

## 2022年度 数理論理学 復習問題 (5)

問題 1 空いているところを補って，以下の証明図を完成させよ．

(1)

$$\frac{\frac{[ \quad ]^3 \quad \frac{[Q]^2}{\rightarrow I^1}}{\frac{R}{Q \rightarrow R} \rightarrow I^2}}{((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow Q \rightarrow R} \rightarrow I^3$$

(2)

$$\frac{\frac{\frac{[ \quad ] \quad [ \quad ]}{Q \wedge R} \rightarrow E \quad \frac{[ \quad ] \quad [ \quad ]}{Q \wedge R} \rightarrow E}{\frac{P \rightarrow R \wedge Q}{(P \rightarrow Q \wedge R) \rightarrow P \rightarrow R \wedge Q} \rightarrow I^1}}{\frac{P \rightarrow R \wedge Q}{(P \rightarrow Q \wedge R) \rightarrow P \rightarrow R \wedge Q} \rightarrow I^2}$$

(3)

$$\frac{\frac{\frac{[ \quad ]^2}{P} \wedge E \quad \frac{[ \quad ]^2}{Q \rightarrow R} \wedge E}{\frac{P}{Q \rightarrow R} \wedge I}}{\frac{P \wedge Q}{(P \wedge Q) \wedge R \rightarrow P \wedge (Q \rightarrow R)} \rightarrow I^2}$$

問題 2 以下の命題論理式の証明図を書け．

- (1)  $(P \rightarrow P \rightarrow Q) \rightarrow R \rightarrow P \rightarrow Q$
- (2)  $R \rightarrow P \wedge Q \rightarrow Q \wedge (R \wedge P)$
- (3)  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow P \rightarrow R$

問題 3 以下の命題論理式の証明図を書け．

- (1)  $(P \rightarrow \perp) \rightarrow \neg(P \wedge Q)$
- (2)  $P \wedge \neg Q \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)$
- (3)  $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P$

問題 4 以下の命題論理式の証明図を書け．

$$(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \rightarrow (P \leftrightarrow R)$$

## 2022年度 数理論理学 復習問題解答 (5)

### 問題 1

(1)

$$\frac{\frac{[(P \rightarrow Q) \rightarrow R]^3 \quad [Q]^2}{P \rightarrow Q} \rightarrow I^1}{\frac{R}{Q \rightarrow R} \rightarrow I^2} \rightarrow E}{((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow (Q \rightarrow R)} \rightarrow I^3$$

(2)

$$\frac{\frac{[P \rightarrow (Q \wedge R)]^2 \quad [P]^1}{Q \wedge R} \rightarrow E \quad \frac{[P \rightarrow (Q \wedge R)]^2 \quad [P]^1}{Q \wedge R} \rightarrow E}{\frac{R \wedge Q}{P \rightarrow (R \wedge Q)} \rightarrow I^1} \wedge E}{(P \rightarrow (Q \wedge R)) \rightarrow (P \rightarrow (R \wedge Q))} \rightarrow I^2$$

(3)

$$\frac{\frac{[(P \wedge Q) \wedge R]^2}{P \wedge Q} \wedge E \quad \frac{[(P \wedge Q) \wedge R]^2}{R} \wedge E}{\frac{P}{Q \rightarrow R} \rightarrow I^1} \wedge E}{\frac{P \wedge (Q \rightarrow R)}{(P \wedge Q) \wedge R} \rightarrow I^2} \wedge I$$

### 問題 2

(1)

$$\frac{\frac{[P \rightarrow P \rightarrow Q]^3 \quad [P]^1}{P \rightarrow Q} \rightarrow E \quad [P]^1}{Q} \rightarrow E}{\frac{P \rightarrow Q}{P \rightarrow Q} \rightarrow I^1}{\frac{R \rightarrow P \rightarrow Q}{R \rightarrow P \rightarrow Q} \rightarrow I^2} \rightarrow I^3$$

(2)

$$\frac{\frac{[P \wedge Q]^1}{Q} \wedge E \quad \frac{[R]^2 \quad [P \wedge Q]^1}{R \wedge P} \wedge I}{\frac{Q \wedge (R \wedge P)}{P \wedge Q \rightarrow Q \wedge (R \wedge P)} \rightarrow I^1} \wedge I}{R \rightarrow P \wedge Q \rightarrow Q \wedge (R \wedge P)} \rightarrow I^2$$

(3)

$$\frac{\frac{[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)]^2}{Q \rightarrow R} \wedge E \quad \frac{[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)]^2}{P \rightarrow Q} \wedge E \quad [P]^1}{Q} \rightarrow E}{\frac{R}{P \rightarrow R} \rightarrow I^1} \rightarrow E}{(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow P \rightarrow R} \rightarrow I^2$$

### 問題 3

(1)

$$\frac{\frac{[P \rightarrow \perp]^2 \quad [P \wedge Q]^1}{P} \wedge E}{\frac{\perp}{\neg(P \wedge Q)} \rightarrow I^1} \rightarrow E}{(P \rightarrow \perp) \rightarrow \neg(P \wedge Q)} \rightarrow I^2$$

(2)

$$\frac{\frac{[P \wedge \neg Q]^2}{\neg Q} \wedge E \quad \frac{[P \rightarrow Q]^1}{Q} \rightarrow E \quad \frac{[P \wedge \neg Q]^2}{P} \wedge E}{\frac{\perp}{\neg(P \rightarrow Q)} \rightarrow I^1} \rightarrow E}{P \wedge \neg Q \rightarrow \neg(P \rightarrow Q)} \rightarrow I^2$$

(3)

$$\frac{\frac{\frac{[(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q)]^2}{P \rightarrow \neg Q} \wedge E \quad [P]^1}{\neg Q} \rightarrow E \quad \frac{\frac{[(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q)]^2}{P \rightarrow Q} \wedge E \quad [P]^1}{Q} \rightarrow E}{\frac{\perp}{\neg P} \neg I^1} \rightarrow I^2}{(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg P} \rightarrow I^2$$

問題 4

$$\frac{\frac{\frac{[(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)]^2}{Q \leftrightarrow R} \wedge E \quad \frac{P \leftrightarrow Q}{Q} \leftrightarrow E \quad [P]^1}{R} \leftrightarrow E \quad \frac{\frac{[(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)]^2}{P \leftrightarrow Q} \wedge E \quad \frac{Q \leftrightarrow R}{Q} \leftrightarrow E \quad [R]^1}{P} \leftrightarrow E \quad \frac{P \leftrightarrow R}{(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \rightarrow (P \leftrightarrow R)} \leftrightarrow I^1}{\rightarrow I^2}$$