2022 年度 数理論理学 復習問題 (4)

問題 1 以下の命題論理式は論理的同値か，真理値表を書いて調べよ．

(1) $\mathtt{P} \to \mathtt{Q}$ と $\neg\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}$

(2) $(\mathtt{P} \leftrightarrow \mathtt{Q}) \leftrightarrow \mathtt{R}$ と $\mathtt{P} \leftrightarrow (\mathtt{Q} \leftrightarrow \mathtt{R})$

問題 2 $\mathtt{P} \wedge (\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}) \cong \mathtt{P}$ を (真理値表を使わず) 解釈の定義を使って示せ.

問題 3 以下の論理的同値性を同値変形を用いて示せ．(変形に用いた規則の名前も記入すること．)

(1) $\mathtt{P} \to \mathtt{P} \to \mathtt{Q} \cong \mathtt{P} \to \mathtt{Q}$

(2) $\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{S} \cong \mathtt{P} \wedge \mathtt{Q} \to \mathtt{S}$

(3) $(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{Q} \cong \mathtt{P} \vee \mathtt{Q}$

(4) $\mathtt{P} \leftrightarrow \mathtt{Q} \cong (\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}) \vee (\neg\mathtt{P} \wedge \neg\mathtt{Q})$

問題 4 以下の命題論理式の論理積標準形および論理和標準形を同値変形によって求めよ．(変形に用いた規則の名前も記入すること．)

(1) $\neg(\neg\mathtt{P} \wedge \neg\mathtt{Q})$

(2) $\neg(\mathtt{P} \wedge (\mathtt{Q} \to \mathtt{R}))$

(3) $(\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \wedge \mathtt{R}) \to \mathtt{S}$

(4) $\neg(\mathtt{P} \leftrightarrow \mathtt{Q})$

問題 5 以下の命題論理式の真理値表を書き，そこから論理積標準形および論理和標準形を求めよ．

(1) $\neg(\mathtt{P} \leftrightarrow \mathtt{Q})$

(2) $\neg(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{Q} \wedge \mathtt{P}$

2022年度 数理論理学 復習問題解答 (4)

問題 1 (1) 真理値表は以下のようになる．

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \to \mathtt{Q}$	$\neg\mathtt{P}$	$\neg\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

ゆえに，$\mathtt{P} \to \mathtt{Q}$ と $\neg\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}$ は論理的同値.
(2) 真理値表は以下のようになる．

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{R}$	$\mathtt{P} \leftrightarrow \mathtt{Q}$	$(\mathtt{P} \leftrightarrow \mathtt{Q}) \leftrightarrow \mathtt{R}$	$\mathtt{Q} \leftrightarrow \mathtt{R}$	$\mathtt{P} \leftrightarrow (\mathtt{Q} \leftrightarrow \mathtt{R})$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T	F
F	T	F	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	F	T	F

ゆえに，$(\mathtt{P} \leftrightarrow \mathtt{Q}) \leftrightarrow \mathtt{R}$ と $\mathtt{P} \leftrightarrow (\mathtt{Q} \leftrightarrow \mathtt{R})$ は論理的同値.

問題 2 v を任意の付値とする．$v(\mathtt{P})$ の値で場合分けする．

- $v(\mathtt{P}) = \mathrm{T}$ のとき．このとき，$[\![\mathtt{P}]\!]_v = \mathrm{T}$ であるから，$[\![\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{T}$．よって，$[\![\mathtt{P} \land (\mathtt{P} \lor \mathtt{Q})]\!]_v = \mathrm{T} = [\![\mathtt{P}]\!]_v$ となる．
- $v(\mathtt{P}) = \mathrm{F}$ のとき．このとき，$[\![\mathtt{P}]\!]_v = \mathrm{F}$ であるから，$[\![\mathtt{P} \land (\mathtt{P} \lor \mathtt{Q})]\!]_v = \mathrm{F} = [\![\mathtt{P}]\!]_v$ となる．

よって，いづれの場合も $[\![\mathtt{P} \land (\mathtt{P} \lor \mathtt{Q})]\!]_v = [\![\mathtt{P}]\!]_v$ となる．ゆえに，$\mathtt{P} \land (\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}) \cong \mathtt{P}$ が成立.

問題 3

(1)
$$\begin{array}{rcll}
\mathtt{P} \to (\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) & \cong & (\neg\mathtt{P}) \lor (\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) & (\text{含意}) \\
& \cong & (\neg\mathtt{P}) \lor ((\neg\mathtt{P}) \lor \mathtt{Q}) & (\text{含意}) \\
& \cong & ((\neg\mathtt{P}) \lor (\neg\mathtt{P})) \lor \mathtt{Q} & (\text{結合律}) \\
& \cong & (\neg\mathtt{P}) \lor \mathtt{Q} & (\text{べき等律}) \\
& \cong & \mathtt{P} \to \mathtt{Q} & (\text{含意})
\end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rcll}
\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{S} & \cong & \neg\mathtt{P} \lor (\mathtt{Q} \to \mathtt{S}) & (\text{含意}) \\
& \cong & \neg\mathtt{P} \lor (\neg\mathtt{Q} \lor \mathtt{S}) & (\text{含意}) \\
& \cong & (\neg\mathtt{P} \lor \neg\mathtt{Q}) \lor \mathtt{S} & (\text{結合律}) \\
& \cong & \neg(\mathtt{P} \land \mathtt{Q}) \lor \mathtt{S} & (\text{ド・モルガン}) \\
& \cong & \mathtt{P} \land \mathtt{Q} \to \mathtt{S} & (\text{含意})
\end{array}$$

(3)

$$
\begin{aligned}
(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{Q} &\cong \neg(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \lor \mathtt{Q} && (\text{含意})\\
&\cong \neg(\neg\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}) \lor \mathtt{Q} && (\text{含意})\\
&\cong (\neg\neg\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q}) \lor \mathtt{Q} && (\text{ド・モルガン})\\
&\cong (\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q}) \lor \mathtt{Q} && (\text{二重否定})\\
&\cong (\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}) \land (\neg\mathtt{Q} \lor \mathtt{Q}) && (\text{分配律})\\
&\cong (\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}) \land \top && (\top\ \text{規則})\\
&\cong \mathtt{P} \lor \mathtt{Q} && (\top\ \text{規則})
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&\mathtt{P} \leftrightarrow \mathtt{Q}\\
\cong\ & (\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \land (\mathtt{Q} \to \mathtt{P}) && (\text{同値})\\
\cong\ & (\neg\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}) \land (\neg\mathtt{Q} \lor \mathtt{P}) && (\text{含意}\ \times 2)\\
\cong\ & ((\neg\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}) \land \neg\mathtt{Q}) \lor ((\neg\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}) \land \mathtt{P}) && (\text{分配律})\\
\cong\ & ((\neg\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q}) \lor (\mathtt{Q} \land \neg\mathtt{Q})) \lor ((\neg\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}) \land \mathtt{P}) && (\text{分配律})\\
\cong\ & ((\neg\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q}) \lor \bot) \lor ((\neg\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}) \land \mathtt{P}) && (\bot\ \text{規則})\\
\cong\ & (\neg\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q}) \lor ((\neg\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}) \land \mathtt{P}) && (\bot\ \text{規則})\\
\cong\ & (\neg\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q}) \lor ((\neg\mathtt{P} \land \mathtt{P}) \lor (\mathtt{Q} \land \mathtt{P})) && (\text{分配律})\\
\cong\ & (\neg\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q}) \lor (\bot \lor (\mathtt{Q} \land \mathtt{P})) && (\bot\ \text{規則})\\
\cong\ & (\neg\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q}) \lor (\mathtt{Q} \land \mathtt{P}) && (\bot\ \text{規則})\\
\cong\ & (\mathtt{P} \land \mathtt{Q}) \lor (\neg\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q}) && (\text{交換律}\ \times 2)
\end{aligned}
$$

問題 4

(1)

$$
\begin{aligned}
\neg(\neg\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q}) &\cong \neg\neg\mathtt{P} \lor \neg\neg\mathtt{Q} && (\text{ド・モルガン})\\
&\cong \mathtt{P} \lor \mathtt{Q} && (\text{二重否定}\ \times 2) \cdots \text{論理和標準形かつ論理積標準形}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\neg(\mathtt{P} \land (\mathtt{Q} \to \mathtt{R})) &\cong \neg(\mathtt{P} \land (\neg\mathtt{Q} \lor \mathtt{R})) && (\text{含意})\\
&\cong \neg\mathtt{P} \lor \neg(\neg\mathtt{Q} \lor \mathtt{R}) && (\text{ド・モルガン})\\
&\cong \neg\mathtt{P} \lor (\neg\neg\mathtt{Q} \land \neg\mathtt{R}) && (\text{ド・モルガン})\\
&\cong \neg\mathtt{P} \lor (\mathtt{Q} \land \neg\mathtt{R}) && (\text{二重否定}) \cdots \text{論理和標準形}\\
&\cong (\neg\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}) \land (\neg\mathtt{P} \lor \neg\mathtt{R}) && (\text{分配律}) \cdots \text{論理積標準形}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
(\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \land \mathtt{R}) \to \mathtt{S} &\cong (\neg\mathtt{P} \lor (\mathtt{Q} \land \mathtt{R})) \to \mathtt{S} && (\text{含意})\\
&\cong \neg(\neg\mathtt{P} \lor (\mathtt{Q} \land \mathtt{R})) \lor \mathtt{S} && (\text{含意})\\
&\cong (\neg\neg\mathtt{P} \land \neg(\mathtt{Q} \land \mathtt{R})) \lor \mathtt{S} && (\text{ド・モルガン})\\
&\cong (\neg\neg\mathtt{P} \land (\neg\mathtt{Q} \lor \neg\mathtt{R})) \lor \mathtt{S} && (\text{ド・モルガン})\\
&\cong (\mathtt{P} \land (\neg\mathtt{Q} \lor \neg\mathtt{R})) \lor \mathtt{S} && (\text{二重否定}) \cdots (a)\\
&\cong (\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q}) \lor (\mathtt{P} \land \neg\mathtt{R}) \lor \mathtt{S} && (\text{分配律}) \cdots \text{論理和標準形}\\
(a) &\cong (\mathtt{P} \lor \mathtt{S}) \land (\neg\mathtt{Q} \lor \neg\mathtt{R} \lor \mathtt{S}) && (\text{分配律}) \cdots \text{論理積標準形}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg(\mathtt{P} \leftrightarrow \mathtt{Q}) & \\
\cong & \neg((\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \land (\mathtt{Q} \to \mathtt{P})) & (\text{同値}) \\
\cong & \neg((\neg\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}) \land (\neg\mathtt{Q} \lor \mathtt{P})) & (\text{含意} \times 2) \\
\cong & \neg(\neg\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}) \lor \neg(\neg\mathtt{Q} \lor \mathtt{P}) & (\text{ド・モルガン}) \\
\cong & (\neg\neg\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q}) \lor (\neg\neg\mathtt{Q} \land \neg\mathtt{P}) & (\text{ド・モルガン} \times 2) \\
\cong & (\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q}) \lor (\mathtt{Q} \land \neg\mathtt{P}) & (\text{二重否定} \times 2) \cdots \text{論理和標準形} \\
\cong & (\mathtt{P} \lor (\mathtt{Q} \land \neg\mathtt{P})) \land (\neg\mathtt{Q} \lor (\mathtt{Q} \land \neg\mathtt{P})) & (\text{分配律}) \\
\cong & (\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}) \land (\mathtt{P} \lor \neg\mathtt{P}) \land (\neg\mathtt{Q} \lor \mathtt{Q}) \land (\neg\mathtt{Q} \lor \neg\mathtt{P}) & (\text{分配律}) \cdots \text{論理積標準形} \\
\cong & (\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}) \land (\neg\mathtt{Q} \lor \neg\mathtt{P}) & (\top\ \text{規則} \times 4) \cdots \text{論理積標準形 (より簡単)}
\end{array}
$$

問題 5 (1) $\neg(\mathtt{P} \leftrightarrow \mathtt{Q})$ の真理値表を書くと以下のようになる．

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \leftrightarrow \mathtt{Q}$	$\neg(\mathtt{P} \leftrightarrow \mathtt{Q})$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	T	F

論理和標準形

$\neg(\mathtt{P} \leftrightarrow \mathtt{Q})$ が真となる行に注目すると，論理和標準形 $(\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q}) \lor (\neg\mathtt{P} \land \mathtt{Q})$ が得られる．

論理積標準形

$\neg(\mathtt{P} \leftrightarrow \mathtt{Q})$ が偽となる行に注目すると，命題論理式 $\neg((\mathtt{P} \land \mathtt{Q}) \lor (\neg\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q}))$ が構成できる．ここから，ド・モルガンの法則と二重否定の法則で同値変形を行うと，論理積標準形 $(\neg\mathtt{P} \lor \neg\mathtt{Q}) \land (\mathtt{P} \lor \mathtt{Q})$ が得られる．

(2) $\neg(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{Q} \land \mathtt{P}$ の真理値表は以下のようなる．

$\mathtt{P}$	$\mathtt{Q}$	$\mathtt{P} \to \mathtt{Q}$	$\neg(\mathtt{P} \to \mathtt{Q})$	$\mathtt{Q} \land \mathtt{P}$	$(\neg(\mathtt{P} \to \mathtt{Q})) \to (\mathtt{Q} \land \mathtt{P})$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	F	F	T

論理和標準形

$\neg(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{Q} \land \mathtt{P}$ の真理値が真になる行に着目して，論理和標準形 $(\mathtt{P} \land \mathtt{Q}) \lor (\neg\mathtt{P} \land \mathtt{Q}) \lor (\neg\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q})$ が得られる．

論理積標準形

$\neg(\mathtt{P} \to \mathtt{Q}) \to \mathtt{Q} \land \mathtt{P}$ の真理値が偽になる行に着目すると，命題論理式 $\neg(\mathtt{P} \land \neg\mathtt{Q})$ が得られる．これをド・モルガンの法則と二重否定の法則で同値変形すると，論理積標準形 $\neg\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}$ が得られる．(これは実は論理和標準形にもなっている．)