, y)]^1$  のところは,  $[P(x, x)]^1$  などでもよいが, その下の論理式も合わせて変更が必要.

## ∃の除去規則の変数条件

演習 14.2. 以下の証明図の間違いを指摘せよ.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[P(z) \rightarrow Q(z)]^2 \quad [P(z)]^1}{Q(z)} \rightarrow E \\
 \frac{Q(z)}{\exists x Q(x)} \exists I \\
 \frac{[\exists x P(x)]^3 \quad \exists x Q(x)}{\exists x Q(x)} \exists E^1 \\
 \frac{[\exists x (P(x) \rightarrow Q(x))]^4 \quad \exists x Q(x)}{\exists x Q(x)} \exists E^2 \\
 \frac{\exists x Q(x)}{\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)} \rightarrow I^3 \\
 \frac{\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)}{\exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)} \rightarrow I^4
 \end{array}$$

解答：1番上の $\exists E^1$ の推論がおかしい。

1番上の $\exists E^1$ を適用したときを考えると、

$$\frac{\frac{[\exists x P(x)]}{\exists x Q(x)} \quad \frac{\frac{[P(z) \rightarrow Q(z)] \quad [P(z)]^1}{Q(z)} \rightarrow E}{\exists x Q(x)} \exists I}{\exists x Q(x)} \exists E^1$$

変数 $z$ が除去されいない仮定 $[P(z) \rightarrow Q(z)]$ に現われるので  
おかしい。このように、変数条件はその推論規則を適用する  
時点で考えることに注意。

演習 14.3. 以下の証明図の1番下の推論規則の適用について、正しくない理由を次の形で述べよ.

「述語論理式... に変数... が自由に出現するため」

$$\frac{[\exists y P(y)] \quad \frac{[P(z)]^1 \quad [Q(x)]}{P(z) \wedge Q(x)} \wedge I}{P(z) \wedge Q(x)} \exists E^1$$

解答：述語論理式  $P(z) \wedge Q(x)$  に変数  $z$  が自由出現するため.

$\exists E$  の推論では，仮定についてだけでなく，結論として導かれる論理式の部分についても，変数条件があることを忘れずに.

演習 14.4.  $\exists y P(y) \rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$  の省略されている括弧を補え. また，その証明図を書け.

$$\begin{array}{c}
\frac{[P(x)]^1}{P(x) \vee Q(x)} \vee I \\
\frac{[\exists y P(y)]^2 \quad \frac{P(x) \vee Q(x)}{\exists x (P(x) \vee Q(x))} \exists I}{\exists x (P(x) \vee Q(x))} \exists E^1 \\
\frac{\exists x (P(x) \vee Q(x))}{\exists y P(y) \rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))} \rightarrow I^2
\end{array}$$

演習 14.5. 以下は同じ結論を持つ証明図だが間違っている。間違っている理由を述べよ。

$$\begin{array}{c}
\frac{[\exists y P(y)]^2 \quad \frac{[P(x)]^1}{P(x) \vee Q(x)} \vee I}{P(x) \vee Q(x)} \exists E^1 \\
\frac{P(x) \vee Q(x)}{\exists x (P(x) \vee Q(x))} \exists I \\
\frac{\exists x (P(x) \vee Q(x))}{\exists y P(y) \rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))} \rightarrow I^2
\end{array}$$

解答:  $\exists E^1$  の推論で, 述語論理式  $P(x) \vee Q(x)$  に変数  $x$  が自由に出現しているため, 変数条件が満たされていない.

その前の正しい証明図では,  $\exists E^1$  の推論の適用時点ですでに  $\exists I$  の適用されているため,  $P(x) \vee Q(x)$  の部分が  $\exists x (P(x) \vee Q(x))$  となっている. この場合,  $FV(\exists x (P(x) \vee Q(x))) = \emptyset$  であるから, 変数条件が満たされている.

演習 14.6. 以下の述語論理式の証明図を示せ.

(1)  $\exists y (Q \rightarrow P(y)) \rightarrow (Q \rightarrow \exists x P(x))$

(2)  $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$

(1)

$$\frac{\frac{\frac{[\exists y (Q \rightarrow P(y))]^3}{\exists x P(x)} \rightarrow I^2}{Q \rightarrow \exists x P(x)} \rightarrow I^3}{\frac{\frac{[Q \rightarrow P(z)]^1 \quad [Q]^2}{P(z)} \rightarrow E}{\exists x P(x)} \exists I}{\exists x P(x)} \exists E^1} \rightarrow I^3$$

(2)

(2箇所ある z のところは x や他の変数でも可.)

$$\frac{\frac{\frac{[P(z) \wedge Q(z)]^1}{Q(z)} \wedge E}{P(z) \vee Q(z)} \vee I}{\frac{[\exists x (P(x) \wedge Q(x))]^2}{\exists x (P(x) \vee Q(x))} \exists I}{\exists x (P(x) \vee Q(x))} \exists E^1} \rightarrow I^2$$

(5箇所ある z のところは x や他の変数でも可.  $\wedge E$  の結論となっている  $Q(z)$  は  $P(z)$  でもよい.)



# 目次

- 述語論理の自然演繹体系 (2):  $\exists$ の推論
- 述語論理の自然演繹体系:  $\forall$ と $\exists$ の推論の演習
- 述語論理の自然演繹体系 (3): 等号に関する推論

## ∀と∃の推論を使った証明図の演習

演習 14.7. 以下の述語論理式の証明図を示せ.

(1)  $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$

(2)  $\forall x (\forall y R(x, y) \rightarrow \exists y R(x, y))$

(3)  $\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow P(y, x))$

(4)  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$

(1)

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x P(x)]^1}{P(z)} \forall E}{\exists x P(x)} \exists I}{\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)} \rightarrow I^1$$

(zのところはどのような項を使ってもよい.)

(2)

$$\frac{\frac{\frac{[\forall y R(x, y)]^1}{R(x, z)} \forall E}{\exists y R(x, y)} \exists I}{\forall y R(x, y) \rightarrow \exists y R(x, y)} \rightarrow I^1}{\forall x (\forall y R(x, y) \rightarrow \exists y R(x, y))} \forall I$$

(zのところはどのような項を使ってもよい.)

(3)

$$\frac{\frac{\frac{[P(x, x)]^1}{P(x, x) \rightarrow P(x, x)} \rightarrow I^1}{\exists y (P(x, y) \rightarrow P(y, x))} \exists I}{\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow P(y, x))} \forall I$$

(4)

$$\frac{\frac{\frac{[\exists x P(x)]^2}{\exists x Q(x)} \exists E^1}{\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)} \rightarrow I^2}{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)} \rightarrow I^3 \quad \frac{\frac{[\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))]^3}{P(z) \rightarrow Q(z)} \forall E \quad \frac{Q(z)}{\exists x Q(x)} \exists I}{\frac{[P(z)]^1}{P(z) \rightarrow Q(z)} \rightarrow E \quad \exists E^1} \rightarrow E$$

(zのところはxや他の変数でも可.)

# 目次

- 述語論理の自然演繹体系 (2):  $\exists$ の推論
- 述語論理の自然演繹体系:  $\forall$ と $\exists$ の推論の演習
- 述語論理の自然演繹体系 (3): 等号に関する推論

## 自然演繹体系 (3): 等号に関する推論

(15) 反射律

$$\frac{}{\forall x (x \approx x)} \text{REFL}$$

(16) 代入法則

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ s \approx t \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ [x := s](A) \end{array}}{[x := t](A)} \text{SUBST}$$

ここで,  $s, t$  は任意の項を表わす.

代入法則は,  $s \approx t$  が証明されているとき, 任意の述語論理式に含まれる  $s$  の部分を  $t$  に置き替えてよい, という推論になっている. 推論規則の形から,  $t$  に置き替える  $s$  の部分は 1箇所でもよいし, 複数箇所でもよい.

等号に関する推論規則を用いて証明できる述語論理式の例

### 対称律

$$\forall x \forall y (x \approx y \rightarrow y \approx x)$$

### 推移律

$$\forall x \forall y \forall z (x \approx y \wedge y \approx z \rightarrow x \approx z)$$

### 関数記号に関する合同性 ( $f \in F_n$ とする)

$$\begin{aligned} &\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y_1 \cdots \forall y_n \\ &(x_1 \approx y_1 \wedge \cdots \wedge x_n \approx y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \approx f(y_1, \dots, y_n)) \end{aligned}$$

### 述語記号に関する合同性 ( $P \in \mathcal{P}_n$ とする)

$$\begin{aligned} &\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y_1 \cdots \forall y_n \\ &(x_1 \approx y_1 \wedge \cdots \wedge x_n \approx y_n \rightarrow P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n)) \end{aligned}$$

なお、代入法則の代わりに、これらの推論規則全体を、等号に関する推論規則として採用することもできる。

## 对称律

$$\begin{array}{c}
 \overline{\forall x (x \approx x)} \text{ REFL} \\
 \overline{z \approx z} \text{ } \forall E \\
 \frac{[z \approx y]^1 \quad \overline{z \approx z}}{y \approx z} \text{ SUBST} \\
 \frac{y \approx z}{z \approx y \rightarrow y \approx z} \rightarrow I^1 \\
 \frac{z \approx y \rightarrow y \approx z}{\forall y (z \approx y \rightarrow y \approx z)} \forall I \\
 \frac{\forall y (z \approx y \rightarrow y \approx z)}{\forall x \forall y (x \approx y \rightarrow y \approx x)} \forall I
 \end{array}$$

## 推移律

$$\begin{array}{c}
 \frac{[x \approx y \wedge y \approx z]^2}{x \approx y} \wedge E \quad \frac{[x \approx z]^1}{x \approx z \rightarrow x \approx z} \rightarrow I^1 \\
 \frac{\frac{[x \approx y \wedge y \approx z]^2}{x \approx y} \wedge E \quad \frac{[x \approx z]^1}{x \approx z \rightarrow x \approx z} \rightarrow I^1}{y \approx z \rightarrow x \approx z} \text{ SUBST} \quad \frac{[x \approx y \wedge y \approx z]^2}{y \approx z} \wedge E \\
 \frac{y \approx z \rightarrow x \approx z \quad \frac{[x \approx y \wedge y \approx z]^2}{y \approx z} \wedge E}{x \approx z} \rightarrow E \\
 \frac{x \approx z}{x \approx y \wedge y \approx z \rightarrow x \approx z} \rightarrow I^2 \\
 \frac{x \approx y \wedge y \approx z \rightarrow x \approx z}{\forall z (x \approx y \wedge y \approx z \rightarrow x \approx z)} \forall I \\
 \frac{\forall z (x \approx y \wedge y \approx z \rightarrow x \approx z)}{\forall y \forall z (x \approx y \wedge y \approx z \rightarrow x \approx z)} \forall I \\
 \frac{\forall y \forall z (x \approx y \wedge y \approx z \rightarrow x \approx z)}{\forall x \forall y \forall z (x \approx y \wedge y \approx z \rightarrow x \approx z)} \forall I
 \end{array}$$



## 関数記号に関する合同性

$$\begin{array}{c}
 \frac{[x_1 \approx y_1 \wedge \dots \wedge x_n \approx y_n]^1}{x_n \approx y_n} \wedge E \quad \frac{\vdots}{x_{n-1} \approx y_{n-1}} \wedge E \quad \frac{\vdots}{x_1 \approx y_1} \wedge E \quad \frac{\overline{\forall x (x \approx x)} \text{ REFL}}{f(x_1, \dots, x_n) \approx f(x_1, \dots, x_n)} \forall E \\
 \frac{\vdots}{x_n \approx y_n} \wedge E \quad \frac{x_{n-1} \approx y_{n-1}}{f(x_1, \dots, x_n) \approx f(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n)} \text{ SUBST} \quad \frac{\vdots}{f(x_1, \dots, x_n) \approx f(y_1, \dots, y_n)} \text{ SUBST} \\
 \frac{f(x_1, \dots, x_n) \approx f(y_1, \dots, y_n)}{x_1 \approx y_1 \wedge \dots \wedge x_n \approx y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \approx f(y_1, \dots, y_n)} \rightarrow I^1 \\
 \frac{\vdots}{\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \wedge \dots \wedge x_n \approx y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \approx f(y_1, \dots, y_n))} \forall I
 \end{array}$$

## 述語記号に関する合同性

$$\begin{array}{c}
 \frac{[x_1 \approx y_1 \wedge \dots \wedge x_n \approx y_n]^2}{x_n \approx y_n} \wedge E \quad \frac{\vdots}{x_{n-1} \approx y_{n-1}} \wedge E \quad \frac{\vdots}{x_1 \approx y_1} \wedge E \quad \frac{x_1 \approx y_1 \quad [P(x_1, \dots, x_n)]^1}{P(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n)} \text{ SUBST} \\
 \frac{\vdots}{x_n \approx y_n} \wedge E \quad \frac{x_{n-1} \approx y_{n-1}}{P(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n)} \text{ SUBST} \quad \frac{\vdots}{P(y_1, \dots, y_n)} \text{ SUBST} \\
 \frac{P(y_1, \dots, y_n)}{P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n)} \rightarrow I^1 \\
 \frac{P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n)}{x_1 \approx y_1 \wedge \dots \wedge x_n \approx y_n \rightarrow P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n)} \rightarrow I^2 \\
 \frac{\vdots}{\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n (x_1 \approx y_1 \wedge \dots \wedge x_n \approx y_n \rightarrow P(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P(y_1, \dots, y_n))} \forall I
 \end{array}$$

## まとめ

- 述語論理の自然演繹体系
  - ∃の導入規則と除去規則
  - ∃の導入規則における項の置き換え
  - ∃の除去規則における変数条件
  - 等号に関する規則