2022 年度 数理論理学 復習問題 (3)

問題 1 付値 v_0 を

$$v_0(\mathtt{P}_i) = \begin{cases} \mathrm{T} & (i\,\text{が偶数のとき}) \\ \mathrm{F} & (i\,\text{が奇数のとき}) \end{cases}$$

により定めるとき，以下の値を (a) 解釈の定義による直接的な計算方法，(b) ブール関数を用いた式変形による計算方法，の 2 通りの方法で計算せよ．

(1) $[\![\neg(\mathtt{P}_6 \to \mathtt{P}_4)]\!]_{v_0}$

(2) $[\![\mathtt{P}_6 \land \neg\mathtt{P}_3 \to \neg\mathtt{P}_1]\!]_{v_0}$

問題 2 v を任意の付値とするとき，$[\![\mathtt{P} \land \neg\mathtt{P}]\!]_v$ の値を (真理値表ではなく) 解釈の定義を使って求めよ．

問題 3 命題論理式 $\neg(\mathtt{P}_1 \lor \mathtt{P}_2)$ について以下の問いに答えよ．真理値表を使わずに解くこと．

(1) この命題論理式がトートロジーでない場合には，反例を 1 つ与えよ．

(2) この命題論理式が充足可能である場合には，モデルを 1 つ与えよ．

問題 4 $\mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{P} \land \mathtt{Q}$ がトートロジーであることを (真理値表を使わず) 解釈の定義を用いて示せ.

問題 5 $\neg(\neg\mathtt{P} \to \mathtt{P})$ は充足可能であることを (真理値表を使わず) 解釈の定義を使って示せ.

問題 6 $[\![\mathtt{P} \lor \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{F}$ となるとき，$[\![\mathtt{P} \land \mathtt{Q}]\!]_v$ の値を (真理値表を使わず) 解釈の定義に従って示せ.

問題 7 $[\![\mathtt{P} \land \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{T}$，$[\![\mathtt{P} \to \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{F}$ となるとき，$[\![\mathtt{Q} \to \mathtt{R}]\!]_v$ の値を (真理値表を使わず) 解釈の定義に従って示せ.

問題 8 $[\![\mathtt{P} \to \mathtt{Q}]\!]_v = [\![\mathtt{P} \land \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{F}$ となるとき，$[\![\mathtt{Q} \lor \mathtt{R}]\!]_v$ の値を (真理値表を使わず) 解釈の定義に従って示せ.

問題 9 $[\![\mathtt{P} \land \mathtt{Q}]\!]_v = [\![\mathtt{R} \land \neg\mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{F}$ となるとき，$[\![\mathtt{P} \land \mathtt{R}]\!]_v$ の値を (真理値表を使わず) 解釈の定義に従って示せ.

問題 10 $[\![\mathtt{P} \to \mathtt{Q}]\!]_v = [\![\mathtt{Q} \to \mathtt{R}]\!]_v$ となるとき，$[\![\mathtt{P} \to \mathtt{R}]\!]_v$ の値を (真理値表を使わず) 解釈の定義に従って示せ.

2022 年度 数理論理学 復習問題解答 (3)

問題 1

(a) 解釈の定義による直接的な計算法.

(1)

$\llbracket \mathtt{P}_6 \rrbracket_{v_0} = \llbracket \mathtt{P}_4 \rrbracket_{v_0} = \mathrm{T}$ より，$\llbracket \mathtt{P}_6 \to \mathtt{P}_4 \rrbracket_{v_0} = \mathrm{T}$．よって，$\llbracket \neg(\mathtt{P}_6 \to \mathtt{P}_4) \rrbracket_{v_0} = \mathrm{F}$

(2)

$\llbracket \mathtt{P}_3 \rrbracket_{v_0} = \mathrm{F}$ より，$\llbracket \neg\mathtt{P}_3 \rrbracket_{v_0} = \mathrm{T}$. よって，$\llbracket \mathtt{P}_6 \rrbracket_{v_0} = \mathrm{T}$ より，$\llbracket \mathtt{P}_6 \wedge \neg\mathtt{P}_3 \rrbracket_{v_0} = \mathrm{T}$. 一方，$\llbracket \mathtt{P}_1 \rrbracket_{v_0} = \mathrm{F}$ より，$\llbracket \neg\mathtt{P}_1 \rrbracket_{v_0} = \mathrm{T}$. 以上より，$\llbracket \mathtt{P}_6 \wedge \neg\mathtt{P}_3 \to \neg\mathtt{P}_1 \rrbracket_{v_0} = \mathrm{T}$.

(b) ブール関数を用いた式変形による計算法.

(1)

$$\begin{aligned}
\llbracket \neg(\mathtt{P}_6 \to \mathtt{P}_4) \rrbracket_{v_0} &= \mathsf{not}(\llbracket \mathtt{P}_6 \to \mathtt{P}_4 \rrbracket_{v_0}) \\
&= \mathsf{not}(\mathsf{imp}(\llbracket \mathtt{P}_6 \rrbracket_{v_0}, \llbracket \mathtt{P}_4 \rrbracket_{v_0})) \\
&= \mathsf{not}(\mathsf{imp}(\mathrm{T}, \mathrm{T})) \\
&= \mathsf{not}(\mathrm{T}) \\
&= \mathrm{F}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\llbracket \mathtt{P}_6 \wedge \neg\mathtt{P}_3 \to \neg\mathtt{P}_1 \rrbracket_{v_0} &= \mathsf{imp}(\llbracket \mathtt{P}_6 \wedge \neg\mathtt{P}_3 \rrbracket_{v_0}, \llbracket \neg\mathtt{P}_1 \rrbracket_{v_0}) \\
&= \mathsf{imp}(\mathsf{and}(\llbracket \mathtt{P}_6 \rrbracket_{v_0}, \llbracket \neg\mathtt{P}_3 \rrbracket_{v_0}), \llbracket \neg\mathtt{P}_1 \rrbracket_{v_0}) \\
&= \mathsf{imp}(\mathsf{and}(\llbracket \mathtt{P}_6 \rrbracket_{v_0}, \mathsf{not}(\llbracket \mathtt{P}_3 \rrbracket_{v_0})), \mathsf{not}(\llbracket \mathtt{P}_1 \rrbracket_{v_0})) \\
&= \mathsf{imp}(\mathsf{and}(\mathrm{T}, \mathsf{not}(\mathrm{F}))\mathsf{not}(\mathrm{F})) \\
&= \mathsf{imp}(\mathsf{and}(\mathrm{T}, \mathrm{T}), \mathsf{not}(\mathrm{F})) \\
&= \mathsf{imp}(\mathrm{T}, \mathrm{T}) \\
&= \mathrm{T}
\end{aligned}$$

問題 2 $v(\mathtt{P})$ の値によって場合分けする．$v(\mathtt{P}) = \mathrm{T}$ の場合.このとき，解釈の定義より，$\llbracket \neg\mathtt{P} \rrbracket_v = \mathrm{F}$．よって，解釈の定義より，$\llbracket \mathtt{P} \wedge \neg\mathtt{P} \rrbracket_v = \mathrm{F}$ となる．$v(\mathtt{P}) = \mathrm{F}$ の場合. このとき，解釈の定義より，$\llbracket \neg\mathtt{P} \rrbracket_v = \mathrm{T}$．よって，解釈の定義より，$\llbracket \mathtt{P} \wedge \neg\mathtt{P} \rrbracket_v = \mathrm{F}$ となる．よって，いづれの場合でも，$\llbracket \mathtt{P} \wedge \neg\mathtt{P} \rrbracket_v = \mathrm{F}$ となる．

問題 3 $A = \neg(\mathtt{P}_1 \vee \mathtt{P}_2)$ とおく．(1) 付値 v が A の反例となるためには，$\llbracket \neg(\mathtt{P}_1 \vee \mathtt{P}_2) \rrbracket_v = \mathrm{F}$ となればよい．このためには，$\llbracket \mathtt{P}_1 \vee \mathtt{P}_2 \rrbracket_v = \mathrm{T}$，つまり，$\llbracket \mathtt{P}_1 \rrbracket_v = \mathrm{T}$ または $\llbracket \mathtt{P}_2 \rrbracket_v = \mathrm{T}$ が成立すればよい.

解答例: $v(\mathtt{P}_i) = \mathrm{T}$ $(i \geq 0)$ により与えられる付値 v．($v(\mathtt{P}_1) = \mathrm{T}$ または $v(\mathtt{P}_2) = \mathrm{T}$ が成立している付値なら良い．)

(2) 付値 v が A のモデルとなるためには，$\llbracket \neg(\mathtt{P}_1 \vee \mathtt{P}_2) \rrbracket_v = \mathrm{T}$ となればよい．このためには，$\llbracket \mathtt{P}_1 \vee \mathtt{P}_2 \rrbracket_v = \mathrm{F}$，つまり，$\llbracket \mathtt{P}_1 \rrbracket_v = \mathrm{F}$ かつ $\llbracket \mathtt{P}_2 \rrbracket_v = \mathrm{F}$ が成立すればよい.

解答例: $v(\mathtt{P}_i) = \mathrm{F}$ $(i \geq 0)$ により与えられる付値 v．($v(\mathtt{P}_1) = v(\mathtt{P}_2) = \mathrm{F}$ が成立している付値ならよい．)

問題 4 $A = \mathtt{P} \to \mathtt{Q} \to \mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}$ とおく．任意の付値 v について，$\llbracket A \rrbracket_v = \mathrm{T}$ となることを示す.

$v(\mathtt{P}) = \mathrm{F}$ ならば，解釈の定義より，$\llbracket A \rrbracket_v = \mathrm{T}$ が成立．よって，以下では $v(\mathtt{P}) = \mathrm{T}$

の場合を考える．$v(\mathtt{Q}) = \mathrm{F}$ ならば，解釈の定義より，$[\![\mathtt{Q} \to \mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{T}$ が成立．よって，$[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$ となる．従って，$v(\mathtt{P}) = v(\mathtt{Q}) = \mathrm{T}$ の場合を考えればよい．このとき，解釈の定義より，$[\![\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{T}$ が成立．よって，$[\![\mathtt{Q} \to \mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{T}$．従って，$[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$ となる．

問題 5 $v(\mathtt{P}) = \mathrm{F}$ となる解釈 v を考える．このとき，$[\![\mathtt{P}]\!]_v = \mathrm{F}$，$[\![\neg\mathtt{P}]\!]_v = \mathrm{T}$．よって，$[\![\neg\mathtt{P} \to \mathtt{P}]\!]_v = \mathrm{F}$．従って，$[\![\neg(\neg\mathtt{P} \to \mathtt{P})]\!]_v = \mathrm{T}$．よって，$\neg(\neg\mathtt{P} \to \mathtt{P})$ は充足可能.

問題 6 $[\![\mathtt{P} \vee \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{F}$ より，$v(\mathtt{P}) = v(\mathtt{Q}) = \mathrm{F}$ となる．よって，$[\![\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{F}$.

問題 7 $[\![\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{T}$ より $v(\mathtt{P}) = v(\mathtt{Q}) = \mathrm{T}$．$[\![\mathtt{P} \to \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{F}$ より，$v(\mathtt{P}) = \mathrm{T}$，$v(\mathtt{R}) = \mathrm{F}$．よって，$[\![\mathtt{Q} \to \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{F}$.

問題 8 $[\![\mathtt{P} \to \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{F}$ より，$v(\mathtt{P}) = \mathrm{T}$ かつ $v(\mathtt{Q}) = \mathrm{F}$．また，$[\![\mathtt{P} \wedge \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{F}$ なので，$v(\mathtt{P}) = \mathrm{T}$ より，$v(\mathtt{R}) = \mathrm{F}$ が導かれる．よって，$v(\mathtt{Q}) = v(\mathtt{R}) = \mathrm{F}$ より，$[\![\mathtt{Q} \vee \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{F}$.

問題 9 $v(\mathtt{Q})$ の値で場合分けして考える．(i) $v(\mathtt{Q}) = \mathrm{T}$ の場合．$[\![\mathtt{P} \wedge \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{F}$ より，$v(\mathtt{P}) = \mathrm{F}$．よって，$[\![\mathtt{P} \wedge \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{F}$．(ii) $v(\mathtt{Q}) = \mathrm{F}$ の場合．このとき，$[\![\neg\mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{T}$ なので，$[\![\mathtt{R} \wedge (\neg\mathtt{Q})]\!]_v = \mathrm{F}$ より，$v(\mathtt{R}) = \mathrm{F}$．よって，$[\![\mathtt{P} \wedge \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{F}$．よって，$v(\mathtt{Q})$ の値によらず，$[\![\mathtt{P} \wedge \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{F}$ となる．

問題 10 (解答例 1) $[\![\mathtt{P} \to \mathtt{Q}]\!]_v = [\![\mathtt{Q} \to \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{F}$ とすると，$[\![\mathtt{P} \to \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{F}$ より $v(\mathtt{Q}) = \mathrm{F}$ が得られるが，このとき $[\![\mathtt{Q} \to \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{T}$ となるので矛盾．よって，$[\![\mathtt{P} \to \mathtt{Q}]\!]_v = [\![\mathtt{Q} \to \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{T}$．$v(\mathtt{P}) = \mathrm{F}$ のときは，解釈の定義より $[\![\mathtt{P} \to \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{T}$ が成立．$v(\mathtt{P}) = \mathrm{T}$ のときは，$[\![\mathtt{P} \to \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{T}$ より $v(\mathtt{Q}) = \mathrm{T}$ となり，従って，$[\![\mathtt{Q} \to \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{T}$ より $v(\mathtt{R}) = \mathrm{T}$．よって，いづれの場合も $[\![\mathtt{P} \to \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{T}$ となる．
(解答例 2) $[\![\mathtt{P} \to \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{F}$ とする．このとき，解釈の定義より，$v(\mathtt{P}) = \mathrm{T}$ かつ $v(\mathtt{R}) = \mathrm{F}$．よって，$v(\mathtt{Q}) = \mathrm{T}$ とすると，$[\![\mathtt{P} \to \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{T} \neq \mathrm{F} = [\![\mathtt{Q} \to \mathtt{R}]\!]_v$ となり，仮定 $[\![\mathtt{P} \to \mathtt{Q}]\!]_v = [\![\mathtt{Q} \to \mathtt{R}]\!]_v$ に矛盾．また，$v(\mathtt{Q}) = \mathrm{F}$ としても，$[\![\mathtt{P} \to \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{F} \neq \mathrm{T} = [\![\mathtt{Q} \to \mathtt{R}]\!]_v$ となり，仮定 $[\![\mathtt{P} \to \mathtt{Q}]\!]_v = [\![\mathtt{Q} \to \mathtt{R}]\!]_v$ に矛盾．よって，$[\![\mathtt{P} \to \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{T}$.
(解答例 3) $v(\mathtt{Q}) = \mathrm{T}$ の場合．解釈の定義より $[\![\mathtt{P} \to \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{T}$ となるので，仮定 $[\![\mathtt{P} \to \mathtt{Q}]\!]_v = [\![\mathtt{Q} \to \mathtt{R}]\!]_v$ より，$[\![\mathtt{Q} \to \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{T}$．よって，$v(\mathtt{R}) = \mathrm{T}$．従って，$[\![\mathtt{P} \to \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{T}$ となる．$v(\mathtt{Q}) = \mathrm{F}$ の場合．解釈の定義より $[\![\mathtt{Q} \to \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{T}$ となるので，仮定 $[\![\mathtt{P} \to \mathtt{Q}]\!]_v = [\![\mathtt{Q} \to \mathtt{R}]\!]_v$ より，$[\![\mathtt{P} \to \mathtt{Q}]\!]_v = \mathrm{T}$．よって，$v(\mathtt{P}) = \mathrm{F}$．従って，$[\![\mathtt{P} \to \mathtt{R}]\!]_v = \mathrm{T}$ となる．