2022年度 数理論理学

講義資料(10)

青戸 等人 (知能情報システムプログラム)

目次

- 全称と存在
- 述語論理の言語と述語論理式
- 述語論理式の真偽と同値式 **(1)**

対象に関する命題

対象の性質に基づいた命題として **2** 通りの基本的な命題がある．

全称命題

どのような x についても $\varphi(x)$ が正しいことを表わす命題

存在命題

ある x について $\varphi(x)$ が正しいことを表わす命題

すでによく知っている具体例として，トートロジーと充足可能性の定義を思い出そう．トートロジーとは，すべての付値 v について，$[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$ となるような命題論理式 A のことであった．このとき用いられているのは全称命題である．一方，命題論理式 A が充足可能であるとは，ある付値 v について，$[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$ となるときであった．このとき用いられているのは，存在命題である．

述語論理

命題論理の枠組みを広げて，全称命題や存在命題を扱える幅広い推論の枠組みを提供するのが述語論理である．述語論理は，さまざまな応用に用いられる幅広い推論の枠組みを提供する．また，すでに見たように，数学の推論で用いられる論理は述語論理である．

ここからの講義では，述語論理について扱う．より正確には，第一階述語論理とよばれるものについて学習する．

まず，きちんとした述語論理式の定義を与える前に，述語論理において鍵となるいくつかの概念，アイデアについて説明する．

全称命題の表現

$\forall x A$

どのようなxについてもAが正しいことを表わす命題

読み方:「任意のxについてAとなる」,「すべてのxについてAが成立する」など.

$\forall$を全称記号とよび，**forall**とよむ.

Aには，「xは偶数である」，「$x^2 = 1$」といった，xについての命題が通常入る．xが，考えている世界のどの要素であった場合にも，Aという命題が真となることを意味する.

全称命題の例

次のような命題を考えてみよう．

「任意の自然数xは0以上である」

これは，$\forall x A$の形をした，以下のような式で記述される：

$$\forall \mathtt{x} \quad (\mathtt{x} \in \mathbb{N} \to (0 \leq \mathtt{x}))$$

ただし，$\mathbb{N}$は自然数集合を表わすものとする．この命題は，「任意のxについて，xが自然数ならばxは0以上である」といっても同じである．

存在命題の表現

$\exists x\ A$

ある x について A が正しいことを表わす命題

読み方:「 A となる x が存在する」,「 ある x が存在して A となる」など.

$\exists$ を存在記号とよび，**exists** とよむ.

A には，「 x は偶数である」，「 $x^2 = 1$」といった，x についての命題が通常入る．考えている世界のどれかの要素にうまく x を対応させれば，A という命題が真となることを意味する.

存在命題の例

「 ある整数 $\mathtt{x}$ が存在して，$\mathtt{x}$ は0以下となる」

という命題を考えてみよう．これは，$\exists x A$ の形をした，以下のような式で記述される：

$$\exists \mathtt{x}\ (\mathtt{x} \in \mathbb{Z} \land (\mathtt{x} \leq 0))$$

ただし，$\mathbb{Z}$ は整数集合を表わすものとする．これは，

「 0以下となる整数 $\mathtt{x}$ が存在する．」

「 ある $\mathtt{x}$ が存在して，$\mathtt{x}$ は整数かつ x は0以下となる．」

「 ある $\mathtt{x}$ が存在して，$\mathtt{x}$ は0以下の整数となる．」

等のようにいっても同じである．

対象を表わす方法

「ある整数 x が存在して，x^2 は 7 以上となる」

のような命題を考える．$(-)^2$ のように，対象について，何らかの操作がされている記述を用いたい．この命題は，例えば，以下のように記述される：

$$\exists \mathrm{x}\ (\mathrm{x} \in \mathbb{Z} \wedge (\mathrm{exp}(\mathrm{x}, 2) \geq 7))$$

ここで，$\mathrm{exp}(\mathrm{x}, 2)$ は，x^2 **(**x の **2** 乗**)** を表わすための表現．より一般的に，演算を施された対象を表わすために，$f(t_1, \ldots, t_n)$ の形をした表現を考える．このような表現を項とよび，f を関数記号とよぶ．**(**関数記号と関数との違いに注意．**)**

対象の性質を表わす方法

前ページで示した式

$$\exists \mathrm{x}\ (\mathrm{x} \in \mathbb{Z} \wedge (\mathrm{exp}(\mathrm{x}, 2) \geq 7))$$

を考えよう．

この表現で，$\mathrm{x} \in \mathbb{Z}$や$\mathrm{exp}(\mathrm{x}, 2) \geq 7$は，命題論理式では命題変数にあたる箇所に記述されている．

$\mathrm{x} \in \mathbb{Z}$や$\mathrm{exp}(\mathrm{x}, 2) \leq 0$のような対象間の関係や対象の性質を表わすために，より一般的に，$P(t_1, \ldots, t_n)$の形をした表現を考える．ここで，$t_1, \ldots, t_n$は項であり，Pを述語記号とよぶ．**(**つまり，$\mathrm{x} \in \mathbb{Z}$や$\mathrm{exp}(\mathrm{x}, 2) \leq 0$は，$\in(\mathrm{x}, \mathbb{Z})$や$\leq(\mathrm{exp}(\mathrm{x}, 2), 0)$の略記と考えるわけである．**)**

目次

- 全称と存在
- 述語論理の言語と述語論理式
- 述語論理式の真偽と同値式 (1)

述語論理の言語

述語論理で用いる記号は以下の通り．命題論理のときと較べると，命題変数がなくなり，(個体)変数，関数記号，述語記号，等号，量化記号が新たに加わる．

(個体)変数: $\mathtt{x}_0, \mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \ldots$
関数記号: $\mathtt{f}_0, \mathtt{f}_1, \mathtt{f}_2, \ldots$ (対象となる理論により変わる)
述語記号: $\mathtt{P}_0, \mathtt{P}_1, \mathtt{P}_2, \ldots$ (対象となる理論により変わる)
等号: $\approx$
命題結合子: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \perp, \top$
量化記号: $\forall, \exists$
その他: $($, $)$, $,$

説明のための(メタ論理の)等号 $=$ と区別するために，この講義では対象論理の等号として $\approx$ を用いる．

述語論理の言語の例**1**:

(個体)変数: $\mathtt{x}_0, \mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \ldots$

関数記号: $+, -, 0$

述語記号: $\leq, <, \geq, >$

$\ldots$

述語論理の言語の例**2**:

(個体)変数: $\mathtt{x}_0, \mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \ldots$

関数記号: $\emptyset, \cup, \cap, \setminus$

述語記号: $\in, \subset, \subseteq$

$\ldots$

用いる関数記号および述語記号は用いる理論(公理の集合)によって変わる．用いる関数記号および述語記号のことをその理論のシグニチャという．(固体)変数全体の集合を V と記す.

関数記号と述語記号

関数記号と述語記号のそれぞれにはアリティとよばれる自然数が付随している．アリティはその記号がいくつ引数をとるかを表わす．関数記号 f や述語記号 P のアリティを $\mathrm{arity}(f)$ や $\mathrm{arity}(P)$ と記す．

関数記号の集合を表わすのに，$F, G, \ldots$ を用いる．$F = \{f_1, f_2, \ldots\}$ で，関数記号 $f_1, f_2, \ldots$ がそれぞれアリティ $n_1, n_2, \ldots$ をもつとき，$F = \{f_1^{n_1}, f_2^{n_2}, \ldots\}$ と記す．また，$F_n = \{f \in F \mid \mathrm{arity}(f) = n\}$ とおく．アリティ 0 の関数記号を(個体)定数とよぶ．

例．$F = \{+, -, \mathsf{0}\}$，$\mathrm{arity}(+) = 2$，$\mathrm{arity}(-) = 1$，$\mathrm{arity}(\mathsf{0}) = 0$とすると，$F = \{+^2, -^1, \mathsf{0}^0\}$と書ける．また，$F_0 = \{\mathsf{0}\}$，$F_1 = \{-\}$，$F_2 = \{+\}$，$F_n = \emptyset$ **(**$n \geq 3$**)**．$\mathsf{0}$は定数.

同様に，述語記号の集合には$\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \ldots$を用いる．述語記号$P_1, P_2, \ldots$がそれぞれアリティ$n_1, n_2, \ldots$をもつとき，$\mathcal{P} = \{P_1^{n_1}, P_2^{n_2}, \ldots\}$と記し，$\mathcal{P}_n = \{P \in \mathcal{P} \mid \mathrm{arity}(P) = n\}$とおく．アリティ$0$の述語記号を**(述語) 定数**とよぶ.

例．$\mathcal{P} = \{\leq^2, <^2\}$.

項

等号や述語は対象の間に成立する関係である．この対象を表わす記号列を項という．

定義 10.1. 項を以下のように帰納的に定義する．

(1) 変数は項である．

(2) **(**固体**)** 定数は項である．

(3) f をアリティ n**(**$n \geq 1$**)** の関数記号，$t_1, \ldots, t_n$ を項とするとき，$f(t_1, \ldots, t_n)$ は項である．

例．関数記号集合を $F = \{+^2, -^1, 0^0\}$ とおく．

(a) 変数 $\mathtt{x}_0, \mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \ldots$ は規則 **(1)** より項.

(b) 定数 $\mathtt{0}$ は規則 **(2)** より項.

(c) $\mathrm{arity}(-) = 1$ なので，$-(\mathtt{x}_1)$ や $-(\mathtt{0})$ は，**(a)**,**(b)** と規則 **(3)** より項.

(d) 同様にして **(c)** と規則 **(3)** より，$-(-(\mathtt{x}_1))$ や $-(-(\mathtt{0}))$ は項.

(e) $\mathrm{arity}(+) = 2$ なので，**(a)**,**(b)** と規則 **(3)** より，$+(\mathtt{0}, \mathtt{x}_1)$ は項.

(f) 同様にして **(d)**,**(e)** と規則 **(3)** より，$+(-(-(\mathtt{0})), +(\mathtt{0}, \mathtt{x}_1))$ は項.

項

前出の項の定義の **(2)** と **(3)** は，よく一緒にされる．

定義 10.2. 項を以下のように帰納的に定義する．

(1) 変数は項である．

(2') f をアリティ $n(n \geq 0)$ の関数記号，$t_1, \ldots, t_n$ を項とするとき，$f(t_1, \ldots, t_n)$ は項である．

この条件 **(2')** で $n = 0$ の場合は，前の定義の **(2)** と考える．本講義では，慣習に従って，項の定義として上の定義 **10.2** を用いる．

例 **(再掲)**．関数記号集合を $F = \{+^2, -^1, 0^0\}$ とおく．

(a) 変数 $\mathtt{x}_0, \mathtt{x}_1, \mathtt{x}_2, \ldots$ は規則 **(1)** より項.

(b) $\mathrm{arity}(0) = 0$ なので，0 は規則 **(2')** より項.

(c) $\mathrm{arity}(-) = 1$ なので，$-(\mathtt{x}_1)$ や $-(0)$ は，**(a),(b)** と規則 **(2')** より項.

(d) 同様にして **(c)** と規則 **(2')** より，$-(-(\mathtt{x}_1))$ や $-(-(0))$ は項.

(e) $\mathrm{arity}(+) = 2$ なので，**(a),(b)** と規則 **(2')** より，$+(0, \mathtt{x}_1)$ は項.

(f) 同様にして **(d),(e)** と規則 **(2')** より，$+(-(-(0)), +(0, \mathtt{x}_1))$ は項.

見やすさのため，以降では，**(固体)** 変数として $\mathtt{x}, \mathtt{y}, \ldots$ 等も用いる．

項の中置記法による記述や括弧の省略

アリティ2の関数記号については，**中置記法**を用いて，$s+t$や$s\times t$などと記すことがよくある．また，アリティ1の関数記号については**括弧を省略**して，$-s$などと記すことがよくある．

例．$+(0, \mathrm{x})$を中置記法を用いて書くと，$0+\mathrm{x}$．また，$-(0)$の括弧を省略すると，-0．

例．$-(+(-(0), +(0, \mathrm{x})))$は，$-((-0)+(0+\mathrm{x}))$．

結合の曖昧さをなくすために，括弧が省略できなかったり，また，新たな括弧が必要になる場合があることに注意．

原子論理式

まず，述語論理式の基本となる原子論理式について説明し，その後，一般の述語論理式について説明する．

定義 10.3. 原子論理式を以下のように定義する．

(1) Pがアリティ nの述語記号で，$t_1, \ldots, t_n$が項であるとき，$P(t_1, \ldots, t_n)$は原子論理式である (特に，$n = 0$の場合，Pと書く．)

(2) s, tが項であるとき，$(s \approx t)$は原子論理式である．

特に，シグニチャを明示する場合には，シグニチャL上の原子論理式という言い方をすることがある．

例. シグニチャを $\langle\{\mathtt{0}^0, -^1, +^2\}, \{\mathtt{C}^0, \mathtt{P}^1, \mathtt{Q}^2, \mathtt{R}^3\}\rangle$ とおく.

(1) $\mathtt{C}$ は原子論理式.

(2) $\mathtt{P}(\mathrm{x}+\mathrm{y})$ は原子論理式.

(3) $\mathtt{Q}(-\mathrm{x}, \mathrm{x}+\mathrm{y})$ は原子論理式.

(4) $\mathtt{R}(\mathrm{x}, -\mathrm{y}, \mathrm{x}+\mathrm{z})$ は原子論理式.

(5) $(-\mathrm{x}) \approx (\mathrm{y}+(-\mathrm{z}))$ は原子論理式.

原子論理式でない例.

- $\mathtt{P}(\mathtt{P}(\mathrm{x}))$ は原子論理式でない: 述語記号の引数は項.
- $\mathtt{Q}(\mathrm{x})$ や $\mathtt{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ は原子論理式でない: 述語記号の引数の個数はその述語記号のアリティと等しい.

述語論理式

定義 10.4.　述語論理式を以下のように帰納的に定義する．

(1) Pがアリティ nの述語記号で，$t_1, \ldots, t_n$が項であるとき，$P(t_1, \ldots, t_n)$は述語論理式である (特に，$n = 0$の場合，Pと書く．)

(2) s, tが項であるとき，$(s \approx t)$は述語論理式である．

(3) $\perp$および$\top$は述語論理式である．

(4) Aが述語論理式であるとき，$(\neg A)$は述語論理式である．

(5)　Aと Bがともに述語論理式であるとき，$(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$は，ともに述語論理式である．

(6) xが変数でAが述語論理式であるとき，$(\forall x A)$, $(\exists x A)$は，ともに述語論理式である．

関数記号と同様，アリティ 2 の述語記号については，中置記法を用いることがある．

例．関数記号集合を $F = \{+^2, -^1, 0^0\}$，述語記号集合を $\mathcal{P} = \{\leq^2, <^2\}$ とおく．

(a) x, 0 は項で，$\leq$ はアリティ 2 の述語記号なので，規則 **(1)** より $\leq (\mathrm{x}, 0)$ は述語論理式．これは，中置記法を用いて書くと，$(\mathrm{x} \leq 0)$.

(b) $\mathrm{x} + \mathrm{y}$, 0 は項なので，規則 **(2)** より $((\mathrm{x} + \mathrm{y}) \approx 0)$ は述語論理式.

(c) 規則 **(5)** より $((\mathrm{x} \leq 0) \wedge ((\mathrm{x} + \mathrm{y}) \approx 0))$ は述語論理式.

(d) 規則 **(6)** より $(\exists \mathrm{x}\ ((\mathrm{x} \leq 0) \wedge ((\mathrm{x} + \mathrm{y}) \approx 0)))$ は述語論理式.

(e) 規則 **(6)** より $(\forall \mathrm{y}\ (\exists \mathrm{x}\ (\mathrm{x} \leq 0) \wedge ((\mathrm{x} + \mathrm{y}) \approx 0)))$ は述語論理式.

述語論理式の括弧の省略

(1) 論理結合子および量化記号の結合力に基づく 省略

$$\neg, \forall x, \exists x \quad > \quad \wedge, \vee \quad > \quad \rightarrow, \leftrightarrow$$

(2) その他，定義から 括弧の付け方が **1** 通りに定まる 場合や命題論理で用いた省略法はそのまま 踏襲する．

例．$\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x} \approx 0) \wedge (\mathrm{y} \approx 0)$ は $(\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x} \approx 0)) \wedge (\mathrm{y} \approx 0)$ か，あるいは，$\forall \mathrm{x}\,((\mathrm{x} \approx 0) \wedge (\mathrm{y} \approx 0))$ か？

例．述語記号集合を $\mathcal{P} = \{\mathrm{R}^2\}$ として，2項関係 R の性質を述語論理式で記述する：

(1) R が反射的

$$\forall \mathrm{x}\, \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{x})$$

(2) R が非反射的

$$\forall \mathrm{x}\, \neg \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{x})$$

(3) R が対称的

$$\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \to \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{x}))$$

(4) R が推移的

$$\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \forall \mathrm{z}\, (\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \wedge \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \to \mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{z}))$$

(5) R が反対称的

$$\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{R}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \wedge \mathrm{R}(\mathrm{y}, \mathrm{x}) \to \mathrm{x} \approx \mathrm{y})$$

例．関数記号集合を $F = \{\mathtt{A}^0, \mathtt{B}^0, \mathtt{C}^0\}$ 述語記号集合を $\mathcal{P} = \{\in^2\}$として，集合に関する性質を述語論理式で記述する：

(1) $\mathtt{A} \subseteq \mathtt{B}$ **(**$\mathtt{A}$は$\mathtt{B}$の部分集合**)**

$$\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{A} \to \mathtt{x} \in \mathtt{B})$$

(2) $\mathtt{A} = \emptyset$ **(**$\mathtt{A}$は空集合**)**

$$\neg\exists \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{A})$$

(3) $\mathtt{A} = \mathtt{B}$

$$\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{A} \leftrightarrow \mathtt{x} \in \mathtt{B})$$

(4) $\mathtt{A} = \mathtt{B} \cap \mathtt{C}$

$$\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{A} \leftrightarrow \mathtt{x} \in \mathtt{B} \wedge \mathtt{x} \in \mathtt{C})$$

(5) $\mathtt{A} = \mathtt{B} \cup \mathtt{C}$

$$\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{A} \leftrightarrow \mathtt{x} \in \mathtt{B} \vee \mathtt{x} \in \mathtt{C})$$

(6) $\mathtt{A} = \overline{\mathtt{B}}$ **(**$\mathtt{A}$は$\mathtt{B}$の補集合**)**

$$\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{A} \leftrightarrow \neg(\mathtt{x} \in \mathtt{B}))$$

例．関数記号集合を $F = \{\mathrm{f}^1, \mathrm{g}^1\}$ として，関数に関する性質を述語論理式で記述する：

(1) $\mathtt{f}$ は単射 **(**異なる要素が同じ要素に行くことはない**)**

$$\forall \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,(\neg(\mathrm{x} \approx \mathrm{y}) \to \neg(\mathrm{f}(\mathrm{x}) \approx \mathrm{f}(\mathrm{y})))$$

(これは $\forall \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{f}(\mathrm{x}) \approx \mathrm{f}(\mathrm{y}) \to \mathrm{x} \approx \mathrm{y})$ と論理的同値．**)**

(2) $\mathtt{f}$ は全射 **(**どの要素も何かから移された先になっている**)**

$$\forall \mathrm{x}\,\exists \mathrm{y}\,(\mathrm{x} \approx \mathrm{f}(\mathrm{y}))$$

(3) $\mathtt{f}$ は $\mathtt{g}$ の逆写像

$$\forall \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,(\mathrm{f}(\mathrm{x}) \approx \mathrm{y} \leftrightarrow \mathrm{g}(\mathrm{y}) \approx \mathrm{x})$$

目次

ここから，述語論理式の真偽を議論していこう．また，基本的な同値式についても紹介していく．

述語論理式の真偽の議論は，命題論理式の解釈の真偽に対応し，また，述語論理式の論理的同値性は命題論理式のそれと対応する．

命題論理式と同様，述語論理式の真偽や論理的同値性は，述語論理の意味論においてきちんと定義されるが，その紹介は述語論理の構文論を紹介した後に行う．

ここでの目標は，具体例や直観的な説明を通じて，述語論理式の意味の捉え方を理解することであり，重要な同値式について，その正しさを直観的に理解することである．

全称・存在命題の真偽の例

例．対象となる世界を自然数全体$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$として考える．

(1) $\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x} \geq 0)$は真．

これは，xとして$0, 1, 2, \ldots$，のどれをとっても$\mathrm{x} \geq 0$が成立する，という意味となり，正しい．

(2) $\forall \mathrm{x}\,(\mathrm{x} \leq 10 \vee 4 \leq \mathrm{x})$は真

(1)と同様に，xとして$0, 1, 2, \ldots$，のどれをとっても$\mathrm{x} \leq 10 \vee 4 \leq \mathrm{x}$が成立する，という意味となる．$\mathrm{x} \leq 10 \vee 4 \leq \mathrm{x}$は，$\mathrm{x} \leq 10$か$4 \leq \mathrm{x}$のどちらか(両方でもよい)が成立していれば真であるから，成立する．

(3) $\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} + \mathrm{y} \approx \mathrm{y} + \mathrm{x})$は真.

これは，xとして$0, 1, 2, \ldots$，yとして$0, 1, 2, \ldots$，のどれをとっても，等式$\mathrm{x} + \mathrm{y} \approx \mathrm{y} + \mathrm{x}$が成立している，ということ．($\approx$は対象としている論理の枠組みでは等号であることに注意．) $0 + 0 \approx 0 + 0$も$0 + 1 \approx 1 + 0$も$1 + 0 \approx 1 + 0$, $0 + 2 \approx 2 + 0$も$1 + 1 \approx 1 + 1$も,... 成立する，ということ．

(4) $\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, (\mathrm{x} < \mathrm{x} + \mathrm{y})$は偽.

偽になるのは，真にならない場合である．つまり，うまくxやyをとって$\mathrm{x} < \mathrm{x} + \mathrm{y}$が成立しないとき，偽になる．この場合，$\mathrm{x} = 0$，$\mathrm{y} = 0$ととると，$\mathrm{x} < \mathrm{x} + \mathrm{y}$は成立しないから，偽となることがわかる．

(5) $\forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \neg(\mathrm{x} \approx \mathrm{y})$は偽.

xやyに，同じ値をとってもよい．つまり，この式は偽となる.

(6) $\exists \mathrm{x}\, (\mathrm{x} \times 9 < 4)$は真.

なぜなら，$\mathrm{x} = 0$と取ればよい.

(7) $\exists \mathrm{x}\, (\mathrm{x} < 0)$は偽

もちろん，0より小さい自然数は存在しない.

(8) $\exists \mathrm{x}\, \exists \mathrm{y}\, (\mathrm{x} + \mathrm{y} \approx 5)$は真.

なぜなら，例えば，$\mathrm{x} = 2$，$\mathrm{y} = 3$と取ればよい．$\mathrm{x} = 1$，$\mathrm{y} = 4$など，他の取り方があっても良いことに注意.

真偽を考える上での，対象となる世界とは

述語論理式の真偽は，変数の取り得る値によって変わり，変数の取り得る値は，どの世界を対象とするかによって変わる．もう少し一般的に考えると，変数の取り得る値が違うということは，演算(関数記号)や関係(述語記号)の意味も，どの世界を対象とするかによって変わってしまう，ということである．

このように，対象となる世界(および，関数記号や述語記号がその世界でどのような意味をもつか)を，固定したときに定まる真偽を，述語論理式の解釈とよぶ．

命題論理のときに，付値に基づいて，命題論理の解釈が定まったことを思い出そう．実は，述語論理における“付値”に対応するものが，“対象となる世界”である．

以下に，命題論理式の解釈と述語論理式の解釈における言葉の対応を示す．

命題論理	述語論理
真 (T)	真 (T)
偽 (F)	偽 (F)
付値 v	対象となる世界 (L-構造) $\mathcal{M}$
解釈 $[\![A]\!]_v$	解釈 $[\![A]\!]_{\mathcal{M}}$
トートロジー	恒真
論理的同値 ($\cong$)	論理的同値 ($\cong$)

対象となる世界をどのようにとっても解釈が真となる述語論理式は恒真とよばれる．また，どのような世界を対象としていても同値変形が正しくなるのが，論理的同値性ということになる．正確な定義は述語論理の意味論に譲る．

述語論理式の同値変形

命題論理式の場合と同様，以下の定理が成立する．

定理 10.5. 論理的同値性は述語論理式上の合同関係である．つまり，$A \cong B$ならば，$\neg A \cong \neg B$，$Qx\,A \cong Qx\,B$ $(Q \in \{\forall, \exists\})$が成立し，$A \cong B$かつ$C \cong D$ならば，$A \circ C \cong B \circ D$ $(\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\})$が成立する．

従って，命題論理式の場合と同様にして，同値変形を行うことが可能.

また，命題論理で使えた同値式は，そのまま，述語論理式に対しても用いることが出来る．

同一の量化記号の出現順序

先に見た例からも想像がつくように，同じ量化記号の順序はひっくり返しても論理的に同値となる：

$$\forall x\,\forall y\;A \;\cong\; \forall y\,\forall x\;A$$
$$\exists x\,\exists y\;A \;\cong\; \exists y\,\exists x\;A$$

直観的には，

$\forall x\,\forall y\;A(x,y)$ が成立する．

$\Leftrightarrow$ 任意の x について $\forall y\;A(x,y)$ が成立する．

$\Leftrightarrow$ $\forall y\;A(0,y), \forall y\;A(1,y), \ldots$ が成立する．

$\Leftrightarrow$ $A(0,0), A(0,1), \ldots, A(1,0), A(1,1), \ldots$ が成立する．

$\Leftrightarrow$ $A(0,0), A(1,0), \ldots, A(0,1), A(1,1), \ldots$ が成立する．

$\Leftrightarrow$ $\forall x\;A(x,0), \forall x\;A(x,1), \ldots$ が成立する．

$\Leftrightarrow$ 任意の y について $\forall x\;A(x,y)$ が成立する．

$\Leftrightarrow$ $\forall y\,\forall x\;A(x,y)$ が成立する．

重要な同値式 (1)

全称の交換　$\forall x\,\forall y\,A \cong \forall y\,\forall x\,A$

存在の交換　$\exists x\,\exists y\,A \cong \exists y\,\exists x\,A$

　なお，$A, B, \ldots$ は述語論理式のメタ変数であり，$x, y, \ldots$ は固体変数のメタ変数である．つまり，A や B，x や y は，同じ述語論理式や固体変数をとってもよい．

例．Rが対称的であることを以下のように記述した：

$$\forall x\,\forall y\,(R(x,y) \to R(y,x))$$

これは，$\forall y\,\forall x\,(R(x,y) \to R(y,x))$ と記述してもよい．

例．Rが推移的であることを以下のように記述した：

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$$

先頭の$\forall x, \forall y, \forall z$は順番を入れ替えても論理的に同値

$$
\begin{array}{cll}
 & \forall x\,\forall y\,\forall z\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)) & \\
\cong & \forall y\,\forall x\,\forall z\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)) & \textbf{(全称の交換)} \\
\cong & \forall y\,\forall z\,\forall x\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)) & \textbf{(全称の交換)} \\
\cong & \forall z\,\forall y\,\forall x\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)) & \textbf{(全称の交換)} \\
\cong & \forall z\,\forall x\,\forall y\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)) & \textbf{(全称の交換)} \\
\cong & \forall x\,\forall z\,\forall y\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)) & \textbf{(全称の交換)}
\end{array}
$$

量化記号の分配

次に，論理積や論理和との関係についての基本的な性質をみておく．全称は論理積について分配する．また，存在は論理和について分配する：

$$\forall x\,(A \wedge B) \cong \forall x\, A \wedge \forall x\, B$$
$$\exists x\,(A \vee B) \cong \exists x\, A \vee \exists x\, B$$

直観的には，

$\forall x\,(A(x) \wedge B(x))$ が成立する．

$\Leftrightarrow$ 任意の x について，$A(x)$ かつ $B(x)$ が成立する．

$\Leftrightarrow$ $A(0), B(0), A(1), B(1), \ldots$ が成立する．

$\Leftrightarrow$ $A(0), A(1), \ldots, B(0), B(1), \ldots$ が成立する．

$\Leftrightarrow$ $\forall x\, A(x)$ と $\forall x\, B(x)$ が成立する．

$\Leftrightarrow$ $\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$ が成立する．

重要な同値式 (2)

全称の分配　　$\forall x\,(A \wedge B) \cong \forall x\, A \wedge \forall x\, B$

存在の分配　　$\exists x\,(A \vee B) \cong \exists x\, A \vee \exists x\, B$

例．集合について，次の事実がよく知られている．

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq A$$

これを論理的な観点から説明してみよう．

A = Bを表わす述語論理式: $\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{A} \leftrightarrow \mathtt{x} \in \mathtt{B})$

A ⊆ Bを表わす述語論理式: $\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{A} \to \mathtt{x} \in \mathtt{B})$

B ⊆ Aを表わす述語論理式: $\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{B} \to \mathtt{x} \in \mathtt{A})$

であるから，

$$\begin{array}{lll} & \forall \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{A} \leftrightarrow \mathtt{x} \in \mathtt{B}) & (A = B) \\ \cong & \forall \mathtt{x}\,((\mathtt{x} \in \mathtt{A} \to \mathtt{x} \in \mathtt{B}) \land (\mathtt{x} \in \mathtt{B} \to \mathtt{x} \in \mathtt{A})) & \text{(同値の法則)} \\ \cong & \forall \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{A} \to \mathtt{x} \in \mathtt{B}) \land \forall \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{B} \to \mathtt{x} \in \mathtt{A}) & \text{(全称の分配)} \\ & & (A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq A) \end{array}$$

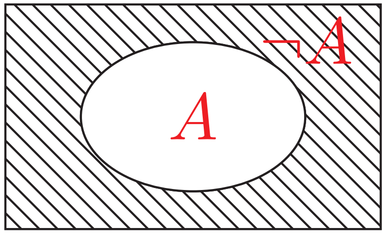
全称と存在の否定とド・モルガンの法則

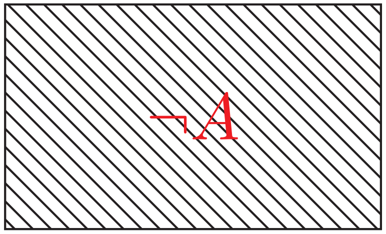
全称の否定 $\neg\forall x A$

すべての x について A であるとはいえない，つまり．ある x についてはAが成立していないという部分否定を意味する．

否定の全称 $\forall x \neg A$

すべての x は A を満たさない，つまり，A が成立するような x はないという全否定を意味する．



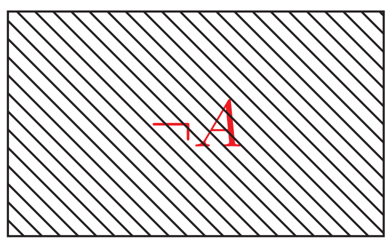


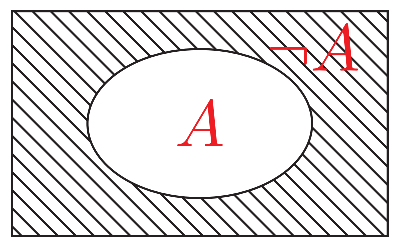
存在の否定 $\neg\exists x A$

Aが成立するようなxは存在しない，つまり，全てのxについてAが成立しないという全否定を意味する．

否定の存在 $\exists x \neg A$

Aが成立しないようなxが存在する，つまり，全部のxについてAが成立するわけではないという部分否定を意味する．





2つの部分否定(および全否定)は同じ意味．つまり，

$$\neg\forall x\, A \;\cong\; \exists x\, \neg A$$
$$\neg\exists x\, A \;\cong\; \forall x\, \neg A$$

が成立する．直観的には，

$\neg\forall x\, A(x)$ が成立する．
$\Leftrightarrow$ 任意の x について $A(x)$ が成立する，ということはない．
$\Leftrightarrow$ $A(0), A(1), \ldots$ 全てが成立する，ということはない．
$\Leftrightarrow$ $A(k)$ は成立しない (k は $0, 1, \ldots$ のどれかとして).
$\Leftrightarrow$ $A(x)$ が成立しないような x が存在する．
$\Leftrightarrow$ $\exists x\, \neg A(x)$ が成立する．

重要な同値式 (3)

ド・モルガンの法則

$$\neg \forall x\, A \cong \exists x\, \neg A$$

$$\neg \exists x\, A \cong \forall x\, \neg A$$

例．$\mathtt{A}$ が空集合であることは，「どんな要素も $\mathtt{A}$ の元ではない」とも「$\mathtt{A}$ の元となる要素は存在しない」とも言い表わせる．この **2** つはド・モルガンの法則から同値である．

$$\neg\exists \mathtt{x}\,(\mathtt{x} \in \mathtt{A}) \cong \forall \mathtt{x}\,\neg(\mathtt{x} \in \mathtt{A})$$

例．**2** 項関係 $\mathtt{R}$ が反射的であることは，$\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{x}))$ と表わされる．一方，$\mathtt{R}$ が非反射的であることは，$\forall \mathtt{x}\,\neg(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{x}))$ と表わされる．

$$\neg\forall \mathtt{x}\,(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{x})) \cong \exists \mathtt{x}\,\neg(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{x})) \not\cong \forall \mathtt{x}\,\neg(\mathtt{R}(\mathtt{x},\mathtt{x}))$$

であるから，“反射的でない” $\neq$ “非反射的”．

演習 10.6. 以下の同値式を示せ.

(1) $\neg\exists \mathtt{x}\,\forall \mathtt{y}\,\neg(\mathtt{x} \approx \mathtt{y}) \cong \forall \mathtt{x}\,\exists \mathtt{y}\,(\mathtt{x} \approx \mathtt{y})$

(2) $\exists \mathtt{x}\,(\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \mathtt{Q}(\mathtt{x})) \cong \forall \mathtt{x}\,\mathtt{P}(\mathtt{x}) \to \exists \mathtt{x}\,\mathtt{Q}(\mathtt{x})$

(解答)

(1)

$$
\begin{aligned}
\neg\exists x\,\forall y\,\neg(x \approx y) &\cong \forall x\,\neg\forall y\,\neg(x \approx y) && \textbf{(ド・モルガン)}\\
&\cong \forall x\,\exists y\,\neg\neg(x \approx y) && \textbf{(ド・モルガン)}\\
&\cong \forall x\,\exists y\,(x \approx y) && \textbf{(二重否定)}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\exists x\,(P(x) \to Q(x)) &\cong \exists x\,(\neg P(x) \lor Q(x)) && \textbf{(含意)}\\
&\cong \exists x\,\neg P(x) \lor \exists x\,Q(x) && \textbf{(存在の分配)}\\
&\cong \neg\forall x\,P(x) \lor \exists x\,Q(x) && \textbf{(ド・モルガン)}\\
&\cong \forall x\,P(x) \to \exists x\,Q(x) && \textbf{(含意)}
\end{aligned}
$$

まとめ

- 述語論理式
  - 全称と存在
  - 関数記号，述語記号，等号，シグニチャ，アリティ
  - 項，原子論理式，述語論理式
  - 述語論理式の括弧の省略
  - 述語論理式による記述
- 述語論理式の真偽と同値式
  - 述語論理式の真偽とは
  - 述語論理式の同値変形
  - 重要な同値式 **(1)〜(3)**